

2022 年山东省枣庄市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的。

1. 实数 -2023 的绝对值是 ()

A. 2023

B. -2023

C. $\frac{1}{2023}$

D. $-\frac{1}{2023}$

2. 下列运算正确的是 ()

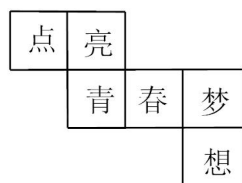
A. $3a^2 - a^2 = 3$

B. $a^3 \div a^2 = a$

C. $(-3ab^2)^2 = -6a^2b^4$

D. $(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$

3. 某正方体的每个面上都有一个汉字，如图是它的一种展开图，那么在原正方体中，与“亮”字所在面相对的面上的汉字是 ()



A. 青

B. 春

C. 梦

D. 想

4. 剪纸文化是中国最古老的民间艺术之一，下列剪纸图案中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



5. 2022 年 5 月，神舟十三号搭载的 1.2 万粒作物种子顺利出舱。其中 1.2 万用科学记数法表示为 ()



A. 12×10^3

B. 1.2×10^4

C. 0.12×10^5

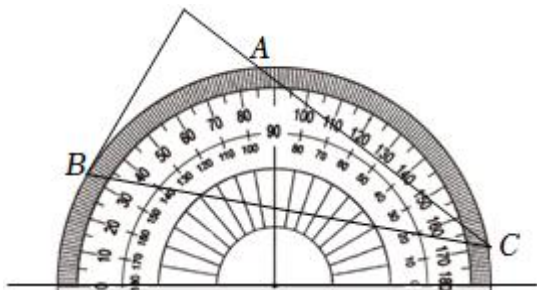
D. 1.2×10^6

6. 在践行“安全在我心中，你我一起行动”主题手抄报评比活动中，共设置“交通安全、消防安全、饮食安全、防疫安全”四个主题内容，推荐两名学生参加评比，若他们每人从以上四个主题内容中随机选取

一个, 则两人恰好选中同一主题的概率是 ()

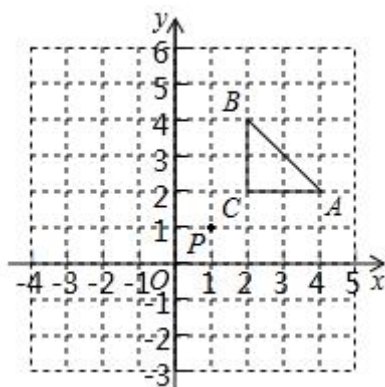
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

7. 将量角器按如图所示的方式放置在三角形纸板上, 使点 C 在半圆上. 点 A, B 的读数分别为 $86^\circ, 30^\circ$, 则 $\angle ACB$ 的度数是 ()



- A. 28° B. 30° C. 36° D. 56°

8. 如图, 将 $\triangle ABC$ 先向右平移 1 个单位, 再绕点 P 按顺时针方向旋转 90° , 得到 $\triangle A'B'C'$, 则点 B 的对应点 B' 的坐标是 ()

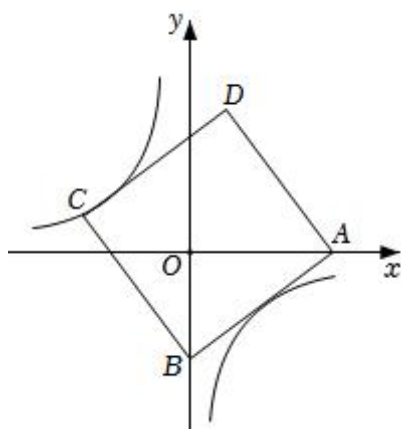


- A. (4, 0) B. (2, -2) C. (4, -1) D. (2, -3)

9. 已知 y_1 和 y_2 均是以 x 为自变量的函数, 当 $x=n$ 时, 函数值分别是 N_1 和 N_2 , 若存在实数 n , 使得 $N_1+N_2=1$, 则称函数 y_1 和 y_2 是“和谐函数”. 则下列函数 y_1 和 y_2 不是“和谐函数”的是 ()

- A. $y_1 = x^2+2x$ 和 $y_2 = -x+1$ B. $y_1 = \frac{1}{x}$ 和 $y_2 = x+1$
C. $y_1 = -\frac{1}{x}$ 和 $y_2 = -x-1$ D. $y_1 = x^2+2x$ 和 $y_2 = -x-1$

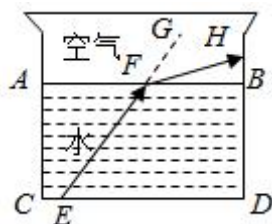
10. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 5, 点 A 的坐标为 (4, 0), 点 B 在 y 轴上, 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象过点 C , 则 k 的值为 ()



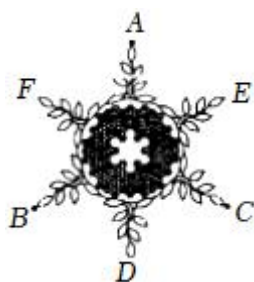
- A. 4 B. -4 C. -3 D. 3

二、填空题：本大题共 6 小题，满分 18 分，只填写最后结果，每小题填对得 3 分.

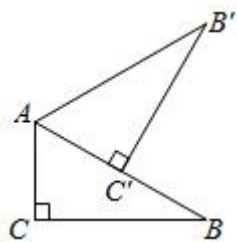
11. 光线在不同介质中传播速度不同，从一种介质射向另一种介质时会发生折射. 如图，水面 AB 与水杯下沿 CD 平行，光线 EF 从水中射向空气时发生折射，光线变成 FH ，点 G 在射线 EF 上，已知 $\angle HFB = 20^\circ$ ， $\angle FED = 45^\circ$ ，则 $\angle GFH$ 的度数为 _____.



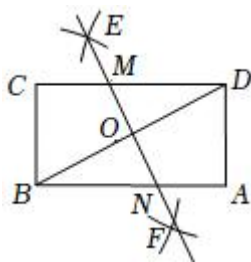
12. 北京冬奥会开幕式的巨型雪花状主火炬塔的设计，体现了环保低碳理念. 如图所示，它的主体形状呈正六边形. 若点 A, F, B, D, C, E 是正六边形的六个顶点，则 $\tan \angle ABE =$ _____.



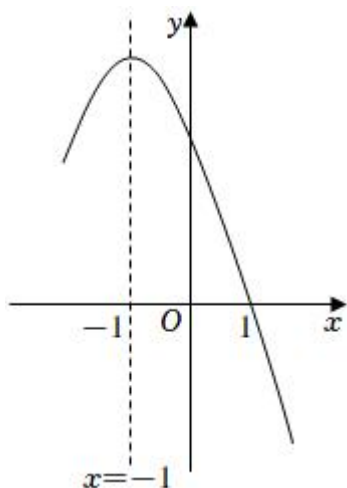
13. 《九章算术》是人类科学史上应用数学的“算经之首”，其书中卷八方程[七]中记载：“今有牛五、羊二，直金十两. 牛二、羊五，直金八两. 牛、羊各直金几何？”题目大意是：“5 头牛、2 只羊共值金 10 两. 2 头牛、5 只羊共值金 8 两，每头牛、每只羊各值金多少两？”根据题意，可求得 1 头牛和 1 只羊共值金两.
14. 在活动课上，“雄鹰组”用含 30° 角的直角三角尺设计风车. 如图， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 2$ ，将直角三角尺绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle AB'C'$ ，使点 C' 落在 AB 边上，以此方法做下去……则 B 点通过一次旋转至 B' 所经过的路径长为 _____. (结果保留 π)



15. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 按以下步骤作图: ①分别以点 B 和 D 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径作弧, 两弧相交于点 E 和 F ; ②作直线 EF 分别与 DC , DB , AB 交于点 M , O , N . 若 $DM=5$, $CM=3$, 则 MN = _____.



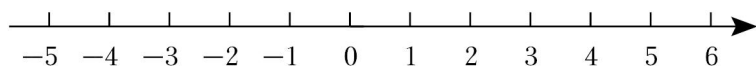
16. 小明在学习“二次函数”内容后, 进行了反思总结. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象的一部分与 x 轴的一个交点坐标为 $(1, 0)$, 对称轴为直线 $x = -1$, 结合图象他得出下列结论: ① $ab > 0$ 且 $c > 0$; ② $a + b + c = 0$; ③关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根分别为 -3 和 1 ; ④若点 $(-4, y_1)$, $(-2, y_2)$, $(3, y_3)$ 均在二次函数图象上, 则 $y_1 < y_2 < y_3$; ⑤ $3a + c < 0$, 其中正确的结论有 _____. (填序号, 多选、少选、错选都不得分)



三、解答题: 本大共 8 小题, 满分 72 分, 解答时, 写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (7 分) 在下面给出的三个不等式中, 请你任选两个组成一个不等式组, 解这个不等式组, 并把解集表示在数轴上.

① $2x - 1 < 7$; ② $5x - 2 > 3(x + 1)$; ③ $\frac{4}{3}x + 3 \geq 1 - \frac{2}{3}x$.



18. (7分) 先化简, 再求值: $(\frac{x}{x-2} - 1) \div \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$, 其中 $x = -4$.

19. (8分) 每年的6月6日为“全国爱眼日”. 某初中学校为了解本校学生视力健康状况, 组织数学兴趣小组按下列步骤来开展统计活动.

一、确定调查对象

(1) 有以下三种调查方案:

方案一: 从七年级抽取 140 名学生, 进行视力状况调查;

方案二: 从七年级、八年级中各随机抽取 140 名生, 进行视力状况调查;

方案三: 从全校 1600 名学生中随机抽取 600 名学生, 进行视力状况调查.

其中最具有代表性和广泛性的抽样调查方案是 _____;

二、收集整理数据

按照国家视力健康标准, 学生视力状况分为 A , B , C , D 四个类别. 数学兴趣小组随机抽取本校部分学生进行调查, 绘制成如图一幅不完整的统计图.

抽取的学生视力状况统计表

类别	A	B	C	D
视力	视力 ≥ 5.0	4.9	$4.6 \leq \text{视力} \leq 4.8$	视力 ≤ 4.5
健康状况	视力正常	轻度视力不良	中度视力不良	重度视力不良
人数	160	m	n	56

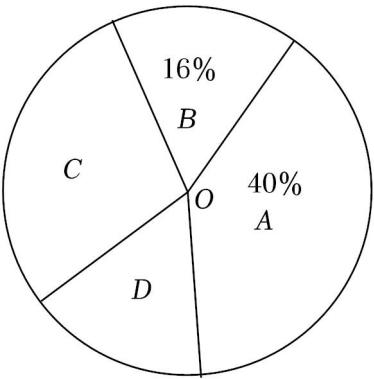
三、分析数据, 解决问题

(2) 调查视力数据的中位数所在类别为 _____ 类;

(3) 该校共有学生 1600 人, 请估算该校学生中, 中度视力不良和重度视力不良的总人数;

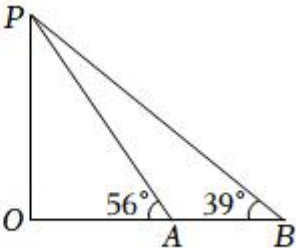
(4) 为更好保护视力, 结合上述统计数据分析, 请你提出一条合理化的建议.

抽取的学生视力状况统计图



20. (8分) 为传承运河文明, 弘扬民族精神, 枣庄市政府重建了台儿庄古城. 某校“综合与实践”小组开展了测量台儿庄古城城门楼 (如图①) 高度的实践活动, 请你帮他们完成下面的实践报告.

测量台儿庄古城城门楼高度的实践报告

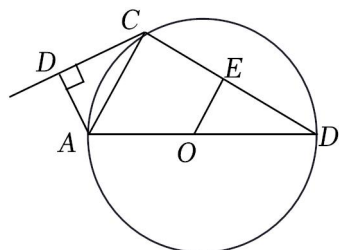
活 动 课 题	测量台儿庄古城城门楼高度		
活 动 目 的	运用三角函数知识解决实际问题		
活 动 工 具	测角仪、皮尺等测量工具		
方 案 示 意图	 图①  图②	测量步骤	如图② (1) 利用测角仪站在 B 处测得城门楼最高点 P 的仰角为 39°; (2) 前进了 10 米到达 A 处 (选择测点 A, B 与 O 在同一水平线上, A, B 两点之间的距离可直接测得, 测角仪高度忽略不计), 在 A 处测得 P 点的仰角为 56°.
参 考 数	$\sin 39^\circ \approx 0.6, \cos 39^\circ \approx 0.8, \tan 39^\circ \approx 0.8, \sin 56^\circ \approx 0.8, \cos 56^\circ \approx 0.6, \tan 56^\circ \approx 1.5.$		

据	
计 算 城 门 楼 PO 的 高 度 (结 果 保 留 整 数)	

21. (8分) 如图, 在半径为 10cm 的 $\odot O$ 中, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是过 $\odot O$ 上一点 C 的直线, 且 $AD \perp DC$ 于点 D , AC 平分 $\angle BAD$, 点 E 是 BC 的中点, $OE = 6\text{cm}$.

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 求 AD 的长.



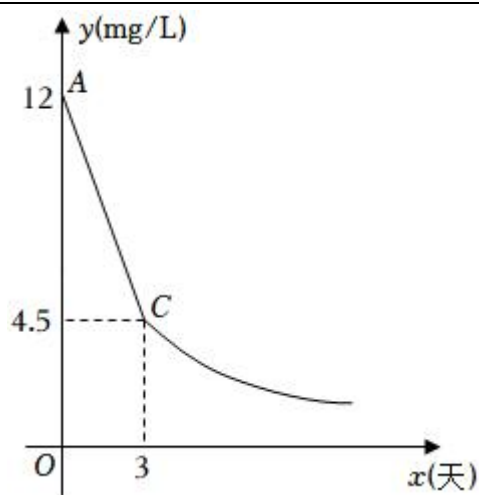
22. (10分) 为加强生态文明建设, 某市环保局对一企业排污情况进行检测, 结果显示: 所排污水中硫化物的浓度超标, 即硫化物的浓度超过最高允许的 1.0mg/L . 环保局要求该企业立即整改, 在 15 天内 (含 15 天) 排污达标. 整改过程中, 所排污水中硫化物的浓度 y (mg/L) 与时间 x (天) 的变化规律如图所示, 其中线段 AC 表示前 3 天的变化规律, 第 3 天时硫化物的浓度降为 4.5mg/L . 从第 3 天起, 所排污水中硫化物的浓度 y 与时间 x 满足下面表格中的关系:

时间 x (天)	3	5	6	9	
硫化物的浓度 y (mg/L)	4.5	2.7	2.25	1.5	

(1) 在整改过程中, 当 $0 \leq x < 3$ 时, 硫化物的浓度 y 与时间 x 的函数表达式;

(2) 在整改过程中, 当 $x \geq 3$ 时, 硫化物的浓度 y 与时间 x 的函数表达式;

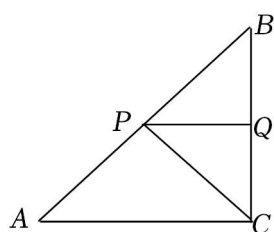
(3) 该企业所排污水中硫化物的浓度能否在 15 天以内不超过最高允许的 1.0mg/L ? 为什么?



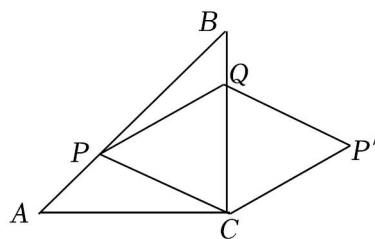
23. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 4\text{cm}$, 点 P 从点 A 出发, 沿 AB 方向以每秒 $\sqrt{2}\text{cm}$ 的速度向终点 B 运动, 同时动点 Q 从点 B 出发沿 BC 方向以每秒 1cm 的速度向终点 C 运动, 设运动的时间为 t 秒.

(1) 如图①, 若 $PQ \perp BC$, 求 t 的值;

(2) 如图②, 将 $\triangle PQC$ 沿 BC 翻折至 $\triangle P'QC$, 当 t 为何值时, 四边形 $QPCP'$ 为菱形?



图①



图②

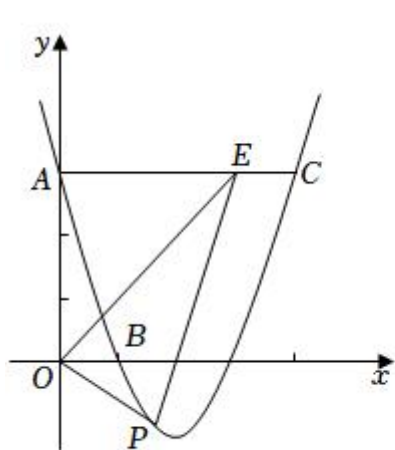
24. (12 分) 如图①, 已知抛物线 $L: y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(0, 3)$, $B(1, 0)$, 过点 A 作 $AC \parallel x$ 轴交抛物线于点 C , $\angle AOB$ 的平分线交线段 AC 于点 E , 点 P 是抛物线上的一个动点.

(1) 求抛物线的关系式;

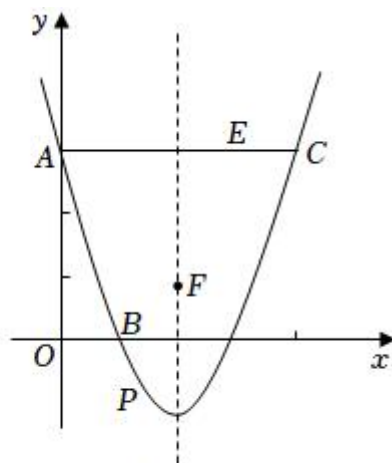
(2) 若动点 P 在直线 OE 下方的抛物线上, 连结 PE 、 PO , 当 $\triangle OPE$ 面积最大时, 求出 P 点坐标;

(3) 将抛物线 L 向上平移 h 个单位长度, 使平移后所得抛物线的顶点落在 $\triangle OAE$ 内 (包括 $\triangle OAE$ 的边界), 求 h 的取值范围;

(4) 如图②, F 是抛物线的对称轴 l 上的一点, 在抛物线上是否存在点 P , 使 $\triangle POF$ 成为以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在, 直接写出所有符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



图①



图②

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的.

1. 实数 -2023 的绝对值是 ()

- A. 2023 B. -2023 C. $\frac{1}{2023}$ D. $-\frac{1}{2023}$

【分析】利用绝对值的意义求解.

【解答】解：因为负数的绝对值等于它的相反数；

所以， -2023 的绝对值等于 2023.

故选：A.

【点评】本题考查绝对值的含义. 即：正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数.

2. 下列运算正确的是 ()

- A. $3a^2 - a^2 = 3$ B. $a^3 \div a^2 = a$
C. $(-3ab^2)^2 = -6a^2b^4$ D. $(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$

【分析】根据合并同类项法则，积的乘方、幂的乘方法则及单项式除法法则、完全平方公式逐项判断.

【解答】解：A、 $3a^2 - a^2 = 2a^2$ ，故 A 错误，不符合题意；

B、 $a^3 \div a^2 = a$ ，故 B 正确，符合题意；

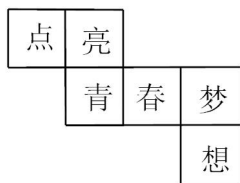
C、 $(-3a^3b)^2 = 9a^6b^2$ ，故 C 错误，不符合题意；

D、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故 D 不正确，不符合题意；

故选：B.

【点评】本题考查整式的运算，解题的关键是掌握整式相关运算的法则.

3. 某正方体的每个面上都有一个汉字，如图是它的一种展开图，那么在原正方体中，与“亮”字所在面相对的面上的汉字是 ()



- A. 青 B. 春 C. 梦 D. 想

【分析】根据正方体的表面展开图找相对面的方法，“Z”字两端是对面，判断即可.

【解答】解：在原正方体中，与“亮”字所在面相对的面上的汉字是：想，

故选：D.

【点评】本题考查了正方体相对两个面上的文字，熟练掌握根据正方体的表面展开图找相对面的方法是解题的关键.

4. 剪纸文化是中国最古老的民间艺术之一, 下列剪纸图案中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【分析】根据中心对称图形与轴对称图形的概念进行判断即可.

【解答】解: A. 不是中心对称图形, 是轴对称图形, 故此选项不合题意;

B. 不是中心对称图形, 是轴对称图形, 故此选项不合题意;

C. 是中心对称图形, 不是轴对称图形, 故此选项不合题意;

D. 既是轴对称图形又是中心对称图形, 故此选项符合题意;

故选: D.

【点评】本题考查的是中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合, 中心对称图形是要寻找对称中心, 旋转 180 度后与自身重合.

5. 2022 年 5 月, 神舟十三号搭载的 1.2 万粒作物种子顺利出舱. 其中 1.2 万用科学记数法表示为 ()



- A. 12×10^3 B. 1.2×10^4 C. 0.12×10^5 D. 1.2×10^6

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数, 当原数绝对值 < 1 时, n 是负整数.

【解答】解: 1.2 万 = 12000 = 1.2×10^4 .

故选: B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

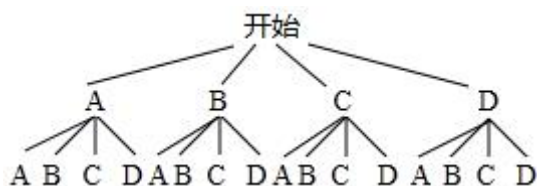
6. 在践行“安全在我心中, 你我一起行动”主题手抄报评比活动中, 共设置“交通安全、消防安全、饮食

安全、防疫安全”四个主题内容，推荐两名学生参加评比，若他们每人从以上四个主题内容中随机选取一个，则两人恰好选中同一主题的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

【分析】画树状图，共有 16 种等可能的结果，两人恰好选中同一主题的结果有 4 种，再由概率公式求解即可.

【解答】解：画树状图如图：



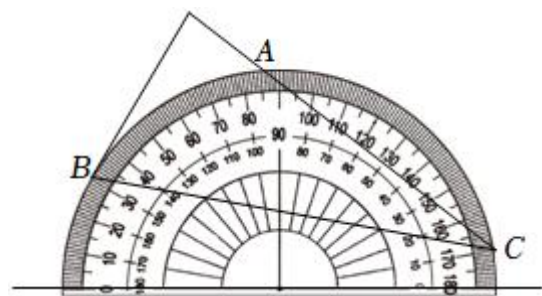
共有 16 种等可能的结果，两人恰好选中同一主题的结果有 4 种，

则两人恰好选中同一主题的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

故选：D.

【点评】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件. 用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比.

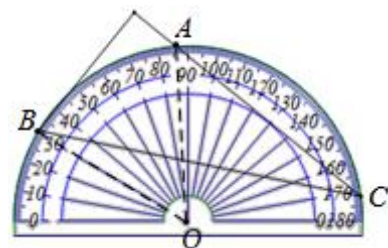
7. 将量角器按如图所示的方式放置在三角形纸板上，使点 C 在半圆上. 点 A, B 的读数分别为 86° , 30° , 则 $\angle ACB$ 的度数是（ ）



- A. 28° B. 30° C. 36° D. 56°

【分析】连接 OA, OB, 利用圆周角定理求解即可.

【解答】解：题意，连接 OA, OB.



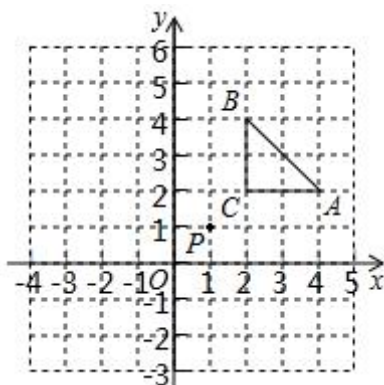
由题意， $\angle AOB = 86^\circ - 30^\circ = 56^\circ$,

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 28^\circ$,

故选: A.

【点评】 本题考查圆周角定理, 解题的关键是理解题意, 掌握圆周角定理解决问题.

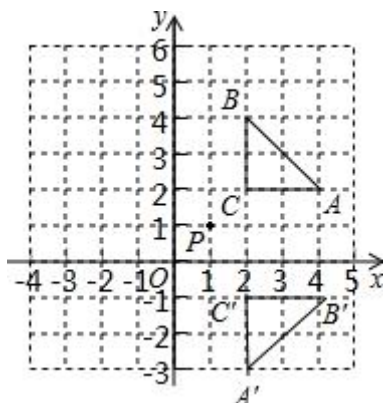
8. 如图, 将 $\triangle ABC$ 先向右平移 1 个单位, 再绕点 P 按顺时针方向旋转 90° , 得到 $\triangle A'B'C'$, 则点 B 的对应点 B' 的坐标是 ()



- A. (4, 0) B. (2, -2) C. (4, -1) D. (2, -3)

【分析】 作出旋转后的图形即可得出结论.

【解答】 解: 作出旋转后的图形如下:



$\therefore B$ 点的坐标为 (4, -1),

故选: C.

【点评】 本题主要考查图形的平移和旋转, 熟练掌握图形的平移和旋转是解题的关键.

9. 已知 y_1 和 y_2 均是以 x 为自变量的函数, 当 $x=n$ 时, 函数值分别是 N_1 和 N_2 , 若存在实数 n , 使得 $N_1+N_2=1$, 则称函数 y_1 和 y_2 是“和谐函数”. 则下列函数 y_1 和 y_2 不是“和谐函数”的是 ()

- A. $y_1 = x^2+2x$ 和 $y_2 = -x+1$ B. $y_1 = \frac{1}{x}$ 和 $y_2 = x+1$
 C. $y_1 = -\frac{1}{x}$ 和 $y_2 = -x-1$ D. $y_1 = x^2+2x$ 和 $y_2 = -x-1$

【分析】 根据题意, 令 $y_1+y_2=0$, 若方程有解, 则称函数 y_1 和 y_2 是“和谐函数”, 若无解, 则称函数 y_1 和 y_2 不是“和谐函数”

【解答】 解: A、令 $y_1+y_2=1$,

则 $x^2+2x-x+1=1$,

整理得: $x^2+x=0$,

解得: $x_1=0$, $x_2=-1$,

$\therefore$ 函数 y_1 和 y_2 是“和谐函数”, 故 A 不符合题意;

B、令 $y_1+y_2=1$,

则 $\frac{1}{x}+x+1=1$,

整理得: $x^2+1=0$,

此方程无解,

$\therefore$ 函数 y_1 和 y_2 不是“和谐函数”, 故 B 符合题意;

C、令 $y_1+y_2=1$,

则 $-\frac{1}{x}-x-1=1$,

整理得: $x^2+2x+1=0$,

解得: $x_1=-1$, $x_2=-1$,

$\therefore$ 函数 y_1 和 y_2 是“和谐函数”, 故 C 不符合题意;

D、令 $y_1+y_2=1$,

则 $x^2+2x-x-1=1$,

整理得: $x^2+x-2=0$,

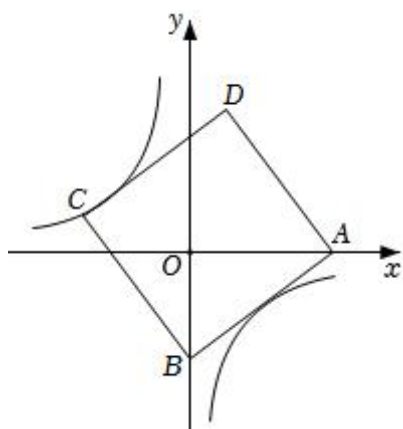
解得: $x_1=1$, $x_2=-2$,

$\therefore$ 函数 y_1 和 y_2 是“和谐函数”, 故 D 不符合题意;

故选: B.

【点评】 本题考查了解一元二次方程-公式法, 根据题意令 $y_1+y_2=1$, 然后进行计算是解题的关键.

10. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 5, 点 A 的坐标为 $(4, 0)$, 点 B 在 y 轴上, 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象过点 C , 则 k 的值为 ()



- A. 4 B. -4 C. -3 D. 3

【分析】过点 C 作 $CE \perp y$ 轴于 E ，根据正方形的性质可得 $AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，再根据同角的余角相等求出 $\angle OAB = \angle CBE$ ，然后利用“角角边”证明 $\triangle ABO$ 和 $\triangle BCE$ 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $OA = BE = 4$ ， $CE = OB = 3$ ，再求出 OE ，然后写出点 C 的坐标，再把点 C 的坐标代入反比例函数解析式计算即可求出 k 的值。

【解答】解：如图，过点 C 作 $CE \perp y$ 轴于 E ，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABO + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle CBE,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (4, 0),$$

$$\therefore OA = 4,$$

$$\therefore AB = 5,$$

$$\therefore OB = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle OAB = \angle CBE \\ \angle AOB = \angle BEC, \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle BCE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OA = BE = 4, \quad CE = OB = 3,$$

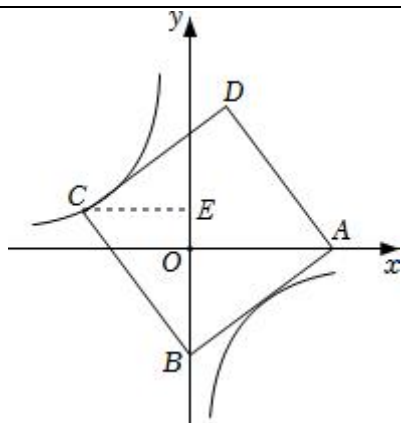
$$\therefore OE = BE - OB = 4 - 3 = 1,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (-3, 1),$$

$$\therefore \text{反比例函数 } y = \frac{k}{x} \text{ (} k \neq 0 \text{) 的图象过点 } C,$$

$$\therefore k = xy = -3 \times 1 = -3,$$

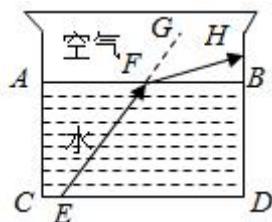
故选：C.



【点评】此题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，涉及到正方形的性质，全等三角形的判定与性质，反比例函数图象上的点的坐标特征，作辅助线构造出全等三角形并求出点 D 的坐标是解题的关键。

二、填空题：本大题共 6 小题，满分 18 分，只填写最后结果，每小题填对得 3 分。

11. 光线在不同介质中传播速度不同，从一种介质射向另一种介质时会发生折射．如图，水面 AB 与水杯下沿 CD 平行，光线 EF 从水中射向空气时发生折射，光线变成 FH ，点 G 在射线 EF 上，已知 $\angle HFB = 20^\circ$ ， $\angle FED = 45^\circ$ ，则 $\angle GFH$ 的度数为 25° ．



【分析】根据平行线的性质知 $\angle GFB = \angle FED = 45^\circ$ ，结合图形求得 $\angle GFH$ 的度数．

【解答】解： $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle GFB = \angle FED = 45^\circ .$$

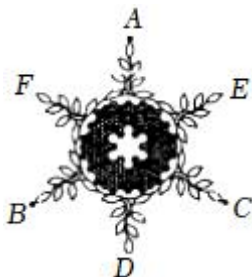
$$\because \angle HFB = 20^\circ ,$$

$$\therefore \angle GFH = \angle GFB - \angle HFB = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ .$$

故答案为： 25° ．

【点评】本题考查的是平行线的性质，用到的知识点为：两直线平行，同位角相等．

12. 北京冬奥会开幕式的巨型雪花状主火炬塔的设计，体现了环保低碳理念．如图所示，它的主体形状呈正六边形．若点 A, F, B, D, C, E 是正六边形的六个顶点，则 $\tan \angle ABE = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ．



【分析】由正六边形的性质得 $AB=BC=AC$, BE 垂直平分 AC , 再由等边三角形的在得 $\angle ABC=60^\circ$, 则 $\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=30^\circ$, 即可得出结论.

【解答】解: 连接 BC 、 AC ,

$\therefore$ 点 A , F , B , D , C , E 是正六边形的六个顶点,

$\therefore AB=BC=AC$, BE 垂直平分 AC ,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

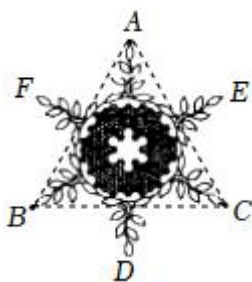
$\therefore \angle ABC=60^\circ$,

$\therefore BE \perp AC$,

$\therefore \angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=30^\circ$,

$\therefore \tan \angle ABE = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



【点评】本题考查了正六边形的性质、等边三角形的判定与性质以及特殊角的锐角三角函数, 熟练掌握正六边形的性质和等边三角形的性质是解题的关键.

13. 《九章算术》是人类科学史上应用数学的“算经之首”, 其书中卷八方程[七]中记载: “今有牛五、羊二, 直金十两. 牛二、羊五, 直金八两. 牛、羊各直金几何?” 题目大意是: “5 头牛、2 只羊共值金 10 两. 2 头牛、5 只羊共值金 8 两, 每头牛、每只羊各值金多少两?” 根据题意, 可求得 1 头牛和 1 只羊共值金 $\frac{18}{7}$ 两.

【分析】设每头牛 x 两, 每只羊 y 两, 根据 5 头牛、2 只羊共值金 10 两. 2 头牛、5 只羊共值金 8 两, 列二元一次方程组, 两方程相加可得 $7x+7y=18$, 进一步求解即可.

【解答】解: 设每头牛 x 两, 每只羊 y 两,

根据题意, 可得
$$\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$$
,

$\therefore 7x+7y=18$,

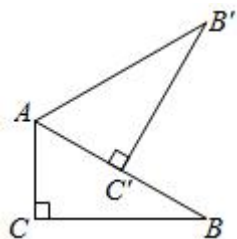
$\therefore x+y=\frac{18}{7}$,

$\therefore 1$ 头牛和 1 只羊共值金 $\frac{18}{7}$ 两,

故答案为: $\frac{18}{7}$.

【点评】 本题考查了二元一次方程组的应用, 根据题意建立二元一次方程组是解题的关键.

14. 在活动课上, “雄鹰组” 用含 30° 角的直角三角尺设计风车. 如图, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 2$, 将直角三角尺绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle AB'C'$, 使点 C' 落在 AB 边上, 以此方法做下去……则 B 点通过一次旋转至 B' 所经过的路径长为 $\frac{4\pi}{3}$. (结果保留 π)



【分析】 由含 30° 度直角三角形的性质求出 AB , 根据弧长公式即可求出结论.

【解答】 解: $\because \angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 2$,

$\therefore AB = 2AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$,

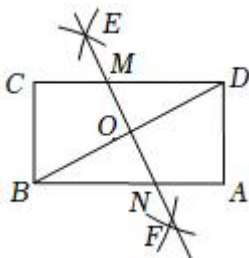
由旋转的性质得, $\angle BAB' = \angle BAC = 60^\circ$,

$\therefore B$ 点通过一次旋转至 B' 所经过的路径长为 $\frac{60\pi \cdot 4}{180} = \frac{4\pi}{3}$,

故答案为: $\frac{4\pi}{3}$.

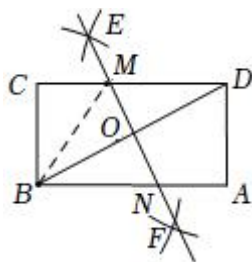
【点评】 本题主要考查了旋转的性质, 弧长公式, 含 30° 度直角三角形的性质, 熟记弧长公式是解决问题的关键.

15. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 按以下步骤作图: ①分别以点 B 和 D 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径作弧, 两弧相交于点 E 和 F ; ②作直线 EF 分别与 DC , DB , AB 交于点 M , O , N . 若 $DM = 5$, $CM = 3$, 则 $MN = 2\sqrt{5}$.



【分析】 如图, 连接 BM . 利用勾股定理求出 BC , BD , OM , 再证明 $OM = ON$, 可得结论.

【解答】 解: 如图, 连接 BM .



由作图可知 MN 垂直平分线段 BD ,

$$\therefore BM = DM = 5,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle C = 90^\circ, \quad CD \parallel AB,$$

$$\therefore BC = \sqrt{BM^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BD = \sqrt{CB^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore OB = OD = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \angle MOD = 90^\circ,$$

$$\therefore OM = \sqrt{DM^2 - OD^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle MDO = \angle NBO,$$

在 $\triangle MDO$ 和 $\triangle NBO$ 中,

$$\begin{cases} \angle MDO = \angle NBO \\ OD = OB \\ \angle MOD = \angle NOB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle MDO \cong \triangle NBO \quad (ASA),$$

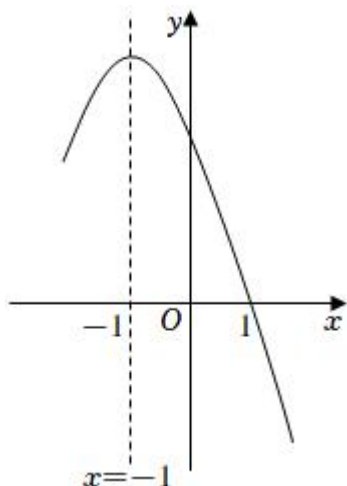
$$\therefore OM = ON = \sqrt{5},$$

$$\therefore MN = 2\sqrt{5}.$$

故答案为: $2\sqrt{5}$.

【点评】 本题考查了作图 - 基本作图、线段垂直平分线的性质、勾股定理、矩形的性质, 解决本题的关键是掌握线段垂直平分线的性质.

16. 小明在学习“二次函数”内容后, 进行了反思总结. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象的一部分与 x 轴的一个交点坐标为 $(1, 0)$, 对称轴为直线 $x = -1$, 结合图象他得出下列结论: ① $ab > 0$ 且 $c > 0$; ② $a + b + c = 0$; ③ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根分别为 -3 和 1 ; ④ 若点 $(-4, y_1)$, $(-2, y_2)$, $(3, y_3)$ 均在二次函数图象上, 则 $y_1 < y_2 < y_3$; ⑤ $3a + c < 0$, 其中正确的结论有 ①②③. (填序号, 多选、少选、错选都不得分)



【分析】由抛物线的对称轴的位置以及与 y 轴的交点可判断①；由抛物线过点 $(1, 0)$ ，即可判断②；由抛物线的对称性可判断③；根据各点与抛物线对称轴的距离大小可判断④；对称轴可得 $b = 2a$ ，由抛物线过点 $(1, 0)$ 可判断⑤.

【解答】解：∵ 抛物线对称轴在 y 轴的左侧，

$$\therefore ab > 0,$$

∵ 抛物线与 y 轴交点在 x 轴上方，

∴ $c > 0$ ，①正确；

∵ 抛物线经过 $(1, 0)$ ，

$$\therefore a + b + c = 0, \text{ ②正确.}$$

∵ 抛物线与 x 轴的一个交点坐标为 $(1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ，

∴ 另一个交点为 $(-3, 0)$ ，

∴ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根分别为 -3 和 1 ，③正确；

∵ $-1 - (-2) < -1 - (-4) < 3 - (-1)$ ，抛物线开口向下，

∴ $y_2 > y_1 > y_3$ ，④错误.

∵ 抛物线与 x 轴的一个交点坐标为 $(1, 0)$ ，

$$\therefore a + b + c = 0,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a,$$

$$\therefore 3a + c = 0, \text{ ⑤错误.}$$

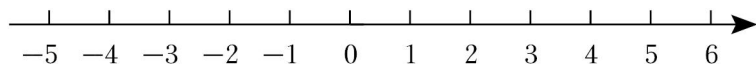
故答案为：①②③.

【点评】本题考查二次函数图象与系数的关系，解题关键是掌握二次函数的性质，掌握二次函数与方程及不等式的关系.

三、解答题：本大共 8 小题，满分 72 分，解答时，写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (7 分) 在下面给出的三个不等式中，请你任选两个组成一个不等式组，解这个不等式组，并把解集表示在数轴上.

$$\textcircled{1} 2x - 1 < 7; \textcircled{2} 5x - 2 > 3(x + 1); \textcircled{3} \frac{4}{3}x + 3 \geq 1 - \frac{2}{3}x.$$



【分析】选出两个不等式，组成不等式组，并解不等式组即可.

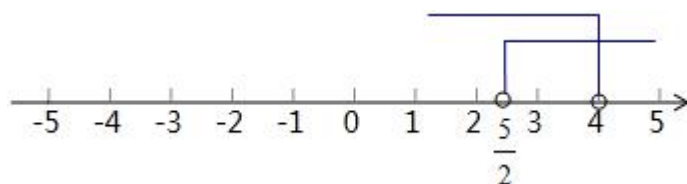
【解答】解：
$$\begin{cases} 2x - 1 < 7 \textcircled{1} \\ 5x - 2 > 3(x + 1) \textcircled{2} \end{cases}$$

解不等式①得： $x < 4$,

解不等式②得： $x > \frac{5}{2}$,

$\therefore$ 不等式组的解集 $\frac{5}{2} < x < 4$.

把解集表示在数轴上如下：



【点评】本题考查一元一次不等式组的解法，能熟练地解不等式组是解题关键.

18. (7 分) 先化简，再求值： $(\frac{x}{x-2} - 1) \div \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$ ，其中 $x = -4$.

【分析】根据分式的加减运算以及乘除运算法则进行化简，然后将 x 的值代入原式即可求出答案.

【解答】解：原式 $= \frac{x - (x - 2)}{x - 2} \cdot \frac{(x - 2)^2}{(x + 2)(x - 2)}$

$$= \frac{2}{x - 2} \cdot \frac{x - 2}{x + 2}$$

$$= \frac{2}{x + 2},$$

当 $x = -4$ 时，

$$\text{原式} = \frac{2}{-4 + 2}$$

$$= -1.$$

【点评】本题考查分式的化简求值，解题的关键是熟练运用分式的加减运算以及乘除运算，本题属于基础题型.

19. (8分) 每年的6月6日为“全国爱眼日”. 某初中学校为了解本校学生视力健康状况, 组织数学兴趣小组按下列步骤来开展统计活动.

一、确定调查对象

(1) 有以下三种调查方案:

方案一: 从七年级抽取 140 名学生, 进行视力状况调查;

方案二: 从七年级、八年级中各随机抽取 140 名生, 进行视力状况调查;

方案三: 从全校 1600 名学生中随机抽取 600 名学生, 进行视力状况调查.

其中最具有代表性和广泛性的抽样调查方案是 方案三;

二、收集整理数据

按照国家视力健康标准, 学生视力状况分为 A , B , C , D 四个类别. 数学兴趣小组随机抽取本校部分学生进行调查, 绘制成如图一幅不完整的统计图.

抽取的学生视力状况统计表

类别	A	B	C	D
视力	视力 ≥ 5.0	4.9	$4.6 \leq \text{视力} \leq 4.8$	视力 ≤ 4.5
健康状况	视力正常	轻度视力不良	中度视力不良	重度视力不良
人数	160	m	n	56

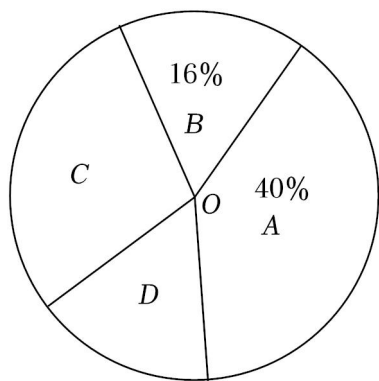
三、分析数据, 解决问题

(2) 调查视力数据的中位数所在类别为 B 类;

(3) 该校共有学生 1600 人, 请估算该校学生中, 中度视力不良和重度视力不良的总人数;

(4) 为更好保护视力, 结合上述统计数据分析, 请你提出一条合理化的建议.

抽取的学生视力状况统计图



【分析】 (1) 根据抽样的代表性、普遍性和可操作性可知, 方案三符合题意;

(2) 根据中位数的定义解答即可;

(3) 利用样本估计总体即可;

(4) 根据数据提出一条建议即可.

【解答】解: (1) 根据抽样的代表性、普遍性和可操作性可得, 方案三: 从全校 1600 名学生中随机抽取 600 名学生, 进行视力状况调查, 作为样本进行调查分析, 是最符合题意的.

故答案为: 方案三;

(2) 由题意可得, 调查视力数据的中位数所在类别为 B 类;

故答案为: B ;

(3) 调查的总人数为: $160 \div 40\% = 400$ (人),

由题意可知, $m = 400 \times 16\% = 64$ (人),

$n = 400 - 64 - 56 = 120$ (人),

$1600 \times \frac{55+120}{400} = 704$ (人),

所以该校学生中, 中度视力不良和重度视力不良的总人数约为 704 人;

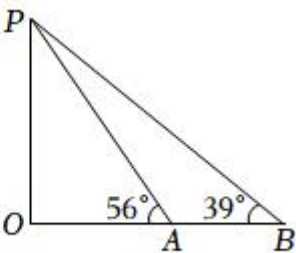
(4) 该校学生近视程度为中度及以上占 44%, 说明该校学生近视程度较为严重, 建议学校加强电子产品进校园及使用的管控 (答案不唯一).

【点评】 本题考查扇形统计图、统计表、中位数以及用样本估计总体等知识, 关键是从扇形统计图和统计表中找出相应的数据.

20. (8 分) 为传承运河文明, 弘扬民族精神, 枣庄市政府重建了台儿庄古城. 某校“综合与实践”小组开展了测量台儿庄古城城门楼 (如图①) 高度的实践活动, 请你帮他们完成下面的实践报告.

测量台儿庄古城城门楼高度的实践报告

活 动 课 题	测量台儿庄古城城门楼高度
活 动 目 的	运用三角函数知识解决实际问题
活 动 工 具	测角仪、皮尺等测量工具

方案示意图	  图① 图②	测量步骤	如图② (1) 利用测角仪站在 B 处测得城门楼最高点 P 的仰角为 39°; (2) 前进了 10 米到达 A 处 (选择测点 A, B 与 O 在同一水平线上, A, B 两点之间的距离可直接测得, 测角仪高度忽略不计), 在 A 处测得 P 点的仰角为 56°.
参考数据	$\sin 39^\circ \approx 0.6, \cos 39^\circ \approx 0.8, \tan 39^\circ \approx 0.8, \sin 56^\circ \approx 0.8, \cos 56^\circ \approx 0.6, \tan 56^\circ \approx 1.5.$		
计算城门楼 PO 的高度 (结果保留整数)			

【分析】 设 $OA = x$ 米, 则 $OB = (x+10)$ 米, 由锐角三角函数定义得 $OP \approx 1.5x$ (米), $OP \approx 0.8(x+10)$ (米), 则 $1.5x = 0.8(x+10)$, 解得 $x = \frac{80}{7}$, 即可解决问题.

【解答】 解: 设 $OA = x$ 米, 则 $OB = (x+10)$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle AOP$ 中, $\tan \angle OAP = \frac{OP}{OA} = \tan 56^\circ \approx 1.5$,

$\therefore OP \approx 1.5OA = 1.5x$ (米),

在 $\text{Rt}\triangle BOP$ 中, $\tan \angle OBP = \frac{OP}{OB} = \tan 39^\circ \approx 0.8$,

$\therefore OP \approx 0.8OB = 0.8(x+10)$ (米),

$\therefore 1.5x = 0.8(x+10)$,

解得: $x = \frac{80}{7}$,

$$\therefore OP \approx 1.5x = 1.5 \times \frac{80}{7} \approx 17 \text{ (米)},$$

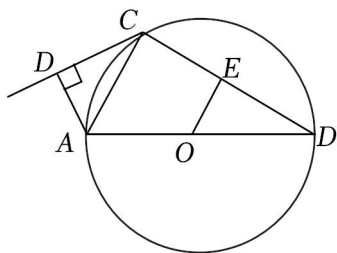
答: 台儿庄古城城门楼的高度约为 17 米.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用—仰角俯角问题, 熟练掌握锐角三角函数定义是解题的关键.

21. (8 分) 如图, 在半径为 10cm 的 $\odot O$ 中, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是过 $\odot O$ 上一点 C 的直线, 且 $AD \perp DC$ 于点 D , AC 平分 $\angle BAD$, 点 E 是 BC 的中点, $OE = 6\text{cm}$.

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

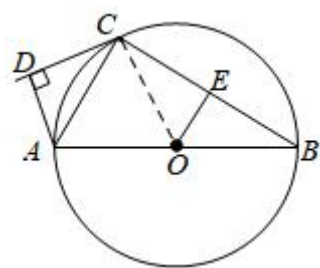
(2) 求 AD 的长.



【分析】 (1) 连接 OC , 由 AC 平分 $\angle BAD$, $OA = OC$, 可得 $\angle DAC = \angle OCA$, $AD \parallel OC$, 根据 $AD \perp DC$, 即可证明 CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 由 OE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 得 $AC = 12$, 再证明 $\triangle DAC \sim \triangle CAB$, 根据相似三角形的性质即可得到结论.

【解答】 (1) 证明: 连接 OC , 如图:



$$\because AC \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle CAO,$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle OCA,$$

$$\therefore AD \parallel OC,$$

$$\because AD \perp DC,$$

$$\therefore CO \perp DC,$$

$$\because OC \text{ 是 } \odot O \text{ 的半径},$$

$$\therefore CD \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

(2) 解: $\because E$ 是 BC 的中点, 且 $OA = OB$,

$\therefore OE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $AC = 2OE$,

$\therefore OE = 6\text{cm}$,

$\therefore AC = 12\text{cm}$,

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ = \angle ADC$,

又 $\angle DAC = \angle CAB$,

$\therefore \triangle DAC \sim \triangle CAB$,

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$, 即 $\frac{AD}{12} = \frac{12}{20}$,

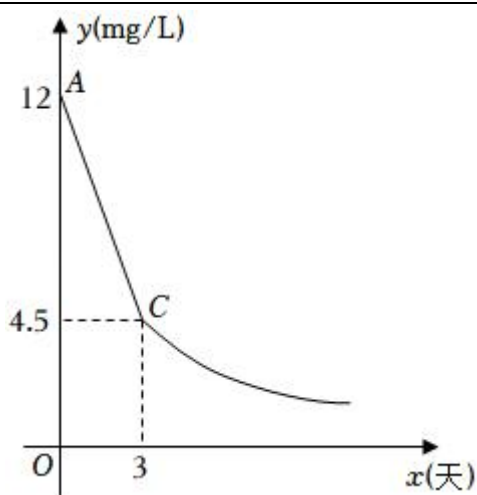
$\therefore AD = \frac{36}{5}$.

【点评】 本题考查圆的切线及圆中的计算, 涉及圆周角定理、相似三角形的判定及性质等知识, 解题的关键是熟练应用圆的相关性质, 转化圆中的角和线段.

22. (10 分) 为加强生态文明建设, 某市环保局对一企业排污情况进行检测, 结果显示: 所排污水中硫化物的浓度超标, 即硫化物的浓度超过最高允许的 1.0mg/L . 环保局要求该企业立即整改, 在 15 天内 (含 15 天) 排污达标. 整改过程中, 所排污水中硫化物的浓度 y (mg/L) 与时间 x (天) 的变化规律如图所示, 其中线段 AC 表示前 3 天的变化规律, 第 3 天时硫化物的浓度降为 4.5mg/L . 从第 3 天起, 所排污水中硫化物的浓度 y 与时间 x 满足下面表格中的关系:

时间 x (天)	3	5	6	9	
硫化物的浓度 y (mg/L)	4.5	2.7	2.25	1.5	

- (1) 在整改过程中, 当 $0 \leq x < 3$ 时, 硫化物的浓度 y 与时间 x 的函数表达式;
- (2) 在整改过程中, 当 $x \geq 3$ 时, 硫化物的浓度 y 与时间 x 的函数表达式;
- (3) 该企业所排污水中硫化物的浓度能否在 15 天以内不超过最高允许的 1.0mg/L ? 为什么?



【分析】(1) 设 AC 的函数关系式为: $y = kx + b$, 将 A 和 C 代入, 从而求得 k , b , 进而求得的结果;

(2) 可推出 $x \cdot y = 13.5$ 为定值, 所以当 $x \geq 3$ 时, y 是 x 的反比例函数, 进而求得结果;

(3) 将 $x = 15$ 代入反比例函数关系式, 从而求得 y 的值, 进而根据反比例函数图象性质, 从而得出结论.

【解答】解: (1) 设线段 AC 的函数表达式为: $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} b = 12 \\ 3k + b = 4.5 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b = 12 \\ k = -2.5 \end{cases},$$

$\therefore$ 线段 AC 的函数表达式为: $y = -2.5x + 12$ ($0 \leq x < 3$);

$$(2) \because 3 \times 4.5 = 5 \times 2.7 = \dots = 13.5,$$

$\therefore y$ 是 x 的反比例函数,

$$\therefore y = \frac{13.5}{x} \quad (x \geq 3);$$

$$(3) \text{ 当 } x = 15 \text{ 时, } y = \frac{13.5}{15} = 0.9,$$

$$\because 13.5 > 0,$$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

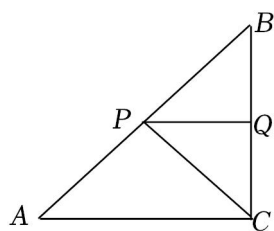
$\therefore$ 该企业所排污水中硫化物的浓度可以在 15 天以内不超过最高允许的 1.0 mg/L .

【点评】本题考查了求一次函数关系式, 反比例函数及其图象的性质等知识, 解决问题的关键是熟练掌握反比例函数及其图象性质.

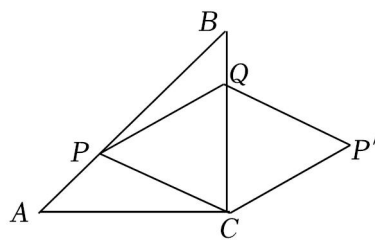
23. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 4 \text{ cm}$, 点 P 从点 A 出发, 沿 AB 方向以每秒 $\sqrt{2} \text{ cm}$ 的速度向终点 B 运动, 同时动点 Q 从点 B 出发沿 BC 方向以每秒 1 cm 的速度向终点 C 运动, 设运动的时间为 t 秒.

(1) 如图①, 若 $PQ \perp BC$, 求 t 的值;

(2) 如图②, 将 $\triangle PQC$ 沿 BC 翻折至 $\triangle P'QC$, 当 t 为何值时, 四边形 $QPCP'$ 为菱形?



图①



图②

【分析】(1) 根据勾股定理求出 AB ，根据相似三角形的性质列出比例式，计算即可.

(2) 作 $PD \perp BC$ 于 D ， $PE \perp AC$ 于 E ， $AP = \sqrt{2}t \text{ cm}$ ， $BQ = t \text{ cm}$ ($0 \leq t < 4$)，由 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，可得 $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ，则可判断 $\triangle APE$ 和 $\triangle PBD$ 为等腰直角三角形，得出 $PE = AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AP = t \text{ cm}$ ， $BD = PD$ ，则 $CE = AC - AE = (4 - t) \text{ cm}$ ，由矩形和菱形性质及勾股定理，即可求得答案.

【解答】解：(1) 如图①， $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4 \text{ cm}$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)},$$

由题意得， $AP = \sqrt{2}t \text{ cm}$ ， $BQ = t \text{ cm}$ ，

则 $BP = (4\sqrt{2} - \sqrt{2}t) \text{ cm}$ ，

$\because PQ \perp BC$ ，

$\therefore \angle PQB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PQB = \angle ACB$ ，

$\therefore PQ \parallel AC$ ，

$$\therefore \frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC},$$

$$\therefore \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}t}{4\sqrt{2}} = \frac{t}{4},$$

解得： $t = 2$ ，

$\therefore$ 当 $t = 2$ 时， $PQ \perp BC$.

(2) 作 $PD \perp BC$ 于 D ， $PE \perp AC$ 于 E ，如图②，

$$AP = \sqrt{2}t \text{ cm}, BQ = t \text{ cm} \quad (0 \leq t < 4),$$

$\because \angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4 \text{ cm}$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle APE$ 和 $\triangle PBD$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore PE = AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AP = t \text{ cm}, BD = PD,$$

$$\therefore CE = AC - AE = (4 - t) \text{ cm},$$

$\therefore$ 四边形 $PECD$ 为矩形,

$$\therefore PD = EC = (4 - t) \text{ cm},$$

$$\therefore BD = (4 - t) \text{ cm},$$

$$\therefore QD = BD - BQ = (4 - 2t) \text{ cm},$$

$$\text{在 Rt}\triangle PCE \text{ 中, } PC^2 = PE^2 + CE^2 = t^2 + (4 - t)^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PDQ \text{ 中, } PQ^2 = PD^2 + DQ^2 = (4 - t)^2 + (4 - 2t)^2,$$

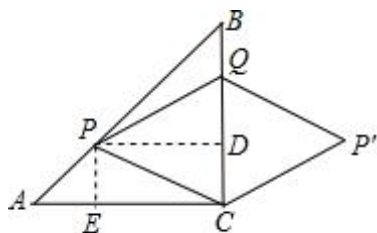
$\therefore$ 四边形 $QPCP'$ 为菱形,

$$\therefore PQ = PC,$$

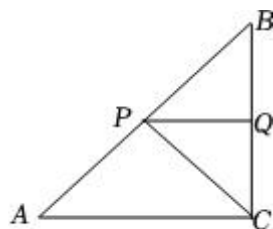
$$\therefore t^2 + (4 - t)^2 = (4 - t)^2 + (4 - 2t)^2,$$

$$\therefore t_1 = \frac{4}{3}, t_2 = 4 \text{ (舍去)}.$$

$\therefore$ 当 t 的值为 $\frac{4}{3}$ 时, 四边形 $QPCP'$ 为菱形.



图②



图①

【点评】 此题是相似形综合题, 主要考查的是菱形的性质、等腰直角三角形的性质, 线段垂直平分线的性质, 用方程的思想解决问题是解本题的关键.

24. (12 分) 如图①, 已知抛物线 $L: y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(0, 3)$, $B(1, 0)$, 过点 A 作 $AC \parallel x$ 轴交抛物线于点 C , $\angle AOB$ 的平分线交线段 AC 于点 E , 点 P 是抛物线上的一个动点.

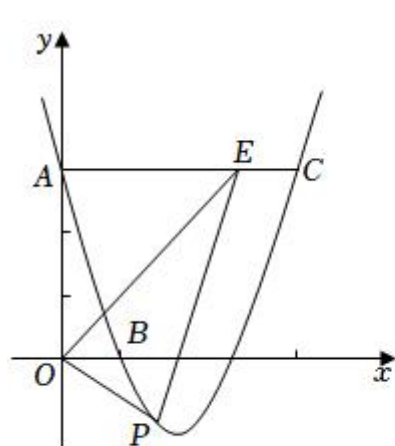
(1) 求抛物线的关系式;

(2) 若动点 P 在直线 OE 下方的抛物线上, 连结 PE 、 PO , 当 $\triangle OPE$ 面积最大时, 求出 P 点坐标;

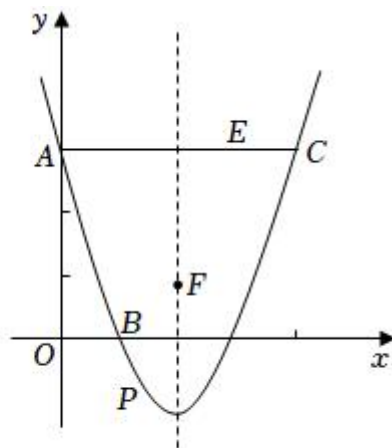
(3) 将抛物线 L 向上平移 h 个单位长度, 使平移后所得抛物线的顶点落在 $\triangle OAE$ 内 (包括 $\triangle OAE$ 的边界), 求 h 的取值范围;

(4) 如图②, F 是抛物线的对称轴 l 上的一点, 在抛物线上是否存在点 P , 使 $\triangle POF$ 成为以点 P 为直角

顶点的等腰直角三角形？若存在，直接写出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。



图①



图②

【分析】 (1) 利用待定系数法可得抛物线的解析式；

(2) 过 P 作 $PG \parallel y$ 轴，交 OE 于点 G ，设 $P(m, m^2 - 4m + 3)$ ，根据 OE 的解析式表示点 G 的坐标，表示 PG 的长，根据面积和可得 $\triangle OPE$ 的面积，利用二次函数的最值可得其最大值；

(3) 求出原抛物线的对称轴和顶点坐标以及对称轴与 OE 的交点坐标、与 AE 的交点坐标，用含 h 的代数式表示平移后的抛物线的顶点坐标，列出不等式组求出 h 的取值范围；

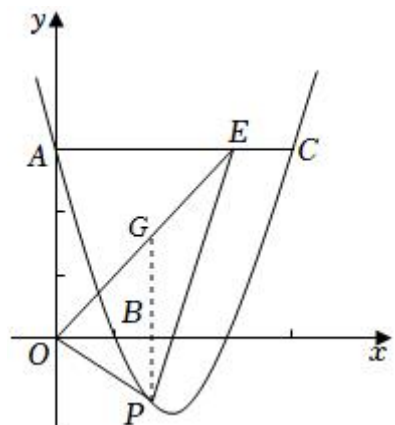
(4) 存在四种情况：作辅助线，构建全等三角形，证明 $\triangle OMP \cong \triangle PNF$ ，根据 $OM = PM$ ，列方程可得点 P 的坐标；同理可得其他图形中点 P 的坐标。

【解答】 解：(1) $\because$ 抛物线 $L: y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(0, 3)$ ， $B(1, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 1+b+c=0 \\ c=3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b=-4 \\ c=3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为： $y = x^2 - 4x + 3$ ；

(2) 如图，过 P 作 $PG \parallel y$ 轴，交 OE 于点 G ，



设 $P(m, m^2 - 4m + 3)$ ，

$\therefore OE$ 平分 $\angle AOB$, $\angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOE = 45^\circ$,

$\therefore \triangle AOE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AE = OA = 3$,

$\therefore E(3, 3)$,

$\therefore$ 直线 OE 的解析式为: $y = x$,

$\therefore G(m, m)$,

$\therefore PG = m - (m^2 - 4m + 3) = -m^2 + 5m - 3$,

$\therefore S_{\triangle OPE} = S_{\triangle OPG} + S_{\triangle EPG}$

$= \frac{1}{2} PG \cdot AE$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times (-m^2 + 5m - 3)$

$= -\frac{3}{2} (m^2 - 5m + 3)$

$= -\frac{3}{2} (m - \frac{5}{2})^2 + \frac{39}{8}$,

$\therefore -\frac{3}{2} < 0$,

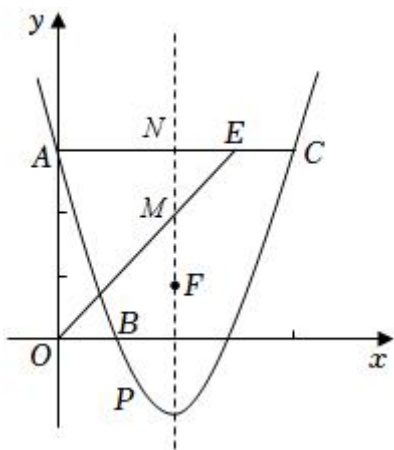
$\therefore$ 当 $m = \frac{5}{2}$ 时, $\triangle OPE$ 面积最大,

此时, P 点坐标为 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4})$;

(3) 由 $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$, 得抛物线 L 的对称轴为直线 $x = 2$, 顶点为 $(2, -1)$,

抛物线 L 向上平移 h 个单位长度后顶点为 $F(2, -1 + h)$.

设直线 $x = 2$ 交 OE 于点 M , 交 AE 于点 N , 则 $E(2, 3)$,



$\therefore$ 直线 OE 的解析式为: $y = x$,

$$\therefore M(2, 2),$$

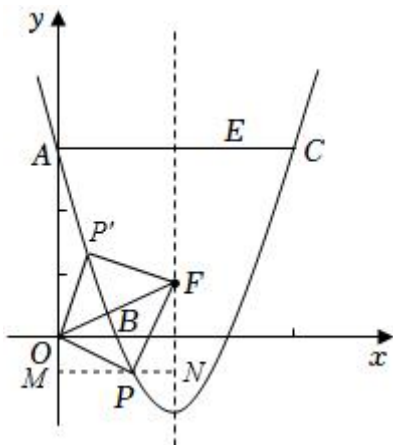
$\therefore$ 点 F 在 $\triangle OAE$ 内 (包括 $\triangle OAE$ 的边界),

$$\therefore 2 \leq -1+h \leq 3,$$

解得 $3 \leq h \leq 4$;

(4) 设 $P(m, m^2 - 4m + 3)$, 分四种情况:

① 当 P 在对称轴的左边, 且在 x 轴下方时, 如图, 过 P 作 $MN \perp y$ 轴, 交 y 轴于 M , 交 l 于 N ,



$$\therefore \angle OMP = \angle PNF = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle OPF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore OP = PF, \angle OPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OPM + \angle NPF = \angle PFN + \angle NPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OPM = \angle PFN,$$

$$\therefore \triangle OMP \cong \triangle PNF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OM = PN,$$

$$\therefore P(m, m^2 - 4m + 3),$$

$$\text{则 } -m^2 + 4m - 3 = 2 - m,$$

$$\text{解得: } m = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \text{ (舍) 或 } \frac{5-\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right);$$

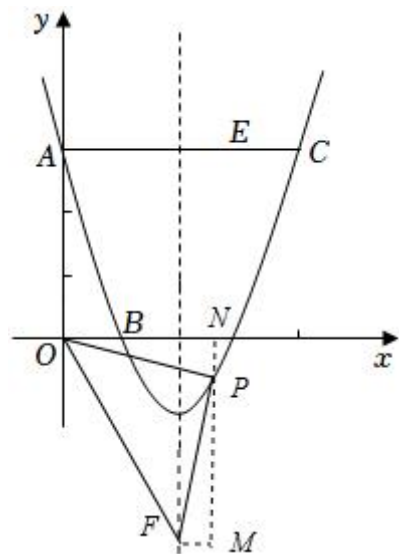
② 当 P 在对称轴的左边, 且在 x 轴上方时,

$$\text{同理得: } 2 - m = m^2 - 4m + 3,$$

$$\text{解得: } m_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ (舍) 或 } m_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right);$$

③当 P 在对称轴的右边, 且在 x 轴下方时,



如图, 过 P 作 $MN \perp x$ 轴于 N , 过 F 作 $FM \perp MN$ 于 M ,

同理得 $\triangle ONP \cong \triangle PMF$,

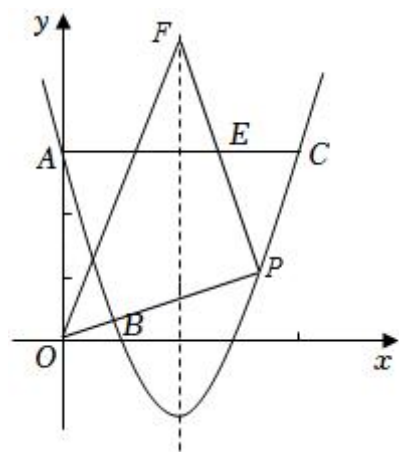
$\therefore PN = FM$,

则 $-m^2 + 4m - 3 = m - 2$,

解得: $m = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $m_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (舍);

P 的坐标为 $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$;

④当 P 在对称轴的右边, 且在 x 轴上方时, 如图,



同理得 $m^2 - 4m + 3 = m - 2$,

解得: $m = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ (舍),

P 的坐标为: $(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2})$;

综上所述, 点 P 的坐标是: $(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ 或 $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2})$ 或 $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ 或 $(\frac{5+\sqrt{5}}{2},$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}).$$

【点评】 本题属于二次函数综合题，主要考查了二次函数的综合应用，二次函数的图象与性质及图形的平移，全等三角形的判定与性质以及解一元二次方程的方法，运用分类讨论思想和方程的思想解决问题的关键.

