

2021 年山东省日照市中考数学试卷

一、选择题：本题共 12 个小题，每小题 3 分，满分 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将符合题目要求选项的字母代号填涂在答题卡相应位置上。

1. 在下列四个实数中，最大的实数是 ()

- A. -2 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】根据实数的大小比较方法进行比较即可.

【详解】解：∵正数大于 0，负数小于 0，正数大于负数，

$$\therefore \sqrt{2} > \frac{1}{2} > 0 > -2,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了实数的大小比较，理解“正数大于 0，负数小于 0，正数大于负数”是正确判断的关键.

2. 在平面直角坐标系中，把点 $P(-3, 2)$ 向右平移两个单位后，得到对应点的坐标是 ()

- A. $(-5, 2)$ B. $(-1, 4)$ C. $(-3, 4)$ D. $(-1, 2)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平移时，点的坐标变化规律“左减右加”进行计算即可.

【详解】解：根据题意，从点 P 到点 P' ，点 P' 的纵坐标不变，横坐标是 $-3 + 2 = -1$ ，

故点 P' 的坐标是 $(-1, 2)$.

故选：D.

【点睛】此题考查了点的坐标变化和平移之间的联系，平移时点的坐标变化规律是“上加下减，左减右加”.

3. 实验测得，某种新型冠状病毒的直径是 120 纳米 (1 纳米 $= 10^{-9}$ 米)，120 纳米用科学记数法可表示为 ()

- A. 12×10^{-6} 米 B. 1.2×10^{-7} 米 C. 1.2×10^{-8} 米 D. 120×10^{-9} 米

【答案】B

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解：120 纳米 $= 120 \times 10^{-9}$ 米 $= 1.2 \times 10^{-7}$ 米.

故选：B.

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要确定 a 的值以及 n 的值.

4. 袁隆平院士被誉为“世界杂交水稻之父”，他研究的水稻，不仅高产，而且抗倒伏. 在某次实验中，他的团队对甲、乙两种水稻品种进行产量稳定实验，各选取了 8 块条件相同的试验田，同时播种并核定亩产，结果甲、乙两种水稻的平均产量均为 1200 千克/亩，方差为 $s_{\text{甲}}^2 = 186.9$ ， $s_{\text{乙}}^2 = 325.3$. 为保证产量稳定，适合推广的品种为（ ）

- A. 甲 B. 乙 C. 甲、乙均可 D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】根据方差的意义求解即可.

【详解】解：∵ $s_{\text{甲}}^2 = 186.9$ ， $s_{\text{乙}}^2 = 325.3$ ，

$$\therefore s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2,$$

∴ 为保证产量稳定，适合推广的品种为甲，

故选：A.

【点睛】本题考查方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

5. 下列运算正确的是（ ）

A. $x^2 + x^2 = x^4$

B. $(xy^2)^2 = xy^4$

C. $y^6 \div y^2 = y^3$

D. $-(x-y)^2 = -x^2 + 2xy - y^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项、积的乘方、幂的乘方、同底数幂的除法以及完全平方公式解决此题.

【详解】解：A. 由合并同类项的法则，得 $x^2 + x^2 = 2x^2$ ，故 A 不符合题意.

B. 由积的乘方以及幂的乘方，得 $(xy^2)^2 = x^2y^4$ ，故 B 不符合题意.

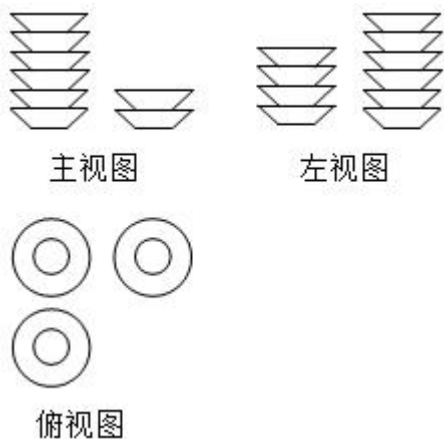
C. 由同底数幂的除法，得 $y^6 \div y^2 = y^4$ ，故 C 不符合题意.

D. 由完全平方公式，得 $-(x-y)^2 = -x^2 - y^2 + 2xy$ ，故 D 符合题意.

故选：D.

【点睛】本题主要考查合并同类项、积的乘方、幂的乘方、同底数幂的除法以及完全平方公式，熟练掌握合并同类项、积的乘方、幂的乘方、同底数幂的除法以及完全平方公式是解决本题的关键.

6. 一张水平放置的桌子上摆放着若干个碟子，其三视图如图所示，则这张桌子上共有碟子的个数为（ ）



A. 10

B. 12

C. 14

D. 18

【答案】B

【解析】

【分析】从俯视图看只有三列碟子，主视图中可知左侧碟子有 6 个，右侧有 2 个，根据三视图的思路可解答该题.

【详解】解：从俯视图可知该桌子共摆放着三列碟子. 主视图可知左侧碟子有 6 个，右侧有 2 个，而左视图可知左侧有 4 个，右侧与主视图的左侧碟子相同，共计 12 个，
故选：B.

【点睛】本题的难度不大，主要是考查三视图的基本知识以及在实际生活中的应用.

7. 若不等式组 $\begin{cases} x+6 < 4x-3 \\ x > m \end{cases}$ 的解集是 $x > 3$ ，则 m 的取值范围是（ ）

A. $m > 3$

B. $m \geq 3$

C. $m \leq 3$

D. $m < 3$

【答案】C

【解析】

【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【详解】解：解不等式 $x+6 < 4x-3$ ，得： $x > 3$ ，
 $\because x > m$ 且不等式组的解集为 $x > 3$ ，

$\therefore m \leq 3$,

故选：C.

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

8. 下列命题：① $\sqrt{4}$ 的算术平方根是2；②菱形既是中心对称图形又是轴对称图形；③天气预报说明天的降水概率是95%，则明天一定会下雨；④若一个多边形的各内角都等于 108° ，则它是正五边形，其中真命题的个数是（ ）

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】利用算术平方根的定义、菱形的对称性、概率的意义及多边形的内角和等知识分别判断后即可确定正确的选项.

【详解】解：① $\sqrt{4}$ 的算术平方根是 $\sqrt{2}$ ，故原命题错误，是假命题；

②菱形既是中心对称图形又是轴对称图形，正确，是真命题；

③天气预报说明天的降水概率是95%，则明天下雨可能性很大，但不确定是否一定下雨，故原命题错误，是假命题；

④若一个多边形的各内角都等于 108° ，各边也相等，则它是正五边形，故原命题错误，是假命题；

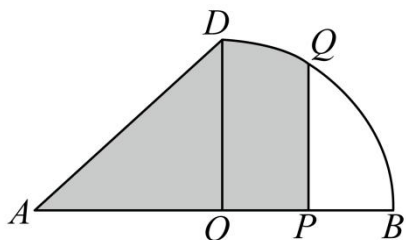
真命题有1个，

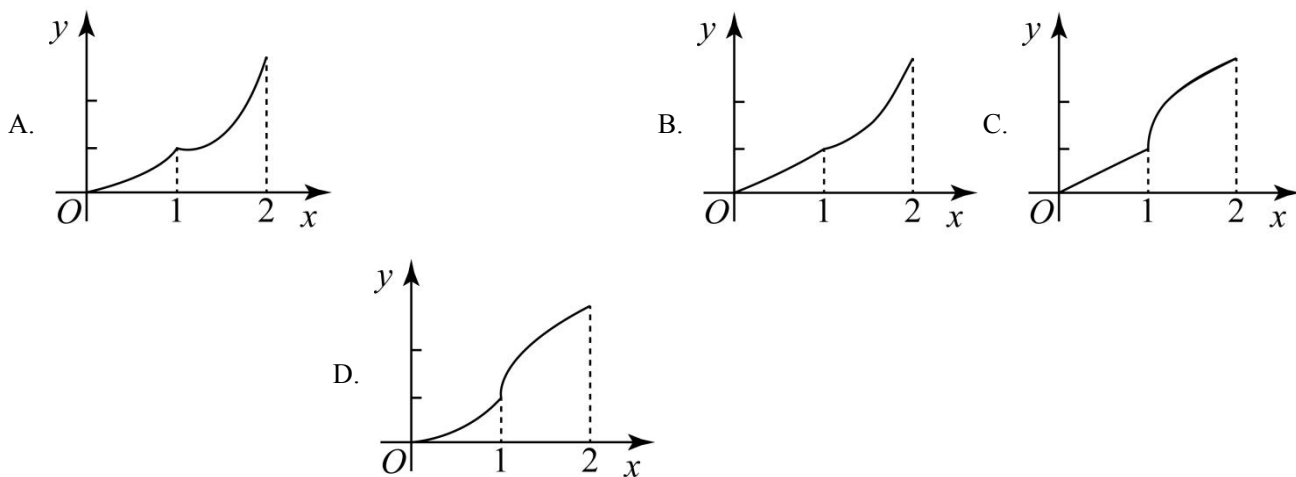
故选：B.

【点睛】本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解算术平方根的定义、菱形的对称性、概率的意义及多边形的内角和等知识，难度不大.

9. 如图，平面图形ABD由直角边长为1的等腰直角 $\triangle AOD$ 和扇形BOD组成，点P在线段AB上，

$PQ \perp AB$ ，且PQ交AD或交 $\widehat{DB}$ 于点Q. 设 $AP = x$ ($0 < x < 2$)，图中阴影部分表示的平面图形APQ (或APQD) 的面积为y，则函数y关于x的大致图象是（ ）





【答案】D

【解析】

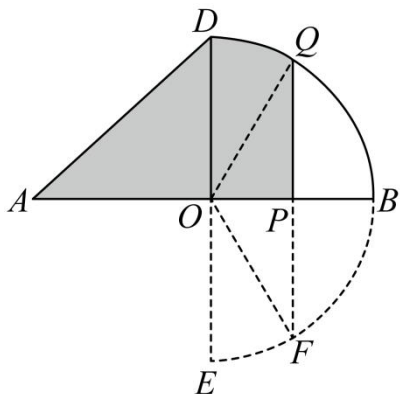
【分析】根据点 Q 的位置，分点 Q 在 AD 上和点 Q 在弧 BD 上两种情况讨论，分别写出 y 和 x 的函数解析式，即可确定函数图象。

【详解】解：当 Q 在 AD 上时，即点 P 在 AO 上时，有 $0 < x \leq 1$ ，此时阴影部分为等腰直角三角形，

$$\therefore y = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} x^2,$$

该函数是二次函数，且开口向上，排除 B ， C 选项；

当点 Q 在弧 BD 上时，补全图形如图所示，



阴影部分的面积等于等腰直角 $\triangle AOD$ 的面积加上扇形 BOD 的面积，再减去平面图形 PBQ 的面积即减去 $\frac{1}{2}$

弓形 QBF 的面积，

设 $\angle QOB = \theta$ ，则 $\angle QOF = 2\theta$ ，

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}, \quad S_{\text{弓形}QBF} = \frac{\theta \pi r^2}{180} - S_{\triangle QOF},$$

$$\text{当 } \theta^\circ = 45^\circ \text{ 时, } AP = x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.7, \quad S_{\text{弓形}QBF} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{\pi}{8} \approx 1.15,$$

$$\text{当 } \theta^\circ = 30^\circ \text{ 时, } AP = x = 1.86, \quad S_{\text{弓形}QBF} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4},$$

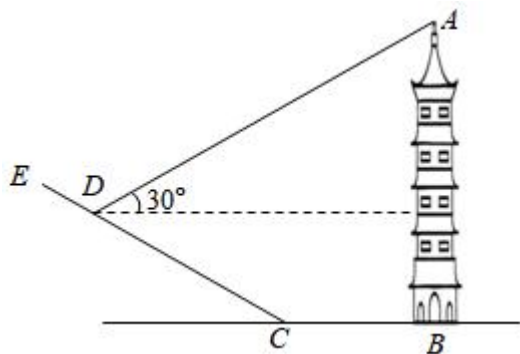
$$y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6} \approx 1.45,$$

在 A, D 选项中分别找到这两个特殊值, 对比发现, 选项 D 符合题意.

故选: D.

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象及性质, 图形的面积等内容, 选择题中利用特殊值解决问题是常见方法, 构造图形表达出阴影部分面积是本题解题关键.

10. 如图, 在一次数学实践活动中, 小明同学要测量一座与地面垂直的古塔 AB 的高度, 他从古塔底部点 B 处前行 30m 到达斜坡 CE 的底部点 C 处, 然后沿斜坡 CE 前行 20m 到达最佳测量点 D 处, 在点 D 处测得塔顶 A 的仰角为 30° , 已知斜坡的斜面坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$, 且点 A, B, C, D, E 在同一平面内, 小明同学测得古塔 AB 的高度是 ()



- A. $(10\sqrt{3} + 20)$ m B. $(10\sqrt{3} + 10)$ m C. $20\sqrt{3}$ m D. 40m

【答案】A

【解析】

【分析】过 D 作 $DF \perp BC$ 于 F, $DH \perp AB$ 于 H, 得到 $DH = BF$, $BH = DF$, 设 $DF = x$ m, $CF = \sqrt{3}x$ m, 根据勾股定理得到 $CD = \sqrt{DF^2 + CF^2} = 2x = 20(m)$, 求得 $BH = DF = 10m$, $CF = 10\sqrt{3}m$, $AH = \frac{\sqrt{3}}{3} DH = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (10\sqrt{3} + 30) = (10 + 10\sqrt{3})(m)$, 于是得到结论.

【详解】解: 过 D 作 $DF \perp BC$ 于 F, $DH \perp AB$ 于 H,

$\therefore DH = BF$, $BH = DF$,

$\because$ 斜坡的斜面坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$,

$$\therefore \frac{DF}{CF} = 1 : \sqrt{3},$$

$$\text{设 } DF = x \text{ m}, \quad CF = \sqrt{3}x \text{ m},$$

$$\therefore CD = \sqrt{DF^2 + CF^2} = 2x = 20(m),$$

$$\therefore x = 10,$$

$$\therefore BH = DF = 10m, \quad CF = 10\sqrt{3}m,$$

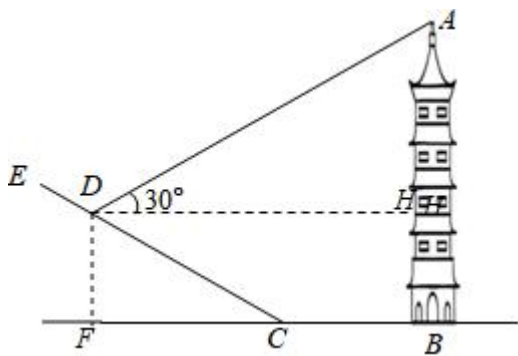
$$\therefore DH = BF = (10\sqrt{3} + 30)m,$$

$$\because \angle ADH = 30^\circ,$$

$$\therefore AH = \frac{\sqrt{3}}{3} DH = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (10\sqrt{3} + 30) = (10 + 10\sqrt{3})(m),$$

$$\therefore AB = AH + BH = (20 + 10\sqrt{3})m,$$

故选：A.



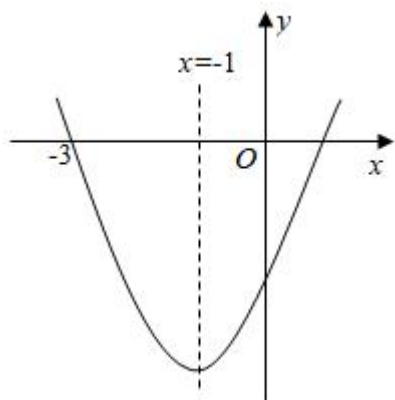
【点睛】本题考查了解直角三角形的应用—仰角俯角问题，解直角三角形的应用—坡角坡度问题，正确的作出辅助线构造直角三角形是解题的关键.

11. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = -1$ ，其图象如图所示. 下列结论：① $abc < 0$ ；

② $(4a + c)^2 < (2b)^2$ ；③ 若 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 是抛物线上的两点，则当 $|x_1 + 1| > |x_2 + 1|$ 时， $y_1 < y_2$ ；④

抛物线的顶点坐标为 $(-1, m)$ ，则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = m - 1$ 无实数根. 其中正确结论的个数是

()



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】 B

【解析】

【分析】 ①由图象开口方向，对称轴位置，与 y 轴交点位置判断 a ， b ， c 符号. ②把 $x = \pm 2$ 分别代入函数解析式，结合图象可得 $(4a + c)^2 - (2b)^2$ 的结果符号为负. ③由抛物线开口向上，距离对称轴距离越远的点 y 值越大. ④由抛物线顶点纵坐标为 m 可得 $ax^2 + bx + c \geq m$ ，从而进行判断 $ax^2 + bx + c = m - 1$ 无实数根.

【详解】 解：① $\because$ 抛物线图象开口向上，

$\therefore a > 0$ ，

$\because$ 对称轴在直线 y 轴左侧，

$\therefore a$ ， b 同号， $b > 0$ ，

$\because$ 抛物线与 y 轴交点在 x 轴下方，

$\therefore c < 0$ ，

$\therefore abc < 0$ ，故①正确.

② $(4a + c)^2 - (2b)^2 = (4a + c + 2b)(4a + c - 2b)$ ，

当 $x = 2$ 时 $ax^2 + bx + c = 4a + c + 2b$ ，由图象可得 $4a + c + 2b > 0$ ，

当 $x = -2$ 时， $ax^2 + bx + c = 4a + c - 2b$ ，由图象可得 $4a + c - 2b < 0$ ，

$\therefore (4a + c)^2 - (2b)^2 < 0$ ，即 $(4a + c)^2 < (2b)^2$ ，

故②正确.

③ $|x_1 + 1| = |x_1 - (-1)|$ ， $|x_2 + 1| = |x_2 - (-1)|$ ，

$\because |x_1 + 1| > |x_2 + 1|$ ，

$\therefore$ 点 (x_1, y_1) 到对称轴的距离大于点 (x_2, y_2) 到对称轴的距离，

$$\therefore y_1 > y_2 \mid,$$

故③错误.

④ $\because$ 抛物线的顶点坐标为 $(-1, m)$,

$$\therefore y \geq m,$$

$$\therefore ax^2 + bx + c \geq m,$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = m - 1 \text{ 无实数根.}$$

故④正确,

综上所述, ①②④正确,

故选: B.

【点睛】本题考查二次函数的图象的性质, 解题关键是熟练掌握二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 中 a , b , c 与函数图象的关系.

12. 数学上有很多著名的猜想, “奇偶归一猜想”就是其中之一, 它至今未被证明, 但研究发现, 对于任意一个小于 7×10^{11} 的正整数, 如果是奇数, 则乘 3 加 1; 如果是偶数, 则除以 2, 得到的结果再按照上述规则重复处理, 最终总能够得到 1. 对任意正整数 m , 按照上述规则, 恰好实施 5 次运算结果为 1 的 m 所有可能取值的个数为 ()

A. 8

B. 6

C. 4

D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用第 5 次运算结果为 1 出发, 按照规则, 逆向逐项计算即可求出 m 的所有可能的取值.

【详解】解: 如果实施 5 次运算结果为 1,

则变换中的第 6 项一定是 1,

则变换中的第 5 项一定是 2,

则变换中的第 4 项一定是 4,

则变换中的第 3 项可能是 1, 也可能是 8.

则变换中的第 3 项可能是 1, 计算结束, 1 不符合条件, 第三项只能是 8.

则变换中第 2 项是 16.

则 m 的所有可能取值为 32 或 5, 一共 2 个,

故选: D.

【点睛】本题考查科学记数法, 有理数的混合运算, 进行逆向验证是解决本题的关键.

二、填空题：本题共4个小题，每小题4分，满分16分．不需写出解题过程，请将答案直接写在答题卡相应位置上．

13. 若式子 $\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____．

【答案】 $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$

【解析】

【详解】 $\because$ 式子 $\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 在实数范围内有意义，

$\therefore x+1 \geq 0$ ，且 $x \neq 0$ ，

解得： $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$ ，

故答案为 $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$ ．

14. 关于 x 的方程 $x^2 + bx + 2a = 0$ (a 、 b 为实数且 $a \neq 0$)， a 恰好是该方程的根，则 $a + b$ 的值为_____．

【答案】 -2

【解析】

【分析】 根据方程的解的概念，将 $x = a$ 代入原方程，然后利用等式的性质求解．

【详解】 解：由题意可得 $x = a$ ($a \neq 0$)，

把 $x = a$ 代入原方程可得： $a^2 + ab + 2a = 0$ ，

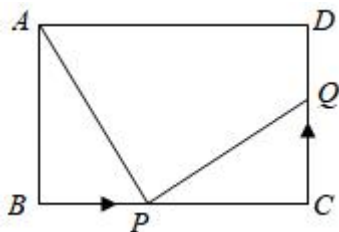
等式左右两边同时除以 a ，可得： $a + b + 2 = 0$ ，

即 $a + b = -2$ ，

故答案为： -2．

【点睛】 本题考查方程的解的概念及等式的性质，理解方程的解的定义，掌握等式的基本性质是解题关键．

15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8\text{cm}$ ， $AD = 12\text{cm}$ ，点 P 从点 B 出发，以 2cm/s 的速度沿 BC 边向点 C 运动，到达点 C 停止，同时，点 Q 从点 C 出发，以 $v\text{cm/s}$ 的速度沿 CD 边向点 D 运动，到达点 D 停止，规定其中一个动点停止运动时，另一个动点也随之停止运动．当 v 为_____时， $\triangle ABP$ 与 $\triangle PCQ$ 全等．



【答案】 2 或 $\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】可分两种情况：① $\triangle ABP \cong \triangle PCQ$ 得到 $BP = CQ$ ， $AB = PC$ ，② $\triangle ABP \cong \triangle QCP$ 得到 $BA = CQ$ ， $PB = PC$ ，然后分别计算出 t 的值，进而得到 v 的值.

【详解】解：①当 $BP = CQ$ ， $AB = PC$ 时， $\triangle ABP \cong \triangle PCQ$ ，

$$\because AB = 8cm,$$

$$\therefore PC = 8cm,$$

$$\therefore BP = 12 - 8 = 4(cm),$$

$$\therefore 2t = 4, \text{ 解得: } t = 2,$$

$$\therefore CQ = BP = 4cm,$$

$$\therefore v \times 2 = 4,$$

$$\text{解得: } v = 2;$$

②当 $BA = CQ$ ， $PB = PC$ 时， $\triangle ABP \cong \triangle QCP$ ，

$$\because PB = PC,$$

$$\therefore BP = PC = 6cm,$$

$$\therefore 2t = 6, \text{ 解得: } t = 3,$$

$$\therefore CQ = AB = 8cm,$$

$$\therefore v \times 3 = 8,$$

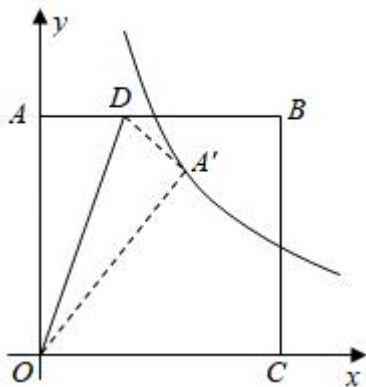
$$\text{解得: } v = \frac{8}{3},$$

综上所述，当 $v = 2$ 或 $\frac{8}{3}$ 时， $\triangle ABP$ 与 $\triangle PQC$ 全等，

故答案为：2 或 $\frac{8}{3}$.

【点睛】主要考查了全等三角形的性质，矩形的性质，解本题的关键是熟练掌握全等三角形的判定与性质.

16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $OABC$ 的边 OC 、 OA 分别在 x 轴和 y 轴上， $OA = 10$ ，点 D 是边 AB 上靠近点 A 的三等分点，将 $\triangle OAD$ 沿直线 OD 折叠后得到 $\triangle OA'D$ ，若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过 A' 点，则 k 的值为_____.



【答案】 48

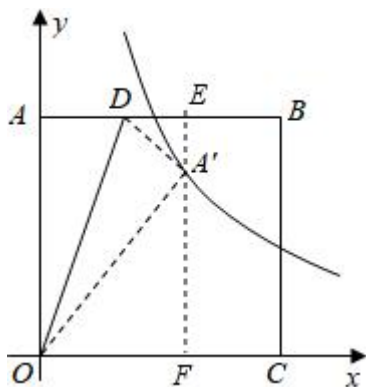
【解析】

【分析】过 A' 作 $EF \perp OC$ 于 F ，交 AB 于 E ，设 $A'(m, n)$ ， $OF = m$ ， $A'F = n$ ，通过证得 $\triangle A'OF \sim \triangle DA'E$ ，

得到 $\frac{m}{10-n} = \frac{n}{m-\frac{10}{3}} = 3$ ，解方程组求得 m 、 n 的值，即可得到 A' 的坐标，代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 即可求得 k 的

值.

【详解】解：过 A' 作 $EF \perp OC$ 于 F ，交 AB 于 E ，



$$\because \angle OA'D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OA'F + \angle DA'E = 90^\circ,$$

$$\because \angle OA'F + \angle A'OF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DA'E = \angle A'OF,$$

$$\because \angle A'FO = \angle DEA',$$

$$\therefore \triangle A'OF \sim \triangle DA'E,$$

$$\therefore \frac{OF}{A'E} = \frac{A'F}{DE} = \frac{OA'}{A'D},$$

设 $A'(m, n)$ ，

$$\therefore OF = m, \quad A'F = n,$$

∵ 正方形 $OABC$ 的边 OC 、 OA 分别在 x 轴和 y 轴上， $OA=10$ ，点 D 是边 AB 上靠近点 A 的三等分点，

$$\therefore DE = m - \frac{10}{3}, \quad A'E = 10 - n,$$

$$\therefore \frac{m}{10-n} = \frac{n}{m-\frac{10}{3}} = 3,$$

解得 $m=6$ ， $n=8$ ，

$$\therefore A'(6,8),$$

∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过 A' 点，

$$\therefore k = 6 \times 8 = 48,$$

故答案为 48.

【点睛】 本题考查了正方形的性质，反比例函数图象上点的坐标特征，三角形相似的判定和性质，求得 A' 的坐标是解题的关键.

三、解答题： 本题共 6 个小题，满分 68 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) 若单项式 $x^{m-n}y^{14}$ 与单项式 $-\frac{1}{2}x^3y^{3m-8n}$ 是一多项式中的同类项，求 m 、 n 的值；

(2) 先化简，再求值： $\left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{1}{x^2-1}$ ，其中 $x = \sqrt{2} - 1$.

【答案】 (1) $m=2$ ， $n=-1$ ； (2) x^2+1 ， $4-2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据同类项的概念列二元一次方程组，然后解方程组求得 m 和 n 的值；

(2) 先通分算小括号里面的，然后算括号外面的，最后代入求值.

【详解】 解： (1) 由题意可得
$$\begin{cases} m-n=3 & \text{①} \\ 3m-8n=14 & \text{②} \end{cases}$$

②-① $\times 3$ ，可得： $-5n=5$ ，

解得： $n=-1$ ，

把 $n=-1$ 代入①，可得： $m-(-1)=3$ ，

解得： $m=2$ ，

$\therefore m$ 的值为 2， n 的值为 -1；

$$(2) \text{ 原式 } = \left[\frac{x(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right] \cdot (x+1)(x-1)$$

$$= \frac{x^2 - x + x + 1}{(x+1)(x-1)} \cdot (x+1)(x-1)$$

$$= x^2 + 1,$$

当 $x = \sqrt{2} - 1$ 时,

$$\text{原式} = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查同类项，解二元一次方程组，分式的化简求值，二次根式的混合运算，理解同类项的概念，掌握消元法解二元一次方程组的步骤以及完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 的结构是解题关键.

18. 为庆祝中国共产党建党 100 周年，某校加强了学生对党史知识的学习，并组织学生参加《党史知识》测试（满分 100 分）. 为了解学生对党史知识的掌握程度，从七、八年级中各随机抽取 10 名学生的测试成绩，进行统计、分析，过程如下：

收集数据：

七年级：86 88 95 90 100 95 95 99 93 100

八年级：100 98 98 89 87 98 95 90 90 89

整理数据：

成绩 x (分) 年级	$85 < x \leq 90$	$90 < x \leq 95$	$95 < x \leq 100$
七年级	3	4	3
八年级	5	a	b

分析数据：

统计量 年级	平均数	中位数	众数
七年级	94.1	95	d
八年级	93.4	c	98

应用数据：

(1) 填空： $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $d = \underline{\hspace{1cm}}$ ；

(2) 若八年级共有 200 人参与答卷，请估计八年级测试成绩大于 95 分的人数；

(3) 从测试成绩优秀的学生中选出 5 名语言表达能力较强的学生，其中八年级 3 名，七年级 2 名. 现从这 5 名学生中随机抽取 2 名到当地社区担任党史宣讲员. 请用画树状图或列表的方法，求恰好抽到同年级学生

的概率.

【答案】(1) 1, 4, 92.5, 95; (2) 80; (3) $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】(1) 利用唱票的形式得到 a 、 b 的值, 根据中位数的定义确定 c 的值, 根据众数的定义确定 d 的值;

(2) 用 200 乘以样本中八年级测试成绩大于 95 分所占的百分比即可;

(3) 画树状图展示所有 20 种等可能的结果, 找出两同学为同年级的结果数, 然后根据概率公式求解.

【详解】解: (1) $a = 1$, $b = 4$,

八年级成绩按由小到大排列为: 87, 89, 89, 90, 90, 95, 98, 98, 98, 100,

所以八年级成绩的中位数 $c = \frac{90+95}{2} = 92.5$,

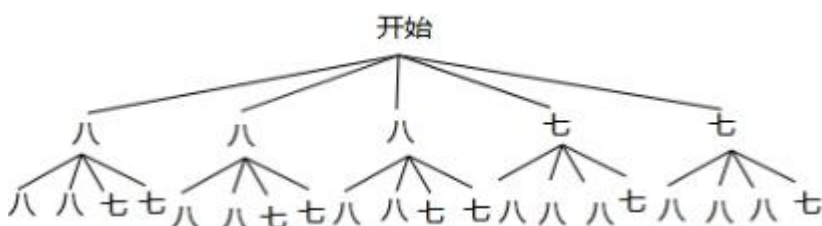
七年级成绩中 95 出现的次数最多, 则 $d = 95$;

故答案为 1, 4, 92.5, 95;

(2) $200 \times \frac{4}{10} = 80$,

估计八年级测试成绩大于 95 分的人数为 80 人;

(3) 画树状图为:

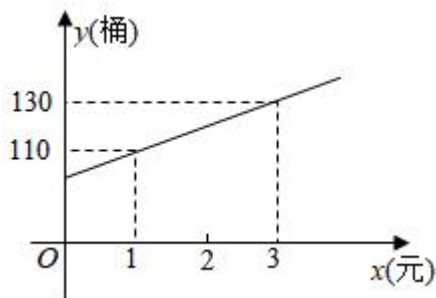


共有 20 种等可能的结果, 其中两同学为同年级的结果数为 8,

所以抽到同年级学生的概率 $= \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

【点睛】本题考查了列表法与树状图法: 通过列表或树状图展示所有可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 求出概率. 也考查了统计图.

19. 某药店新进一批桶装消毒液, 每桶进价 35 元, 原计划以每桶 55 元的价格销售, 为更好地助力疫情防控, 现决定降价销售. 已知这种消毒液销售量 y (桶) 与每桶降价 x (元) ($0 < x < 20$) 之间满足一次函数关系, 其图象如图所示:



(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 在这次助力疫情防控活动中，该药店仅获利 1760 元. 这种消毒液每桶实际售价多少元？

【答案】 (1) $y=10x+100$ ；(2) 这种消毒液每桶实际售价 43 元

【解析】

【分析】 (1) 设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$ ，将点 (1,110)、(3,130) 代入一次函数表达式，即可求解；

(2) 根据利润等于每桶的利润乘以销售量得关于 x 的一元二次方程，通过解方程即可求解.

【详解】 解：(1) 设 y 与销售单价 x 之间的函数关系式为： $y=kx+b$ ，

将点 (1,110)、(3,130) 代入一次函数表达式得：
$$\begin{cases} 110 = k + b \\ 130 = 3k + b \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} k = 10 \\ b = 100 \end{cases}$$

故函数的表达式为： $y=10x+100$ ；

(2) 由题意得： $(10x+100) \times (55-x-35) = 1760$ ，

整理，得 $x^2 - 10x - 24 = 0$.

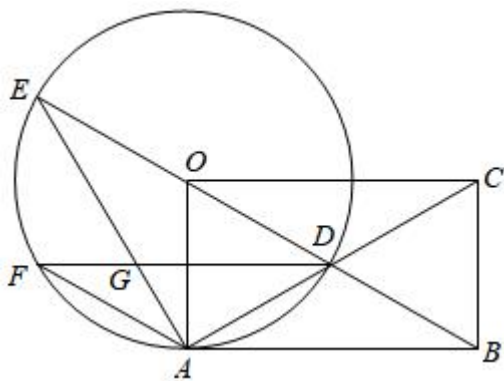
解得 $x_1 = 12$ ， $x_2 = -2$ (舍去).

所以 $55-x = 43$.

答：这种消毒液每桶实际售价 43 元.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的应用以及用待定系数法求一次函数解析式等知识，正确利用销量 $\times$ 每件的利润 = 总利润得出一元二次方程是解题关键.

20. 如图， $\square OABC$ 的对角线相交于点 D ， $\odot O$ 经过 A 、 D 两点，与 BO 的延长线相交于点 E ，点 F 为 AE 上一点，且 $\widehat{AF} = \widehat{AD}$. 连接 AE 、 DF 相交于点 G ，若 $AG = 3$ ， $EG = 6$.



- (1) 求 $\square OABC$ 对角线 AC 的长;
(2) 求证: $\square OABC$ 为矩形.

【答案】 (1) $6\sqrt{3}$; (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用弧相等，圆周角定理推出 $\triangle ADE \sim \triangle AGD$ ，可求 AD 的长度进而求 AC 的长度；

(2) 利用对角线相等的平行四边形是矩形可得.

【详解】解: $\because DE$ 是直径,

$$\therefore \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AF} = \widehat{AD},$$

$$\therefore \angle ADF = \angle AFD = \angle AED,$$

又 $\because \angle DAE = \angle GAD = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle AGD,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AG}{AD},$$

$$\therefore AD^2 = AG \times AE = 3 \times 9 = 27,$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = 2AD = 6\sqrt{3} .$$

$$(2) \quad DE = \sqrt{9^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{3},$$

 $\therefore \square OABC$ 是平行四边形

$$\therefore OB = 2OD = DE = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore AC=OB$$

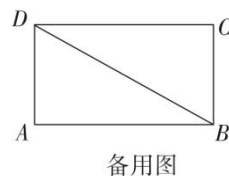
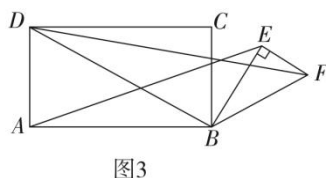
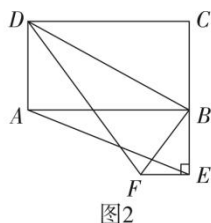
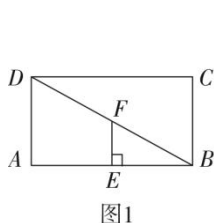
$\therefore \square OABC$ 为矩形.

【点睛】本题考查了圆的基本性质，相似和矩形的判定，考的知识点比较全，但是难度中等，掌握圆和矩

形的基本性质和相似以及灵活应用是解决本题的关键.

21. 问题背景:

如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle ABD = 30^\circ$, 点 E 是边 AB 的中点, 过点 E 作 $EF \perp AB$ 交 BD 于点 F .



实验探究:

(1) 在一次数学活动中, 小王同学将图 1 中的 $\triangle BEF$ 绕点 B 按逆时针方向旋转 90° , 如图 2 所示, 得到结论: ① $\frac{AE}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ② 直线 AE 与 DF 所夹锐角的度数为 30° .

(2) 小王同学继续将 $\triangle BEF$ 绕点 B 按逆时针方向旋转, 旋转至如图 3 所示位置. 请问探究 (1) 中的结论是否仍然成立? 并说明理由.

拓展延伸:

在以上探究中, 当 $\triangle BEF$ 旋转至 D 、 E 、 F 三点共线时, 则 $\triangle ADE$ 的面积为 $\frac{13\sqrt{3} + \sqrt{39}}{8}$ 或 $\frac{13\sqrt{3} - \sqrt{39}}{8}$.

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 30° ; (2) 成立, 理由见解析; 拓展延伸: $\frac{13\sqrt{3} + \sqrt{39}}{8}$ 或 $\frac{13\sqrt{3} - \sqrt{39}}{8}$

【解析】

【分析】 (1) 通过证明 $\triangle FBD \sim \triangle EBA$, 可得 $\frac{AE}{DF} = \frac{BE}{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle BDF = \angle BAE$, 即可求解;

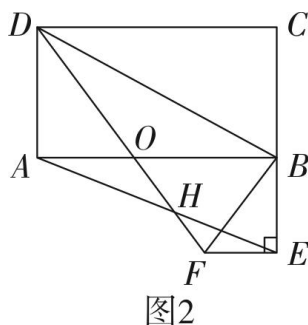
(2) 通过证明 $\triangle ABE \sim \triangle DBF$, 可得 $\frac{AE}{DF} = \frac{BE}{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle BDF = \angle BAE$, 即可求解;

拓展延伸: 分两种情况讨论, 先求出 AE , DG 的长, 即可求解.

【详解】 解: (1) 如图 1, $\because \angle ABD = 30^\circ$, $\angle DAB = 90^\circ$, $EF \perp BA$,

$$\therefore \cos \angle ABD = \frac{BE}{BF} = \frac{AB}{DB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

如图 2, 设 AB 与 DF 交于点 O , AE 与 DF 交于点 H ,



$\therefore \triangle BEF$ 绕点 B 按逆时针方向旋转 90° ,

$$\therefore \angle DBF = \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FBD \sim \triangle EBA,$$

$$\therefore \frac{AE}{DF} = \frac{BE}{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \angle BDF = \angle BAE,$$

$$\text{又} \because \angle DOB = \angle AOF,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle AHD = 30^\circ,$$

$\therefore$ 直线 AE 与 DF 所夹锐角的度数为 30° ,

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{2}, 30^\circ;$$

(2) 结论仍然成立,

理由如下: 如图 3, 设 AE 与 BD 交于点 O , AE 与 DF 交于点 H ,

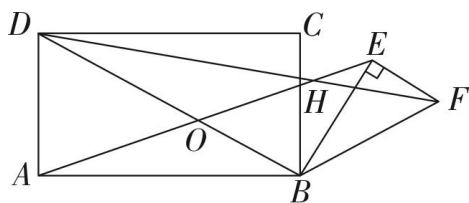


图3

$\therefore$ 将 $\triangle BEF$ 绕点 B 按逆时针方向旋转,

$$\therefore \angle ABE = \angle DBF,$$

$$\text{又} \because \frac{BE}{BF} = \frac{AB}{DB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DBF,$$

$$\therefore \frac{AE}{DF} = \frac{BE}{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \angle BDF = \angle BAE,$$

$$\text{又} \because \angle DOH = \angle AOB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle AHD = 30^\circ,$$

$\therefore$ 直线 AE 与 DF 所夹锐角的度数为 30° .

拓展延伸: 如图 4, 当点 E 在 AB 的上方时, 过点 D 作 $DG \perp AE$ 于 G ,

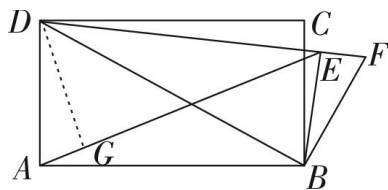


图4

$$\therefore AB = 2\sqrt{3}, \quad \angle ABD = 30^\circ, \quad \text{点 } E \text{ 是边 } AB \text{ 的中点}, \quad \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore BE = \sqrt{3}, \quad AD = 2, \quad DB = 4,$$

$$\because \angle EBF = 30^\circ, \quad EF \perp BE,$$

$$\therefore EF = 1,$$

$$\because D、E、F \text{ 三点共线},$$

$$\therefore \angle DEB = \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13},$$

$$\because \angle DEA = 30^\circ,$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2}DE = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$\text{由 (2) 可得: } \frac{AE}{DF} = \frac{BE}{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{AE}{\sqrt{13}+1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AE = \frac{\sqrt{39} + \sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \triangle ADE \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times AE \times DG = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{39} + \sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{13\sqrt{3} + \sqrt{39}}{8};$$

如图 5, 当点 E 在 AB 的下方时, 过点 D 作 $DG \perp AE$, 交 EA 的延长线于 G ,

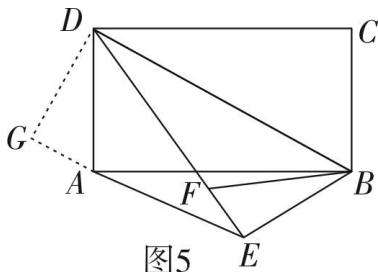


图5

$$\text{同理可求: } \triangle ADE \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times AE \times DG = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{39} - \sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{13\sqrt{3} - \sqrt{39}}{8};$$

$$\text{故答案为: } \frac{13\sqrt{3} + \sqrt{39}}{8} \text{ 或 } \frac{13\sqrt{3} - \sqrt{39}}{8}.$$

【点睛】 本题是几何变换综合题, 考查了矩形的性质, 相似三角形的判定和性质, 直角三角形的性质, 旋转的性质等知识, 利用分类讨论思想解决问题是解题的关键.

22. 已知: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3)$ 三点.

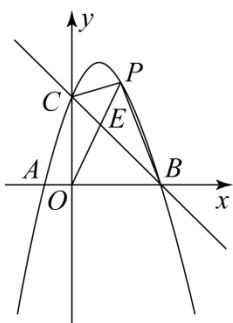


图1

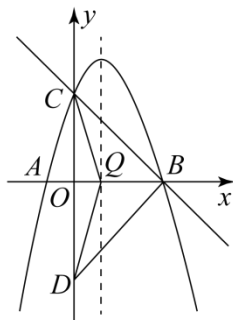
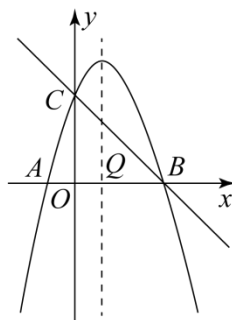


图2



备用图

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 如图1, 点 P 为直线 BC 上方抛物线上任意一点, 连 PC 、 PB 、 PO , PO 交直线 BC 于点 E , 设 $\frac{PE}{OE} = k$, 求当 k 取最大值时点 P 的坐标, 并求此时 k 的值;

(3) 如图2, 点 Q 为抛物线对称轴与 x 轴的交点, 点 C 关于 x 轴的对称点为点 D .

①求 $\triangle BDQ$ 的周长及 $\tan \angle BDQ$ 的值;

②点 M 是 y 轴负半轴上的点, 且满足 $\tan \angle BMQ = \frac{1}{t}$ (t 为大于 0 的常数), 求点 M 的坐标.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$; (2) $k = \frac{3}{4}$, $P(\frac{3}{2}, \frac{15}{4})$; (3) ① $2 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$; ② $(0, \sqrt{t^2 - 3} - t)$ 或 $(0, -\sqrt{t^2 - 3} - t)$

【解析】

【分析】 (1) 运用待定系数法即可求得答案;

(2) 如图1, 过点 P 作 $PH \parallel y$ 轴交直线 BC 于点 H , 则 $\triangle PEH \sim \triangle OEC$, 进而可得 $k = \frac{1}{3}PH$, 再运用待定系数法求得直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$, 设点 $P(t, -t^2 + 2t + 3)$, 则 $H(t, -t + 3)$, 从而得出

$k = -\frac{1}{3}(t - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$, 再利用二次函数性质即可得出答案;

(3) ①如图2, 过点 Q 作 $QT \perp BD$ 于点 T , 则 $\angle BTQ = \angle DTQ = 90^\circ$, 利用配方法求得抛物线对称轴为直线 $x = 1$, 得出 $Q(1, 0)$, 运用勾股定理即可求得 $\triangle BDQ$ 的周长 $= BQ + DQ + BD = 2 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}$; 再证明 $\triangle BQT$ 是等腰直角三角形, 利用三角函数求得 QT , DT , 即可求得答案;

②设 $M(0, -m)$, 则 $OM = m$, 根据 $QT^2 + MT^2 = MQ^2$, 求得 QT 、 MT , 再利用 $\cos \angle QBT = \cos \angle MBO$,

求得 BT , 根据 $BT + MT = BM$, 可得 $\frac{6}{\sqrt{m^2 + 9}} + \frac{t\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{1 + t^2}} = \sqrt{9 + m^2}$, 化简得 $m^2 - 2tm + 3 = 0$, 解方程即可

求得答案.

【详解】解：(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3)$,

$\therefore$ 设 $y = a(x+1)(x-3)$, 将 $C(0, 3)$ 代入, 得 $a(0+1)(0-3) = 3$,

解得: $a = -1$,

$\therefore y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$;

(2) 如图 1, 过点 P 作 $PH \parallel y$ 轴交直线 BC 于点 H ,

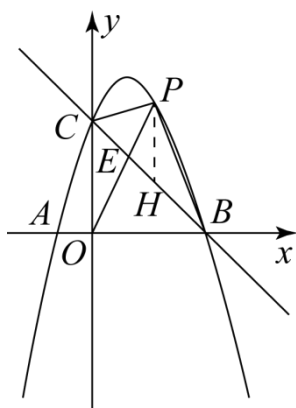


图1

$\therefore \triangle PEH \sim \triangle OEC$,

$\therefore \frac{PE}{OE} = \frac{PH}{OC}$,

$\therefore \frac{PE}{OE} = k$, $OC = 3$,

$\therefore k = \frac{1}{3}PH$,

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + n$,

$\therefore B(3, 0)$, $C(0, 3)$,

$\therefore \begin{cases} 3k + n = 0 \\ n = 3 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} k = -1 \\ n = 3 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$,

设点 $P(t, -t^2 + 2t + 3)$, 则 $H(t, -t + 3)$,

$$\therefore PH = -t^2 + 2t + 3 - (-t + 3) = -t^2 + 3t,$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}(-t^2 + 3t) = -\frac{1}{3}(t - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{3}{2} \text{ 时, } k \text{ 取得最大值 } \frac{3}{4}, \text{ 此时, } P(\frac{3}{2}, \frac{15}{4});$$

(3) ①如图 2, 过点 Q 作 $QT \perp BD$ 于点 T , 则 $\angle BTQ = \angle DTQ = 90^\circ$,

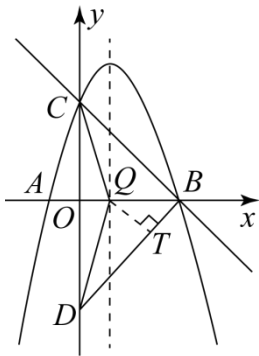


图2

$$\because y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x = 1$,

$$\therefore Q(1, 0),$$

$$\therefore OQ = 1, \quad BQ = OB - OQ = 3 - 1 = 2,$$

$\because$ 点 C 关于 x 轴的对称点为点 D ,

$$\therefore D(0, -3),$$

$$\therefore B(3, 0),$$

$$\therefore OB = OD = 3,$$

$$\therefore \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\therefore DQ = \sqrt{OQ^2 + OD^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$BD = \frac{OB}{\cos \angle DBO} = \frac{3}{\cos 45^\circ} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle BDQ \text{ 的周长} = BQ + DQ + BD = 2 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2};$$

在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中, $\because \angle BOD = 90^\circ$, $OB = OD$,

$$\therefore \angle DBO = \angle BDO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BTQ = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle BQT$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore QT = BT = BQ \cdot \cos \angle DBO = 2 \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore DT = BD - BT = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} ,$$

$$\therefore \tan \angle BDQ = \frac{QT}{DT} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2};$$

②设 $M(0, -m)$, 则 $OM = m$,

$$BM = \sqrt{OB^2 + OM^2} = \sqrt{3^2 + m^2} = \sqrt{9 + m^2},$$

$$MQ = \sqrt{OQ^2 + OM^2} = \sqrt{1 + m^2} ,$$

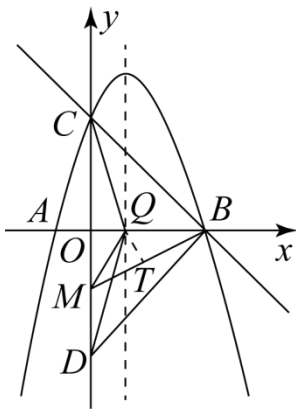


图3

$$\therefore \tan \angle BMQ = \frac{1}{t},$$

$$\therefore \frac{QT}{MT} = \frac{1}{t},$$

$$\therefore MT = t \cdot QT,$$

$$\therefore QT^2 + MT^2 = MQ^2,$$

$$\therefore QT^2 + (t \cdot QT)^2 = (\sqrt{1+m^2})^2,$$

$$\therefore QT = \frac{\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+t^2}}, \quad MT = \frac{t\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\therefore \cos \angle QBT = \cos \angle MBO,$$

$$\therefore \frac{BT}{BQ} = \frac{OB}{BM}, \quad \text{即} \quad \frac{BT}{2} = \frac{3}{\sqrt{m^2 + 9}},$$

$$\therefore BT = \frac{6}{\sqrt{m^2 + 9}},$$

$$\therefore BT + MT = BM \text{ ,}$$

$$\therefore \frac{6}{\sqrt{m^2+9}} + \frac{t\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{9+m^2},$$

整理得, $(m^2 + 3)^2 = 4t^2 m^2$,

$\because t > 0, m > 0$,

$\therefore m^2 + 3 = 2tm$, 即 $m^2 - 2tm + 3 = 0$,

当 $\Delta = (-2t)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4t^2 - 12 \geq 0$, 即 $t \geq \sqrt{3}$ 时,

$$m = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 - 12}}{2} = t \pm \sqrt{t^2 - 3},$$

$\therefore M(0, \sqrt{t^2 - 3} - t)$ 或 $(0, -\sqrt{t^2 - 3} - t)$.

【点睛】 本题是二次函数综合题, 考查了待定系数法求函数解析式, 勾股定理, 两点间距离公式, 三角函数, 等腰直角三角形性质及判定, 轴对称性质, 二次函数图象和性质, 解一元二次方程等知识, 综合性强, 难度大, 属于中考数学压轴题, 解题关键是添加辅助线构造直角三角形, 熟练运用勾股定理和三角函数定义解题.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】