

2019 年山东省日照市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分，在每小题所给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 2 的倒数是 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -2

【答案】B

【解析】

【详解】【分析】倒数定义：乘积为 1 的两个数互为倒数，由此即可得出答案.

【详解】 $\because 2 \times \frac{1}{2} = 1$,

$\therefore 2$ 的倒数是 $\frac{1}{2}$,

故选 B.

【点睛】本题考查了倒数的定义，熟知乘积为 1 的两个数互为倒数是解题的关键.

2. 近几年我国国产汽车行业蓬勃发展，下列汽车标识中，是中心对称图形的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心. 根据中心对称图形的概念求解.

【详解】解：A、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

C、不是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

D、不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项符合题意.

故选 D.

【点睛】此题主要考查中心对称图形与轴对称图形的识别,解题的关键是熟知其定义.

3. 在实数 $\sqrt[3]{8}$, $\frac{\pi}{3}$, $\sqrt{12}$, $\frac{4}{3}$ 中有理数有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】整数和分数统称为有理数, 依此定义求解即可.

【详解】解: 在实数 $\sqrt[3]{8}$, $\frac{\pi}{3}$, $\sqrt{12}$, $\frac{4}{3}$ 中 $\sqrt[3]{8} = 2$, 有理数有 $\sqrt[3]{8}$, $\frac{4}{3}$ 共 2 个.

故选 B.

【点睛】此题主要考查实数的分类, 解题的关键是熟知无理数与有理数的区别.

4. 下列事件中, 是必然事件的是 ()

- A. 掷一次骰子, 向上一面的点数是 6
B. 13 个同学参加一个聚会, 他们中至少有两个同学的生日在同一个月
C. 射击运动员射击一次, 命中靶心
D. 经过有交通信号灯的路口, 遇到红灯

【答案】B

【解析】

【分析】事先能肯定它一定会发生的事件称为必然事件, 即发生的概率是 1 的事件.

【详解】解: A. 掷一次骰子, 向上一面的点数是 6, 属于随机事件;

B. 13 个同学参加一个聚会, 他们中至少有两个同学的生日在同一个月, 属于必然事件;

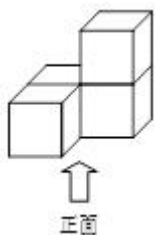
C. 射击运动员射击一次, 命中靶心, 属于随机事件;

D. 经过有交通信号灯的路口, 遇到红灯, 属于随机事件;

故选 B.

【点睛】此题主要考查事件发生的概率, 解题的关键是熟知必然事件的定义.

5. 如图所示的几何体是由 4 个大小相同的小立方块搭成, 它的俯视图是 ()





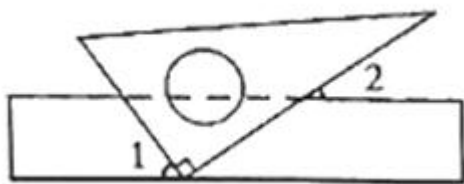
【答案】 C

【解析】

【详解】 从上面可得：第一列有两个方形，第二列只有一个方形，只有 C 符合.

故选 C

6. 如图，将一块三角尺的直角顶点放在直尺的一边上，当 $\angle 1 = 55^\circ$ 时， $\angle 2$ 的度数为 ()



- A. 25° B. 35° C. 45° D. 55°

【答案】 B

【解析】

【分析】 利用平行线的性质得到 $\angle 2 = \angle 3$ ，再根据直角的定义即可求出 $\angle 2$ 的度数.

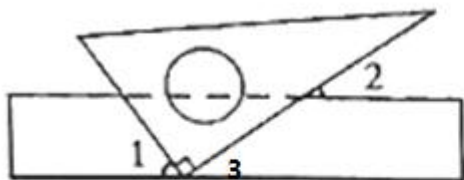
【详解】 $\because$ 直尺的对边平行，

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 3 = 90^\circ - \angle 1 = 35^\circ,$$

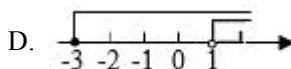
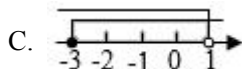
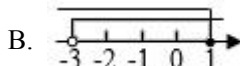
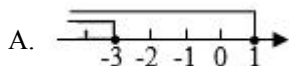
$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 35^\circ$$

故选 B.



【点睛】此题主要考查平行线的性质，解题的关键是熟知平行线的性质定理.

7. 把不等式组 $\begin{cases} 2-x \leq 5 \\ \frac{x+3}{2} < 2 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示出来，正确的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无

解了确定不等式组的解集，再把不等式组 $\begin{cases} 2-x \leq 5 \\ \frac{x+3}{2} < 2 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示出来即可.

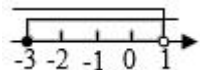
【详解】解： $\begin{cases} 2-x \leq 5 \text{ ①} \\ \frac{x+3}{2} < 2 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得： $x \geq -3$,

解不等式②得： $x < 1$,

故不等式组的解集为： $-3 \leq x < 1$,

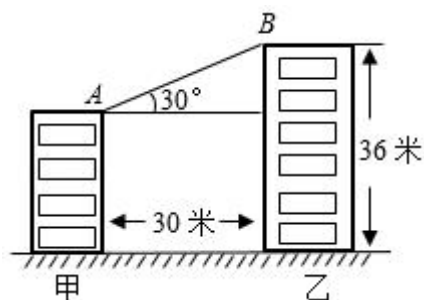
在数轴上表示为：



故选 C.

【点睛】此题主要考查不等式组的求解，解题的关键是熟知不等式的性质.

8. 如图，甲乙两楼相距 30 米，乙楼高度为 36 米，自甲楼顶 A 处看乙楼楼顶 B 处仰角为 30° ，则甲楼高度为 ()



- A. 11 米 B. $(36 - 15\sqrt{3})$ 米 C. $15\sqrt{3}$ 米 D. $(36 - 10\sqrt{3})$ 米

【答案】D

【解析】

【分析】分析题意可得：过点 A 作 $AE \perp BD$ ，交 BD 于点 E；可构造 $Rt\triangle ABE$ ，利用已知条件可求 BE；而乙楼高 $AC = ED = BD - BE$.

【详解】解：过点 A 作 $AE \perp BD$ ，交 BD 于点 E，

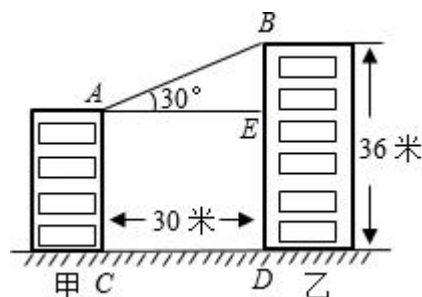
在 $Rt\triangle ABE$ 中， $AE = 30$ 米， $\angle BAE = 30^\circ$ ，

$$\therefore BE = 30 \times \tan 30^\circ = 10\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$$\therefore AC = ED = BD - BE = (36 - 10\sqrt{3}) \text{ (米)}.$$

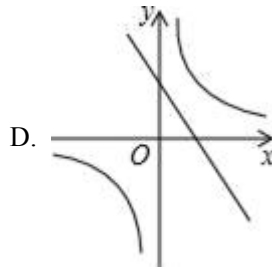
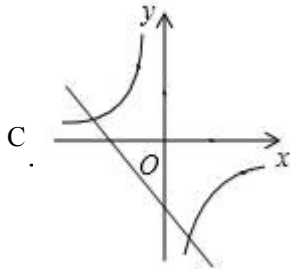
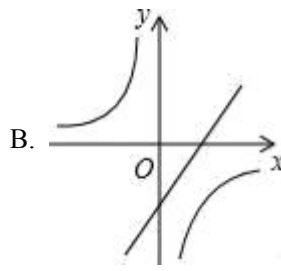
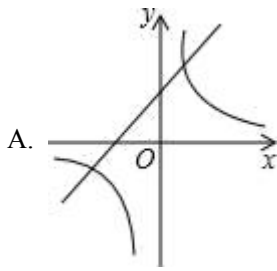
$$\therefore \text{甲楼高为 } (36 - 10\sqrt{3}) \text{ 米}.$$

故选 D.



【点睛】此题主要考查三角函数的应用，解题的关键是熟知特殊角的三角函数值.

9. 在同一直角坐标系中，函数 $y = kx + 1$ 与 $y = -\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象大致是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】分两种情况分析： $k>0$ 与 $k<0$ 时分别进行讨论即可得.

【详解】当 $k>0$ 时， $y=kx+1$ 图象经过第一、二、三象限； $y=-\frac{k}{x}$ 图象在第二、四象限；

当 $k<0$ 时， $y=kx+1$ 图象经过第一、二、四象限； $y=-\frac{k}{x}$ 图象在第一、三象限；

只有选项 D 符合条件.

故选 D

【点睛】本题考查知识点：一次函数和反比例函数. 解题关键点：理解函数图象的位置问题.

10. 某省加快新旧动能转换，促进企业创新发展. 某企业一月份的营业额是 1000 万元，月平均增长率相同，第一季度的总营业额是 3990 万元. 若设月平均增长率是 x ，那么可列出的方程是 ()

A. $1000(1+x)^2 = 3990$

B. $1000+1000(1+x)+1000(1+x)^2 = 3990$

C. $1000(1+2x) = 3990$

D. $1000+1000(1+x)+1000(1+2x) = 3990$

【答案】B

【解析】

【分析】设月平均增长的百分率是 x ，则该超市二月份的营业额为 $100(1+x)$ 万元，三月份的营业额为 $100(1+x)^2$ 万元，根据该超市第一季度的总营业额是 3990 万元，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解.

【详解】解：设月平均增长的百分率是 x ，则该超市二月份的营业额为 $100(1+x)$ 万元，三月份的营业额为 $100(1+x)^2$ 万元，

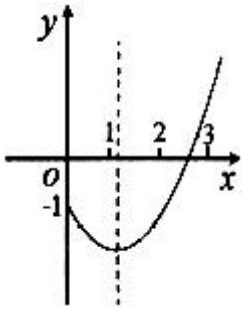
依题意，得 $1000+1000(1+x)+1000(1+x)^2=3990$.

故选 B.

【点睛】此题主要考查一元二次方程的应用，解题的关键是熟知增长率问题的求解.

11. 如图，是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的一部分，下列结论中：

① $abc > 0$ ；② $a-b+c < 0$ ；③ $ax^2+bx+c+1=0$ 有两个相等的实数根；④ $-4a < b < -2a$. 其中正确结论的序号为 ()



A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①④

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数的性质求解即可.

【详解】① $\because$ 抛物线开口向上，且与 y 轴交点为 $(0,-1)$

$$\therefore a > 0, c < 0$$

$$\because \text{对称轴 } -\frac{b}{2a} > 0$$

$$\therefore b < 0$$

$$\therefore abc > 0$$

$\therefore$ ①正确；

② 对称轴为 $x=t, 1 < t < 2$ ，抛物线与 x 轴的交点为 x_1, x_2 .

其中 x_1 为 $(m,0)$ ， x_2 为 $(n,0)$

由图可知 $2 < m < 3$ ，可知 $n > -1$ ，

则当 $x=-1$ 时， $y > 0$ ，

$$\text{则 } a-b+c > 0$$

则②错误；

③ 由图可知 $c=-1$

$$\Delta = b^2 - 4a(c+1) = b^2, \text{ 且 } b \neq 0$$

∴③错误

④由图可知，对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$

且 $1 < -\frac{b}{2a} < 2$

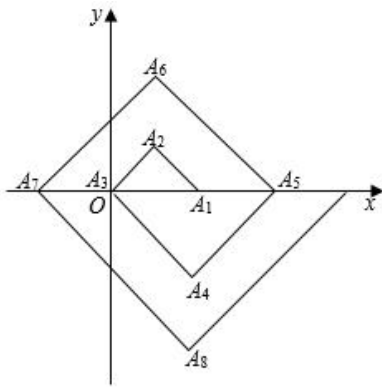
∴ $-4a < b < -2a$

故④正确；

故选 D.

【点睛】 本题考查的是二次函数，熟练掌握二次函数的图像是解题的关键.

12. 如图，在单位为 1 的方格纸上， $\triangle A_1A_2A_3$ ， $\triangle A_3A_4A_5$ ， $\triangle A_5A_6A_7$ ， $\cdots$ ，都是斜边在 x 轴上，斜边长分别为 2，4，6， $\cdots$ 的等腰直角三角形，若 $\triangle A_1A_2A_3$ 的顶点坐标分别为 $A_1(2,0)$ ， $A_2(1,1)$ ， $A_3(0,0)$ ，则依图中所示规律， A_{2019} 的坐标为 ()



A. $(-1008,0)$

B. $(-1006,0)$

C. $(2,-504)$

D. $(1,505)$

【答案】 A

【解析】

【分析】 观察图形可以看出 $A_1 - - A_4$ ； $A_5 - - - A_8$ ； $\cdots$ 每 4 个为一组，由于 $2019 \div 4 = 504 \cdots 3$ ， A_{2019} 在 x 轴负半轴上，纵坐标为 0，再根据横坐标变化找到规律即可解答.

【详解】 解：观察图形可以看出 $A_1 - - A_4$ ； $A_5 - - - A_8$ ； $\cdots$ 每 4 个为一组，

$\because 2019 \div 4 = 504 \cdots 3$ ，

$\therefore A_{2019}$ 在 x 轴负半轴上，纵坐标为 0，

$\because A_3$ 、 A_7 、 A_{11} 的横坐标分别为 0， -2 ， -4 ，

$\therefore A_{2019}$ 的横坐标为 $-(2019-3) \times \frac{1}{2} = -1008$.

$\therefore A_{2019}$ 的坐标为 $(-1008, 0)$.

故选：A.

【点睛】 本题考查了等腰直角三角形、点的坐标，解题的关键是主要是根据坐标变化找到规律，再依据规律解答.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分，不需写出解答过程请将答案直接写在答题卡相应位置上

13. 已知一组数据 8, 3, m, 2 的众数为 3，则这组数据的平均数是_____.

【答案】 4.

【解析】

【分析】 直接利用众数的定义得出 m 的值，进而求出平均数；

【详解】 解： $\because$ 一组数据 8, 3, m, 2 的众数为 3，

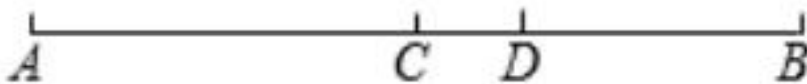
$\therefore m = 3$,

$\therefore$ 这组数据的平均数： $\frac{8+3+3+2}{4} = 4$,

故答案为 4.

【点睛】 此题主要考查平均数，解题的关键是熟知众数、平均数的定义.

14. 如图，已知 $AB = 8\text{cm}$ ， $BD = 3\text{cm}$ ，C 为 AB 的中点，则线段 CD 的长为_____cm.



【答案】 1

【解析】

【分析】 先根据中点定义求 BC 的长，再利用线段的差求 CD 的长.

【详解】 解： $\because$ C 为 AB 的中点， $AB = 8\text{cm}$,

$\therefore BC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ (cm)}$,

$\because BD = 3\text{cm}$,

$\therefore CD = BC - BD = 4 - 3 = 1 \text{ (cm)}$,

则 CD 的长为 1cm;

故答案为 1.

【点睛】 此题主要考查线段的长度，解题的关键是熟知线段长度的运算关系.

15. 规定：在平面直角坐标系 xOy 中，如果点 P 的坐标为 (a, b) ，那么向量 $\overrightarrow{OP}$ 可以表示为： $\overrightarrow{OP} = (a, b)$ ，如果 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 互相垂直， $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ ， $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ ，那么 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ 。若 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 互相垂直， $\overrightarrow{OM} = (\sin\alpha, 1)$ ， $\overrightarrow{ON} = (2, -\sqrt{3})$ ，则锐角 $\angle\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 60° 。

【解析】

【分析】根据平面向量垂直的判定方法得到： $2\sin\alpha + 1 \times (-\sqrt{3}) = 0$ ，结合特殊角的三角函数值解答。

【详解】解：依题意，得 $2\sin\alpha + 1 \times (-\sqrt{3}) = 0$ ，

$$\text{解得 } \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

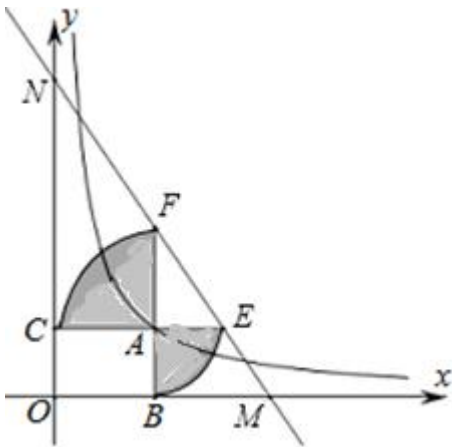
$\therefore \alpha$ 是锐角，

$\therefore \alpha = 60^\circ$ 。

故答案是： 60° 。

【点睛】此题主要考查三角函数的求解，解题的关键是根据题意得到三角函数的关系。

16. 如图，已知动点 A 在函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象上， $AB \perp x$ 轴于点 B ， $AC \perp y$ 轴于点 C ，延长 CA 交以 A 为圆心 AB 长为半径的圆弧于点 E ，延长 BA 交以 A 为圆心 AC 长为半径的圆弧于点 F ，直线 EF 分别交 x 轴、 y 轴于点 M 、 N ，当 $NF = 4EM$ 时，图中阴影部分的面积等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 2.5π 。

【解析】

【分析】作 $DF \perp y$ 轴于点 D ， $EG \perp x$ 轴于 G ，得到 $\triangle GEM \sim \triangle DNF$ ，于是得到 $\frac{DF}{GM} = \frac{NF}{EM} = 4$ ，设 $GM = t$ ，则 $DF = 4t$ ，然后根据 $\triangle AEF \sim \triangle GME$ ，据此即可得到关于 t 的方程，求得 t 的值，进而求解。

【详解】解：作 $DF \perp y$ 轴于点 D ， $EG \perp x$ 轴于 G ，

$$\therefore \triangle GEM \sim \triangle DNF,$$

$$\therefore NF = 4EM,$$

$$\therefore \frac{DF}{GM} = \frac{NF}{EM} = 4,$$

设 $GM = t$ ，则 $DF = 4t$ ，

$$\therefore A \left(4t, \frac{1}{t} \right),$$

由 $AC = AF$ ， $AE = AB$ ，

$$\therefore AF = 4t, \quad AE = \frac{1}{t}, \quad EG = \frac{1}{t},$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle GME,$$

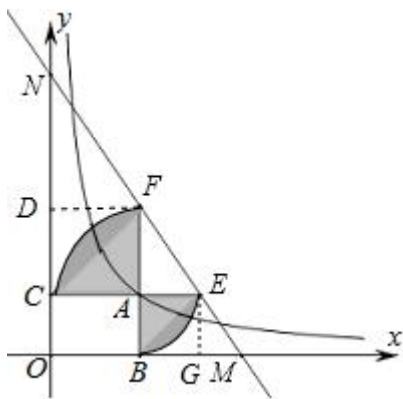
$$\therefore AF : EG = AE : GM,$$

$$\text{即 } 4t : \frac{1}{t} = \frac{1}{t} : t, \text{ 即 } 4t^2 = \frac{1}{t^2},$$

$$\therefore t^2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{图中阴影部分的面积} = \frac{90\pi \cdot (4t)^2}{360} + \frac{90\pi \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^2}{360} = 2\pi + \frac{1}{2}\pi = 2.5\pi,$$

故答案为 2.5π 。



【点睛】此题主要考查扇形面积的求解，解题的关键是熟知反比例函数、一次函数及相似三角形的判定与性质及扇形面积的求解。

三、解答题：本大题共 6 小题，满分 68 分。请在答题卡指定区域内作 16 题图答解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤

17. (1) 计算： $|\sqrt{3} - 2| + \pi^0 + (-1)^{2019} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$;

(2) 先化简，再求值： $1 - \frac{a+3}{a^2-1} \div \frac{a+3}{a-1}$ ，其中 $a=2$;

(3) 解方程组:
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

【答案】(1) $-\sqrt{3}$; (2) $\frac{a}{a+1}, \frac{2}{3}$; (3) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

【解析】

【分析】(1) 根据绝对值、零指数幂和负整数指数幂可以解答本题;

(2) 根据分式的除法和减法可以化简题目中的式子, 然后将 a 的值代入化简后的式子即可解答本题;

(3) 根据解方程组的方法可以解答此方程组.

【详解】解: (1) $|\sqrt{3} - 2| + \pi^0 + (-1)^{2019} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$$= 2 - \sqrt{3} + 1 + (-1) - 2$$

$$= -\sqrt{3};$$

$$(2) 1 - \frac{a+3}{a^2-1} \div \frac{a+3}{a-1}$$

$$= 1 - \frac{a+3}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a-1}{a+3}$$

$$= 1 - \frac{1}{a+1}$$

$$= \frac{a+1-1}{a+1}$$

$$= \frac{a}{a+1}$$

$$\text{当 } a=2 \text{ 时, 原式} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3};$$

$$(3) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases},$$

① $\times 4$ +②, 得

$$11x = 22,$$

解得, $x = 2$,

将 $x = 2$ 代入①中, 得

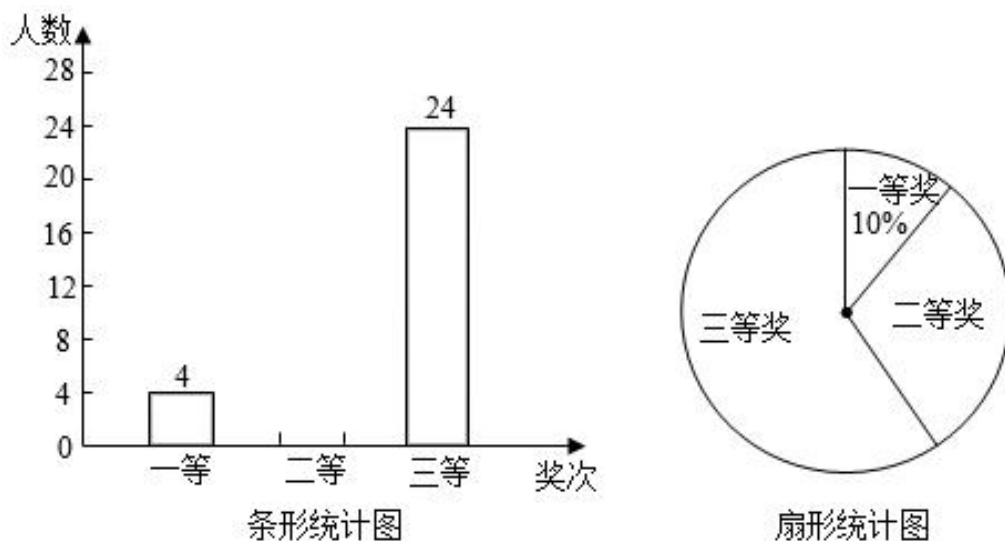
$$y = -1,$$

$$\text{故原方程组的解是 } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

【点睛】此题主要考查实数的运算与方程组的求解, 解题的关键是熟知实数的运算法则及加减消元法的运

用.

18. 2019 年 4 月 23 日是第二十四“世界读书日”. 某校组织读书征文比赛活动, 评选出一、二、三等奖若干名, 并绘成如图所示的条形统计图和扇形统计图 (不完整), 请你根据图中信息解答下列问题:



- (1) 求本次比赛获奖的总人数, 并补全条形统计图;
- (2) 求扇形统计图中“二等奖”所对应扇形的圆心角度数;
- (3) 学校从甲、乙、丙、丁 4 位一等奖获得者中随机抽取 2 人参加“世界读书日”宣传活动, 请用列表法或画树状图的方法, 求出恰好抽到甲和乙的概率.

【答案】 (1) 40, 补图详见解析; (2) 108° ; (3) $\frac{1}{6}$.

【解析】

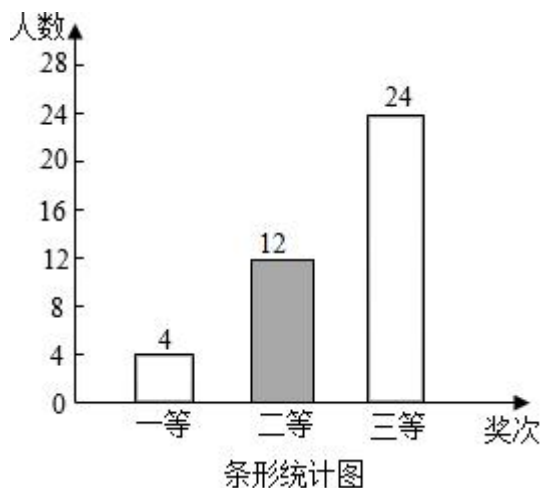
【分析】 (1) 由一等奖人数及其所占百分比可得总人数, 总人数减去一等奖、三等奖人数求出二等奖人数即可补全图形;

(2) 用 360° 乘以二等奖人数所占百分比可得答案;

(3) 画出树状图, 由概率公式即可解决问题.

【详解】 解: (1) 本次比赛获奖的总人数为 $4 \div 10\% = 40$ (人),
二等奖人数为 $40 - (4 + 24) = 12$ (人),

补全条形图如下:



(2) 扇形统计图中“二等奖”所对应扇形的圆心角度数为 $360^\circ \times \frac{12}{40} = 108^\circ$;

(3) 树状图如图所示,



$\therefore$ 从四人中随机抽取两人有 12 种可能, 恰好是甲和乙的有 2 种可能,

$\therefore$ 抽取两人恰好是甲和乙的概率是 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

【点睛】此题主要考查统计图的运用及概率的求解, 解题的关键是根据题意列出树状图, 再利用概率告诉求解.

19. “一带一路”战略给沿线国家和地区带来很大的经济效益, 某企业的产品对沿线地区实行优惠, 决定在原定价基础上每件降价 40 元, 这样按原定价需花费 5000 元购买的产品, 现在只花费了 4000 元, 求每件产品的实际定价是多少元?

【答案】每件产品的实际定价是 160 元.

【解析】

【分析】设每件产品的实际定价是 x 元, 则原定价为 $(x+40)$ 元, 根据“按原定价需花费 5000 元购买的产品, 现在只花费了 4000 元”建立方程, 解方程即可.

【详解】解: 设每件产品的实际定价是 x 元, 则原定价为 $(x+40)$ 元, 由题意, 得

$$\frac{5000}{x+40} = \frac{4000}{x}.$$

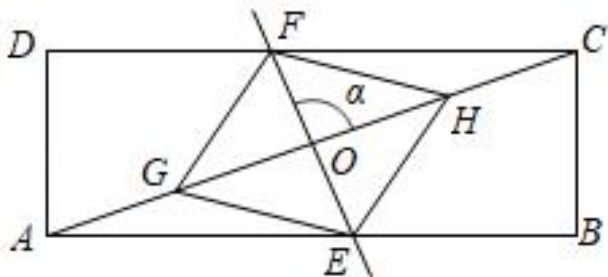
解得 $x = 160$.

经检验 $x = 160$ 是原方程的解，且符合题意.

答：每件产品的实际定价是 160 元.

【点睛】此题主要考查分式方程的应用，解题的关键是根据题意列出方程进行求解.

20. 如图，在矩形 ABCD 中，对角线 AC 的中点为 O，点 G, H 在对角线 AC 上， $AG = CH$ ，直线 GH 绕点 O 逆时针旋转 α 角，与边 AB、CD 分别相交于点 E、F（点 E 不与点 A、B 重合）.



(1) 求证：四边形 EHFG 是平行四边形；

(2) 若 $\angle \alpha = 90^\circ$ ， $AB = 9$ ， $AD = 3$ ，求 AE 的长.

【答案】(1) 详见解析；(2) $AE = 5$.

【解析】

【分析】(1) 由“ASA”可证 $\triangle COF \cong \triangle AOE$ ，可得 $EO = FO$ ，且 $GO = HO$ ，可证四边形 EHFG 是平行四边形；

(2) 由题意可得 EF 垂直平分 AC，可得 $AE = CE$ ，由勾股定理可求 AE 的长.

【详解】证明：(1) $\because$ 对角线 AC 的中点为 O

$$\therefore AO = CO, \text{ 且 } AG = CH$$

$$\therefore GO = HO$$

$\because$ 四边形 ABCD 是矩形

$$\therefore AD = BC, CD = AB, CD \parallel AB$$

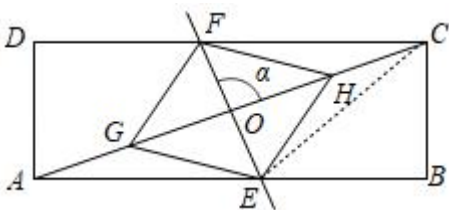
$$\therefore \angle DCA = \angle CAB, \text{ 且 } CO = AO, \angle FOC = \angle EOA$$

$$\therefore \triangle COF \cong \triangle AOE \text{ (ASA)}$$

$$\therefore FO = EO, \text{ 且 } GO = HO$$

$\therefore$ 四边形 EHFG 是平行四边形；

(2) 如图，连接 CE



$$\therefore \angle \alpha = 90^\circ,$$

$\therefore EF \perp AC$, 且 $AO = CO$

$\therefore EF$ 是 AC 的垂直平分线,

$\therefore AE = CE$,

在 $Rt\triangle BCE$ 中, $CE^2 = BC^2 + BE^2$,

$\therefore AE^2 = (9 - AE)^2 + 9$,

$\therefore AE = 5$

【点睛】此题主要考查特殊平行四边形的证明与性质, 解题的关键是熟知矩形的性质及勾股定理的运用.

21. 探究活动一:

如图 1, 某数学兴趣小组在研究直线上点的坐标规律时, 在直线 AB 上的三点 $A(1, 3)$ 、 $B(2, 5)$ 、 $C(4, 9)$,

有 $k_{AB} = \frac{5-3}{2-1} = 2$, $k_{AC} = \frac{9-3}{4-1} = 2$, 发现 $k_{AB} = k_{AC}$, 兴趣小组提出猜想: 若直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 上任

意两点坐标 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$), 则 $k_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 是定值. 通过多次验证和查阅资料得知, 猜

想成立, k_{PQ} 是定值, 并且是直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中的 k , 叫做这条直线的斜率.

请你应用以上规律直接写出过 $S(-2, -2)$ 、 $T(4, 2)$ 两点的直线 ST 的斜率 $k_{ST} = \underline{\hspace{2cm}}$.

探究活动二

数学兴趣小组继续深入研究直线的“斜率”问题, 得到正确结论: 任意两条不和坐标轴平行的直线互相垂直时, 这两条直线的斜率之积是定值.

如图 2, 直线 DE 与直线 DF 垂直于点 D , $D(2, 2)$, $E(1, 4)$, $F(4, 3)$. 请求出直线 DE 与直线 DF 的斜率之积.

综合应用

如图 3, $\odot M$ 为以点 M 为圆心, MN 的长为半径的圆, $M(1, 2)$, $N(4, 5)$, 请结合探究活动二的结论, 求出过点 N 的 $\odot M$ 的切线的解析式.

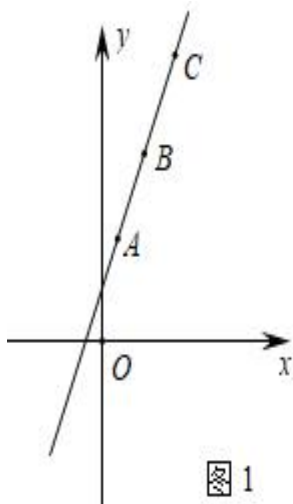


图 1

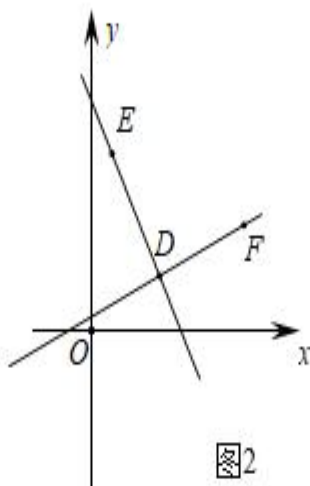


图 2

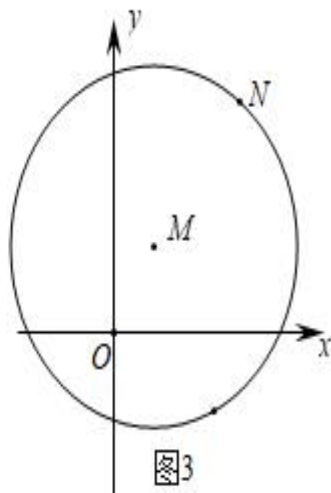


图 3

【答案】探究活动一： $\frac{2}{3}$ ；探究活动二： -1 ；综合应用： $y = -x+9$.

【解析】

【分析】(1) 直接利用公式计算即可；

(2) 运用公式分别求出 k_{DE} 和 k_{DF} 的值，再计算 $k_{DE} \times k_{DF} = -1$ ；

(3) 先求直线 MN 的斜率 k_{MN} ，根据切线性质可知 $PQ \perp MN$ ，可得直线 PQ 的斜率 k_{PQ} ，待定系数法即可求得直线 PQ 解析式.

【详解】解：(1) $\because S(-2, -2)$ 、 $T(4, 2)$

$$\therefore k_{ST} = \frac{2 - (-2)}{4 - (-2)} = \frac{2}{3}$$

故答案为 $\frac{2}{3}$

(2) $\because D(2, 2)$ ， $E(1, 4)$ ， $F(4, 3)$.

$$\therefore k_{DE} = \frac{4-2}{1-2} = -2, \quad k_{DF} = \frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore k_{DE} \times k_{DF} = -2 \times \frac{1}{2} = -1,$$

$\therefore$ 任意两条不和坐标轴平行的直线互相垂直时，这两条直线的斜率之积等于 -1 .

(3) 设经过点 N 与 $\odot M$ 的直线为 PQ，解析式为 $y = k_{PQ}x + b$

$\because M(1, 2)$ ， $N(4, 5)$,

$$\therefore k_{MN} = \frac{5-2}{4-1} = 1,$$

$\because PQ$ 为 $\odot M$ 的切线

$\therefore PQ \perp MN$

$$\therefore k_{PQ} \times k_{MN} = -1,$$

$$\therefore k_{PQ} = -1,$$

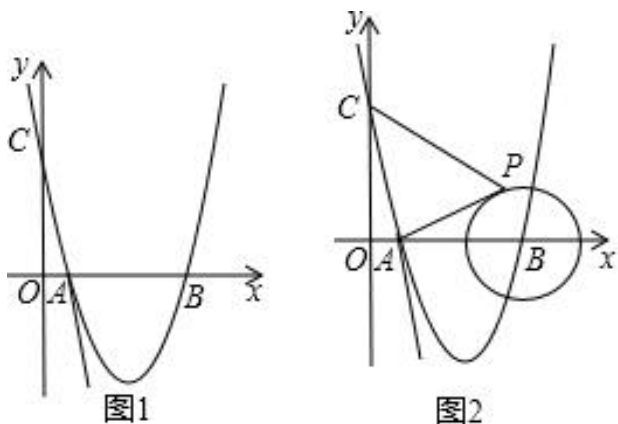
$\therefore$ 直线 PQ 经过点 N (4, 5),

$$\therefore 5 = -1 \times 4 + b, \text{ 解得 } b = 9$$

$\therefore$ 直线 PQ 的解析式为 $y = -x + 9$.

【点睛】此题主要考查直线与圆的关系，解题的关键是根据已知条件得到斜率的定义与求解方法.

22. 如图 1，在平面直角坐标系中，直线 $y = -5x + 5$ 与 x 轴， y 轴分别交于 A，C 两点，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 A，C 两点，与 x 轴的另一交点为 B



(1) 求抛物线解析式及 B 点坐标;

(2) 若点 M 为 x 轴下方抛物线上一动点，连接 MA、MB、BC，当点 M 运动到某一位置时，四边形 AMBC 面积最大，求此时点 M 的坐标及四边形 AMBC 的面积;

(3) 如图 2，若 P 点是半径为 2 的 $\odot B$ 上一动点，连接 PC、PA，当点 P 运动到某一位置时， $PC + \frac{1}{2} PA$ 的值最小，请求出这个最小值，并说明理由.

【答案】(1) $y = x^2 - 6x + 5$, B (5, 0); (2) 当 M (3, -4) 时，四边形 AMBC 面积最大，最大面积等于 18; (3) $PC + \frac{1}{2} PA$ 的最小值为 $\sqrt{41}$ ，理由详见解析.

【解析】

【分析】(1) 由直线 $y = -5x + 5$ 求点 A、C 坐标，用待定系数法求抛物线解析式，进而求得点 B 坐标.

(2) 从 x 轴把四边形 AMBC 分成 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABM$; 由点 A、B、C 坐标求 $\triangle ABC$ 面积; 设点 M 横坐标为 m ，过点 M 作 x 轴的垂线段 MH，则能用 m 表示 MH 的长，进而求 $\triangle ABM$ 的面积，得到 $\triangle ABM$ 面积与 m 的二次函数关系式，且对应的 a 值小于 0，配方即求得 m 为何值时取得最大值，进而求点 M 坐标和四边形 AMBC 的面积最大值.

(3) 作点 D 坐标为 (4, 0)，可得 $BD = 1$ ，进而有 $\frac{BD}{BP} = \frac{BP}{AB} = \frac{1}{2}$ ，再加上公共角 $\angle PBD = \angle ABP$ ，根据

两边对应成比例且夹角相等可证 $\triangle PBD \sim \triangle ABP$ ，得 $\frac{PD}{PA}$ 等于相似比 $\frac{1}{2}$ ，进而得 $PD = \frac{1}{2} AP$ ，所以当 C、P、D 在同一直线上时， $PC + \frac{1}{2} PA = PC + PD = CD$ 最小。用两点间距离公式即求得 CD 的长。

【详解】解：(1) 直线 $y = -5x + 5$ ， $x = 0$ 时， $y = 5$

$\therefore C(0, 5)$

$y = -5x + 5 = 0$ 时，解得： $x = 1$

$\therefore A(1, 0)$

$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 A、C 两点

$$\therefore \begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 0 + 0 + c = 5 \end{cases} \quad \text{解得：} \begin{cases} b = -6 \\ c = 5 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 6x + 5$

当 $y = x^2 - 6x + 5 = 0$ 时，解得： $x_1 = 1$ ， $x_2 = 5$

$\therefore B(5, 0)$

(2) 如图 1，过点 M 作 $MH \perp x$ 轴于点 H

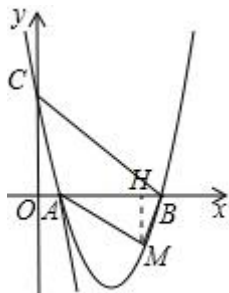


图1

$\therefore A(1, 0)$ ， $B(5, 0)$ ， $C(0, 5)$

$\therefore AB = 5 - 1 = 4$ ， $OC = 5$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$$

$\therefore$ 点 M 为 x 轴下方抛物线上的点

$\therefore$ 设 $M(m, m^2 - 6m + 5)$ ($1 < m < 5$)

$$\therefore MH = |m^2 - 6m + 5| = -m^2 + 6m - 5$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MH = \frac{1}{2} \times 4 \cdot (-m^2 + 6m - 5) = -2m^2 + 12m - 10 = -2(m - 3)^2 + 8$$

$$\therefore S_{\text{四边形 AMBC}} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABM} = 10 + [-2(m - 3)^2 + 8] = -2(m - 3)^2 + 18$$

$\therefore$ 当 $m = 3$ ，即 $M(3, -4)$ 时，四边形 AMBC 面积最大，最大面积等于 18

(3) 如图 2，在 x 轴上取点 D(4, 0)，连接 PD、CD

$$\therefore BD = 5 - 4 = 1$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】