

2018 年山东省日照市中考数学试卷（解析版）

一、选择题

1. $|-5|$ 的相反数是（ ）

- A. -5 B. 5 C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】先化简 $|-5|=5$ ，再求 5 的相反数即可.

【详解】解： $-|-5|=-5$

故选：A.

【点睛】此题主要考查求一个式子的相反数，关键是化简式子.

2. 在下列图案中，既是轴对称又是中心对称图形的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】根据中心对称图形和轴对称图形的概念对各选项分析判断即可得解.

【详解】A、既不是轴对称图形又不是中心对称图形，故不符合题意；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合题意；

C、既是轴对称图形又是中心对称图形，符合题意；

D、是中心对称图形，不是轴对称图形，故不符合题意，

故选 C.

【点睛】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念. 熟练掌握相关定义是解题的关键. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后两部分重合.

3. 下列各式中，运算正确的是（ ）

- A. $(a^3)^2=a^5$ B. $(a-b)^2=a^2-b^2$ C. $a^6 \div a^2=a^4$ D. $a^2+a^2=2a^4$

【答案】C

【解析】

【分析】根据幂的乘方、完全平方公式、同底数幂的除法、合并同类项法则依次计算各选项后即可解答.

【详解】选项 A， $(a^3)^2=a^6$ ；

选项 B， $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ；

选项 C， $a^6 \div a^2=a^4$ ；

选项 D， $a^2+a^2=2a^2$ ．

由此可得只有选项 C 正确，故选 C．

【点睛】本题主要考查了幂的乘方、完全平方公式、同底数幂的除法、合并同类项法则等知识点的理解和掌握，能根据这些性质正确进行计算是解此题的关键．

4. 若式子 $\frac{\sqrt{m+2}}{(m-1)^2}$ 有意义，则实数 m 的取值范围是（ ）

A. $m > -2$

B. $m > -2$ 且 $m \neq 1$

C. $m \geq -2$

D. $m \geq -2$ 且 $m \neq 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件即可求出答案．

【详解】由题意可知：
$$\begin{cases} m+2 \geq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases},$$

$\therefore m \geq -2$ 且 $m \neq 1$ ，

故选 D．

【点睛】本题考查二次根式有意义的条件，解题的关键是熟练运用二次根式的条件．

5. 某校为了解学生的课外阅读情况，随机抽取了一个班级的学生，对他们一周的读书时间进行了统计，统计数据如下表所示：

读书时间（小时）	7	8	9	10	11
学生人数	6	10	9	8	7

则该班学生一周读书时间的中位数和众数分别是（ ）

A. 9，8

B. 9，9

C. 9.5，9

D. 9.5，8

【答案】A

【解析】

【分析】根据表格中的数据可知该班有学生 40 人，根据中位数定义可求得中位数，再根据读书时间最多的人数根据众数的概念即可求得众数．

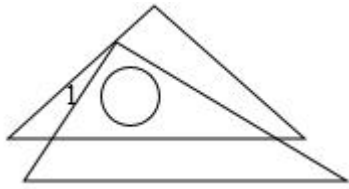
【详解】由表格可得，

该班学生一周读书时间的中位数和众数分别是：9、8，

故选 A.

【点睛】 本题考查了众数、中位数，明确题意，熟练掌握中位数、众数的概念以及求解方法是解题的关键.

6. 如图，将一副直角三角板按图中所示位置摆放，保持两条斜边互相平行，则 $\angle 1$ 的度数是 ()



A. 30°

B. 25°

C. 20°

D. 15°

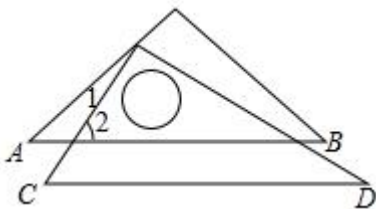
【答案】 D

【解析】

【详解】 解： $\because AB \parallel CD$ ， $\therefore \angle C = \angle 2 = 60^\circ$ ，

$\because \angle A = 45^\circ$ ， $\therefore \angle 1 = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ ，

故选 D.



7. 计算： $(\frac{1}{2})^{-1} + \tan 30^\circ \cdot \sin 60^\circ =$ ()

A. $-\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 按顺序进行负指数幂的运算、代入特殊角的三角函数值，然后再按运算顺序进行计算即可得.

【详解】 $(\frac{1}{2})^{-1} + \tan 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$

$$= 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{2},$$

故选 C.

【点睛】 本题考查了实数的运算，涉及了负指数幂、特殊角的三角函数值等，熟练掌握各运算的运算法则

是解题的关键.

8. 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于点 O , $AO = CO$, $BO = DO$, 添加下列条件, 不能判定四边形 $ABCD$ 是菱形的是 ().

- A. $AB = AD$ B. $AC = BD$ C. $AC \perp BD$ D. $\angle ABO = \angle CBO$

【答案】B

【解析】

【分析】由 $AO = CO$, $BO = DO$, 证出四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

- A. $AB = AD$, 根据邻边相等的平行四边形, 可证四边形 $ABCD$ 是菱形;
B. $AC = BD$, 对角线相等的平行四边形是矩形, 不能证四边形 $ABCD$ 是菱形;
C. $AC \perp BD$, 根据对角线互相垂直的平行四边形是菱形, 可证四边形 $ABCD$ 是菱形;
D. $\angle ABO = \angle CBO$, 证 $\angle ABO = \angle ADO$, 根据等角对等边可证 $AB = AD$, 即可证得四边形 $ABCD$ 是菱形.

【详解】 $\because AO = CO$, $BO = DO$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

A. $\because AB = AD$, $\therefore \square ABCD$ 是菱形;

B. $\because AC = BD$, $\therefore \square ABCD$ 是矩形, 不是菱形;

C. $\because AC \perp BD$, $\therefore \square ABCD$ 是菱形;

D. $\angle ABO = \angle CBO$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle DBC$

$\therefore \angle ABO = \angle ADO$

$\therefore AB = AD$

$\therefore \square ABCD$ 是菱形;

故本题的答案是: B

【点睛】 本题考查了特殊四边形菱形的证明, 平行四边形的证明, 矩形的证明, 注意对这些证明的理解, 容易混淆, 小心区别对比.

9. 已知反比例函数 $y = -\frac{8}{x}$, 下列结论: ①图象必经过 $(-2, 4)$; ②图象在二, 四象限内; ③ y 随 x 的增大而增大; ④当 $x > -1$ 时, 则 $y > 8$. 其中错误的结论有 () 个

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质，逐一进行判断即可得答案.

【详解】①当 $x = -2$ 时， $y = 4$ ，即图象必经过点 $(-2, 4)$ ；

② $k = -8 < 0$ ，图象在第二、四象限内；

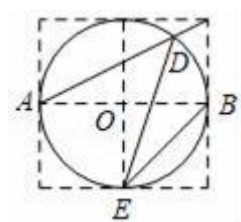
③ $k = -8 < 0$ ，每一象限内， y 随 x 的增大而增大，错误；

④ $k = -8 < 0$ ，每一象限内， y 随 x 的增大而增大，若 $0 > x > -1$ ， $-y > 8$ ，故④错误，

故选 B.

【点睛】本题考查了反比例函数的性质，熟练掌握反比例函数的性质是解题关键.

10. 如图，边长为 1 的小正方形构成的网格中，半径为 1 的 $\odot O$ 的圆心 O 在格点上，则 $\angle BED$ 的正切值等于 ()



A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据同弧或等弧所对的圆周角相等可知 $\angle BED = \angle BAD$ ，再结合图形根据正切的定义进行求解即可得.

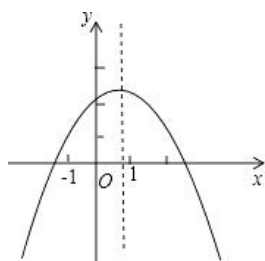
【详解】 $\because \angle DAB = \angle DEB$,

$$\therefore \tan \angle DEB = \tan \angle DAB = \frac{1}{2},$$

故选 D.

【点睛】本题考查了圆周角定理（同弧或等弧所对的圆周角相等）和正切的概念，正确得出相等的角是解题关键.

11. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示，下列结论：① $2a + b < 0$ ；② $abc > 0$ ；③ $4a - 2b + c > 0$ ；④ $a + c > 0$ ，其中正确结论的个数为 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 B

【解析】

【分析】根据抛物线的开口方向和对称轴判断①；根据抛物线与 y 轴的交点和对称轴判断②；根据 $x=-2$ 时， $y<0$ 判断③；根据 $x=\pm 1$ 时， $y>0$ 判断④.

【详解】① $\because$ 抛物线开口向下，

$$\therefore a<0,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a}<1,$$

$$\therefore 2a+b<0, \text{ ①正确;}$$

②抛物线与 y 轴交于正半轴，

$$\therefore c>0,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a}>0, \quad a<0,$$

$$\therefore b>0,$$

$$\therefore abc<0, \text{ ②错误;}$$

③当 $x=-2$ 时， $y<0$ ，

$$\therefore 4a-2b+c<0, \text{ ③错误;}$$

$x=\pm 1$ 时， $y>0$ ，

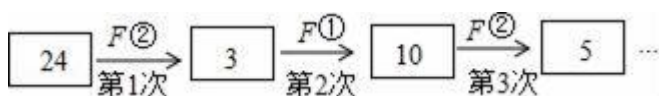
$$\therefore a-b+c>0, \quad a+b+c>0,$$

$$\therefore a+c>0, \text{ ④正确,}$$

故选 B

【点睛】 本题考核知识点： 二次函数图象与系数的关系. 解题关键点： 理解二次函数图象与系数的关系.

12. 定义一种对正整数 n 的“F”运算： ①当 n 为奇数时， $F(n)=3n+1$ ； ②当 n 为偶数时， $F(n)=\frac{n}{2^k}$ （其中 k 是使 $F(n)$ 为奇数的正整数）……，两种运算交替重复进行，例如，取 $n=24$ ，则：



若 $n=13$ ，则第 2018 次“F”运算的结果是（ ）

- A. 1 B. 4 C. 2018 D. 4^{2018}

【答案】 A

【解析】

【分析】计算出 $n=13$ 时第一、二、三、四、五、六次运算的结果，找出规律再进行解答即可.

【详解】若 $n=13$,

第 1 次结果为: $3n+1=40$,

第 2 次结果是: $\frac{40}{2^3}=5$,

第 3 次结果为: $3n+1=16$,

第 4 次结果为: $\frac{16}{2^4}=1$,

第 5 次结果为: 4,

第 6 次结果为: 1,

...

可以看出, 从第四次开始, 结果就只是 1, 4 两个数轮流出现,

且当次数为偶数时, 结果是 1; 次数是奇数时, 结果是 4,

而 2018 次是偶数, 因此最后结果是 1,

故选 A.

【点睛】本题考查了规律题——数字的变化类, 能根据所给条件得出 $n=13$ 时六次的运算结果, 找出规律是解答此题的关键.

二、填空题

13. 一个角是 $70^{\circ}39'$, 则它的余角的度数是__.

【答案】 $19^{\circ}21'$

【解析】

【分析】根据余角的定义列式进行计算即可.

【详解】一个角是 $70^{\circ}39'$,

则它的余角 $=90^{\circ}-70^{\circ}39'=19^{\circ}21'$,

故答案为 $19^{\circ}21'$.

【点睛】本题考查了余角和补角以及度分秒的换算, 掌握互余两角的和为 90 度是解题的关键.

14. 为创建“国家生态园林城市”, 某小区在规划设计时, 在小区中央设置一块面积为 1200 平方米的矩形绿地, 并且长比宽多 40 米. 设绿地宽为 x 米, 根据题意, 可列方程为_____.

【答案】 $x(x+40)=1200$.

【解析】

【分析】先表示出矩形场地的长，再根据矩形的面积公式即可列出方程.

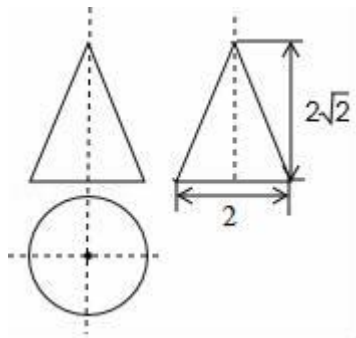
【详解】由题意可得，

$$x(x+40)=1200,$$

故答案是： $x(x+40)=1200$.

【点睛】考查由实际问题抽象出一元二次方程，解题的关键是明确题意，列出相应的方程.

15. 如图是一个几何体的三视图（图中尺寸单位：cm），根据图中所示数据计算这个几何体的表面积是__.



【答案】 $4\pi\text{cm}^2$,

【解析】

【分析】由主视图和左视图确定是柱体，锥体还是球体，再由俯视图确定具体形状，确定圆锥的母线长和底面半径，从而确定其表面积.

【详解】由主视图和左视图为三角形判断出是锥体，由俯视图是圆形可判断出这个几何体应该是圆锥；

根据三视图知：该圆锥的母线长为 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3\text{cm}$ ，底面半径为 1cm ，

$$\text{故表面积} = \pi rl + \pi r^2 = \pi \times 1 \times 3 + \pi \times 1^2 = 4\pi\text{cm}^2,$$

故答案为 $4\pi\text{cm}^2$.

【点睛】本题考查了由三视图还原几何体以及圆锥的表面积，掌握常见几何体的三视图以及圆锥的表面积公式是解本题的关键.

16. 在平面直角坐标系中，我们把横、纵坐标均为整数的点叫做整点. 已知反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ($m < 0$) 与 $y = x^2 - 4$ 在第四象限内围成的封闭图形（包括边界）内的整点的个数为2，则实数 m 的取值范围为__.

【答案】 $-2 \leq m < -1$.

【解析】

【分析】根据题意可知抛物线在第四象限内的部分，然后根据反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ($m < 0$) 与 $y = x^2 - 4$ 在第四象限内围成的封闭图形（包括边界）内的整点的个数为2，可以得到不等式组，从而可以求得 m 的取值范围.

【详解】 $\because y = x^2 - 4$,

∴ 当 $x=0$ 时, $y=-4$, 当 $y=0$ 时, $x=\pm 2$, 当 $x=1$ 时, $y=-3$,

∴ 抛物线 $y=x^2-4$ 在第四象限内的部分是 $(0, -4)$ 到 $(2, 0)$ 这一段曲线部分,

∴ 反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ ($m<0$) 与 $y=x^2-4$ 在第四象限内围成的封闭图形 (包括边界) 内的整点的个数为 2,

$$\therefore \begin{cases} \frac{m}{1} \geq -2 \\ \frac{m}{1} < -1 \end{cases},$$

解得, $-2 \leq m < -1$,

故答案为 $-2 \leq m < -1$.

【点睛】 本题考查反比例函数的性质、二次函数的性质, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用不等式的性质解答.

三、解答题

17. (1) 实数 x 取哪些整数时, 不等式 $2x-1 > x+1$ 与 $\frac{1}{2}x-1 \leq 7-\frac{3}{2}x$ 都成立?

(2) 化简: $\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right) \div \frac{x-4}{x}$, 并从 $0 \leq x \leq 4$ 中选取一个合适的

整数代入求值.

【答案】 (1) 整数 x 的值为 3、4; (2) 当 $x=1$ 时, 原式=1; 当 $x=3$ 时, 原式=1.

【解析】

【分析】 (1) 解不等式组 $\begin{cases} 2x-1 > x+1 & \text{①} \\ \frac{1}{2}x-1 \leq 7-\frac{3}{2}x & \text{②} \end{cases}$, 即可; (2) 根据分式的混合运算法则化简, 再选取适当整数

代入求值即可.

【详解】 解: (1) 根据题意可得不等式组

$$\begin{cases} 2x-1 > x+1 & \text{①} \\ \frac{1}{2}x-1 \leq 7-\frac{3}{2}x & \text{②} \end{cases},$$

解不等式①, 得: $x > 2$,

解不等式②, 得: $x \leq 4$,

所以不等式组的解集为 $2 < x \leq 4$,

则整数 x 的值为 3、4;

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 原式} &= \left[\frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{x-1}{(x-2)^2} \right] \cdot \frac{x}{x-4} \\
 &= \left[\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2} - \frac{x(x-1)}{x(x-2)^2} \right] \cdot \frac{x}{x-4} \\
 &= \frac{x^2-4-x^2+x}{x(x-2)^2} \cdot \frac{x}{x-4} \\
 &= \frac{x-4}{x(x-2)^2} \cdot \frac{x}{x-4} \\
 &= \frac{1}{(x-2)^2}, \\
 &\therefore \begin{cases} x \neq 0 \\ x-2 \neq 0, \\ x-4 \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\therefore x \neq 0$ 且 $x \neq 2$ 、 $x \neq 4$,

$\therefore$ 在 $0 \leq x \leq 4$ 中, 可取的整数为 $x=1$ 、 $x=3$,

当 $x=1$ 时, 原式=1;

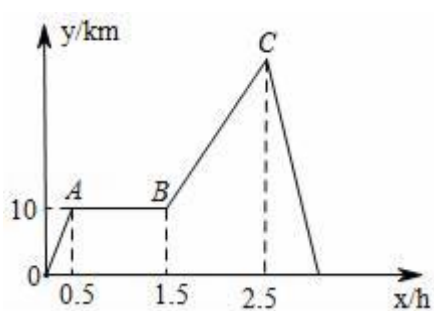
当 $x=3$ 时, 原式=1.

【点睛】本题考查知识点：分式的运算. 解题关键点：解不等式组求出整数，熟记分式的性质.

18. “低碳生活，绿色出行”的理念已深入人心，现在越来越多的人选择骑自行车上下班或外出旅游. 周末，小红相约到郊外游玩，她从家出发 0.5 小时后到达甲地，玩一段时间后按原速前往乙地，刚到达乙地，接到妈妈电话，快速返回家中. 小红从家出发到返回家中，行进路程 y (km) 随时间 x (h) 变化的函数图象大致如图所示.

(1) 小红从甲地到乙地骑车的速度为____km/h;

(2) 当 $1.5 \leq x \leq 2.5$ 时，求出路程 y (km) 关于时间 x (h) 的函数解析式；并求乙地离小红家多少千米？



【答案】(1) 20; (2) 乙地离小红家 30 千米.

【解析】

【分析】(1) 求出 OA 段的速度即可得出结论;

(2) 当 $1.5 \leq x \leq 2.5$ 时，设 $y=20x+b$ ，利用待定系数法即可解决问题.

【详解】(1) 在 OA 段，速度 $= \frac{10}{0.5} = 20 \text{ km/h}$ ，

故答案为：20；

(2) 当 $1.5 \leq x \leq 2.5$ 时，设 $y = 20x + b$ ，把 $(1.5, 10)$ 代入得到， $10 = 20 \times 1.5 + b$ ，

解得 $b = -20$ ，

$\therefore y = 20x - 20$ ，

当 $x = 2.5$ 时，解得 $y = 30$ ，

$\therefore$ 乙地离小红家 30 千米.

【点睛】本题考查一次函数的应用，读懂图象信息，掌握待定系数法是解题的关键.

19. (1) 某校招聘教师一名，现有甲、乙、丙三人通过专业知识、讲课、答辩三项测试，他们各自的成绩如下表所示：

应聘者	专业知识	讲课	答辩
甲	70	85	80
乙	90	85	75
丙	80	90	85

按照招聘简章要求，对专业知识、讲课、答辩三项赋权 5：4：1. 请计算三名应聘者的平均成绩，从成绩看，应该录取谁？

(2) 我市举行了某学科实验操作考试，有 A、B、C、D 四个实验，规定每位学生只参加其中一个实验的考试，并由学生自己抽签决定具体的考试实验. 小王，小张，小厉都参加了本次考试.

①小厉参加实验 D 考试的概率是_____；

②用列表或画树状图的方法求小王、小张抽到同一个实验的概率.

【答案】(1) 见解析；(2) ① $\frac{1}{4}$ ；②小王、小张抽到同一个实验的概率为 $\frac{1}{4}$.

【解析】

【分析】(1)由加权平均数公式求解即可；(2) 直接运用简单概率求法可得结果 $\frac{1}{4}$ ；用列表法列出所有可能情况，再计算概率.

【详解】解：(1) $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{70 \times 5 + 85 \times 4 + 80 \times 1}{5 + 4 + 1} = 77$ 分

$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{90 \times 5 + 85 \times 4 + 75 \times 1}{5 + 4 + 1} = 86.5$ 分

$$\bar{x}_{\text{丙}} = \frac{80 \times 5 + 90 \times 4 + 85 \times 1}{5+4+1} = 84.5 \text{ 分}$$

因为乙的平均成绩最高，

所以应该录取乙；

(2) ①小厉参加实验 D 考试的概率是 $\frac{1}{4}$ ，

故答案为 $\frac{1}{4}$ ；

②解：列表如下：

	A	B	C	D
A	AA	BA	CA	DA
B	AB	BB	CB	DB
C	AC	BC	CC	DC
D	AD	BD	CD	DD

所有等可能的情况有 16 种，其中两位同学抽到同一实验的情况有 AA，BB，CC，DD，4 种情况，

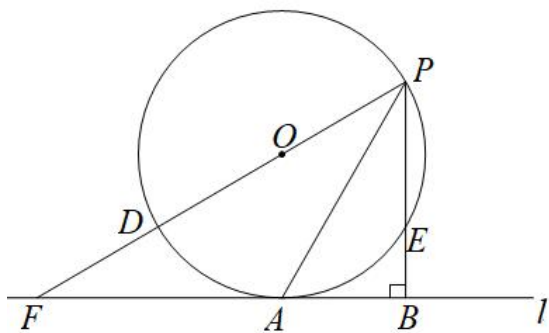
所以小王、小张抽到同一个实验的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ 。

【点睛】本题考查知识点：加权平均数，概率。解题关键点：熟记加权平均数公式，用列举法求概率。

20. 如图所示， $\odot O$ 的半径为 4，点 A 是 $\odot O$ 上一点，直线 l 过点 A；P 是 $\odot O$ 上的一个动点（不与点 A 重合），过点 P 作 $PB \perp l$ 于点 B，交 $\odot O$ 于点 E，直径 PD 延长线交直线 l 于点 F，点 A 是 $\widehat{DE}$ 的中点。

(1) 求证：直线 l 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $PA=6$ ，求 PB 的长。



【答案】(1) 证明见解析；(2) $PB = \frac{9}{2}$ 。

【解析】

【分析】(1) 如图，连接 DE，OA，根据垂径定理证明 $OA \perp BF$ 即可；

(2) 如图，作 $OH \perp PA$ 于 H，只要证明 $\triangle AOH \sim \triangle PAB$ ，可得 $\frac{OA}{PA} = \frac{AH}{PB}$ ，即可解决问题.

【详解】(1) 如图，连接 DE，OA，

$\because PD$ 是直径，

$\therefore \angle DEP = 90^\circ$ ，

$\because PB \perp FB$ ，

$\therefore \angle DEP = \angle FBP$ ，

$\therefore DE \parallel BF$ ，

$\because \widehat{AD} = \widehat{AE}$ ，

$\therefore OA \perp DE$ ，

$\therefore OA \perp BF$ ，

$\therefore$ 直线 l 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 如图，作 $OH \perp PA$ 于 H，

$\because OA = OP$ ， $OH \perp PA$ ，

$\therefore AH = PH = 3$ ，

$\because OA \parallel PB$ ，

$\therefore \angle OAH = \angle APB$ ，

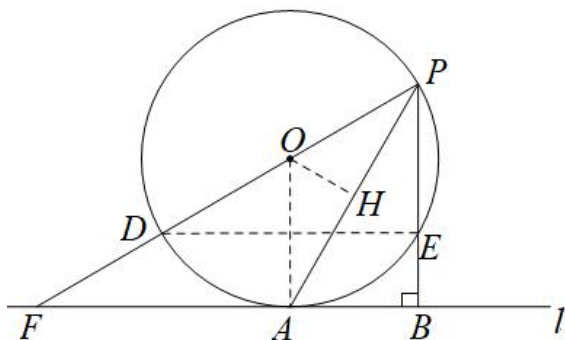
$\because \angle AHO = \angle ABP = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AOH \sim \triangle PAB$ ，

$\therefore \frac{OA}{PA} = \frac{AH}{PB}$ ，

$\therefore \frac{4}{6} = \frac{3}{PB}$ ，

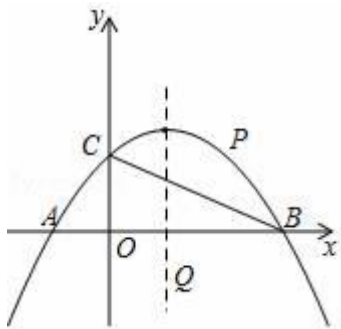
$\therefore PB = \frac{9}{2}$.



【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质、垂径定理、切线的判定等，正确添加辅助线、熟练掌握和运用相关知识是解题的关键．

21. 如图，已知点 A (-1, 0), B (3, 0), C (0, 1) 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上.

- (1) 求抛物线解析式；
- (2) 在直线 BC 上方的抛物线上求一点 P, 使 $\triangle PBC$ 面积为 1；
- (3) 在 x 轴下方且在抛物线对称轴上, 是否存在一点 Q, 使 $\angle BQC = \angle BAC$? 若存在, 求出 Q 点坐标; 若不存在, 说明理由.



【答案】(1) 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$; (2) 点 P 的坐标为 $(1, \frac{4}{3})$ 或 $(2, 1)$; (3) 存在, 理由见解析.

【解析】

【分析】(1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x+1)(x-3)$, 将 C (0, 1) 代入求得 a 的值即可;

(2) 过点 P 作 $PD \perp x$, 交 BC 与点 D, 先求得直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + 1$, 设点 P $(x, -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1)$, 则 D $(x, -\frac{1}{3}x + 1)$, 然后可得到 PD 与 x 之间的关系式, 接下来, 依据 $\triangle PBC$ 的面积为 1 列方程求解即可;

(3) 首先依据点 A 和点 C 的坐标可得到 $\angle BQC = \angle BAC = 45^\circ$, 设 $\triangle ABC$ 外接圆圆心为 M, 则 $\angle CMB = 90^\circ$, 设 $\odot M$ 的半径为 x, 则 $Rt\triangle CMB$ 中, 依据勾股定理可求得 $\odot M$ 的半径, 然后依据外心的性质可得到点 M 为直线 $y = -x$ 与 $x = 1$ 的交点, 从而可求得点 M 的坐标, 然后由点 M 的坐标以及 $\odot M$ 的半径可得到点 Q 的坐标.

【详解】(1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x+1)(x-3)$, 将 C (0, 1) 代入得 $-3a = 1$, 解得: $a = -\frac{1}{3}$,
 $\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$;

(2) 过点 P 作 $PD \perp x$, 交 BC 与点 D,

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$, 则 $\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$, 解得: $k = -\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + 1$,

设点 $P(x, -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1)$, 则 $D(x, -\frac{1}{3}x + 1)$,

$$\therefore PD = (-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1) - (-\frac{1}{3}x + 1) = -\frac{1}{3}x^2 + x,$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}OB \cdot DP = \frac{1}{2} \times 3 \times (-\frac{1}{3}x^2 + x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x,$$

又 $\because S_{\triangle PBC} = 1$,

$$\therefore -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x = 1, \text{ 整理得: } x^2 - 3x + 2 = 0, \text{ 解得: } x = 1 \text{ 或 } x = 2,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1, \frac{4}{3})$ 或 $(2, 1)$;

(3) 存在.

$\because A(-1, 0), C(0, 1)$,

$\therefore OC = OA = 1$,

$\therefore \angle BAC = 45^\circ$,

$\therefore \angle BQC = \angle BAC = 45^\circ$,

$\therefore$ 点 Q 为 $\triangle ABC$ 外接圆与抛物线对称轴在 x 轴下方的交点,

设 $\triangle ABC$ 外接圆圆心为 M , 则 $\angle CMB = 90^\circ$,

设 $\odot M$ 的半径为 x , 则 $Rt\triangle CMB$ 中, 由勾股定理可知 $CM^2 + BM^2 = BC^2$, 即 $2x^2 = 10$,

解得: $x = \sqrt{5}$ (负值已舍去),

$\therefore AC$ 的垂直平分线为直线 $y = -x$, AB 的垂直平分线为直线 $x = 1$,

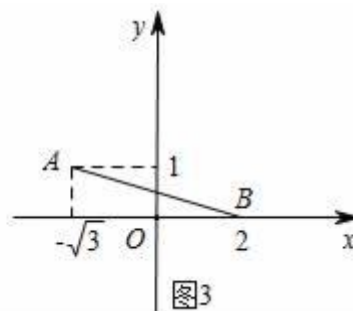
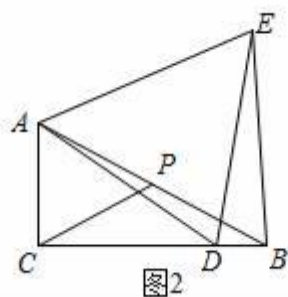
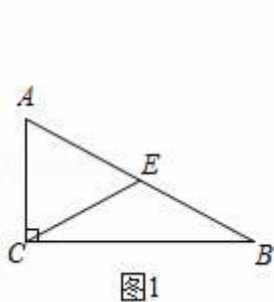
$\therefore$ 点 M 为直线 $y = -x$ 与 $x = 1$ 的交点, 即 $M(1, -1)$,

$\therefore Q$ 的坐标为 $(1, -1 - \sqrt{5})$.

【点睛】 本题考查的是二次函数的综合应用, 涉及了待定系数法求二次函数的解析式、三角形的外心的性质, 求得点 M 的坐标以及 $\odot M$ 的半径的长度是解题的关键.

22. 问题背景: 我们学习等边三角形时得到直角三角形的一个性质: 在直角三角形中, 如果一个锐角等于 30° , 那么它所对的直角边等于斜边的一半. 即: 如图 1, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, 则:

$$AC = \frac{1}{2}AB.$$



探究结论：小明同学对以上结论作了进一步研究.

(1) 如图 1, 连接 AB 边上中线 CE, 由于 $CE = \frac{1}{2} AB$, 易得结论: ① $\triangle ACE$ 为等边三角形; ② BE 与 CE 之间的数量关系为_____.

(2) 如图 2, 点 D 是边 CB 上任意一点, 连接 AD, 作等边 $\triangle ADE$, 且点 E 在 $\angle ACB$ 的内部, 连接 BE. 试探究线段 BE 与 DE 之间的数量关系, 写出你的猜想并加以证明.

(3) 当点 D 为边 CB 延长线上任意一点时, 在 (2) 条件的基础上, 线段 BE 与 DE 之间存在怎样的数量关系? 请直接写出你的结论_____.

拓展应用: 如图 3, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 1)$, 点 B 是 x 轴正半轴上的一动点, 以 AB 为边作等边 $\triangle ABC$, 当 C 点在第一象限内, 且 B $(2, 0)$ 时, 求 C 点的坐标.

【答案】(1) $EC=EB$; (2) $ED=EB$, 理由见解析; (3) $ED=EB$; 拓展应用: $C(1, 2+\sqrt{3})$.

【解析】

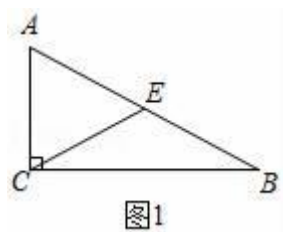
【分析】探究结论: (1) 只要证明 $\triangle ACE$ 是等边三角形即可解决问题;

(2) 如图 2 中, 结论: $ED=EB$. 想办法证明 EP 垂直平分线段 AB 即可解决问题;

(3) 结论不变, 证明方法类似;

拓展应用: 利用 (2) 中结论, 可得 $CO=CB$, 设 C $(1, n)$, 根据 $OC=CB=AB$, 构建方程即可解决问题.

【详解】探究结论 (1), 如图 1 中,



$$\therefore \angle ACB=90^{\circ}, \angle B=30^{\circ},$$

$$\therefore \angle A=60^{\circ},$$

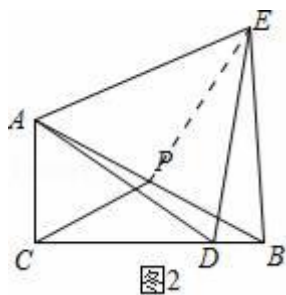
$$\therefore AC=\frac{1}{2} AB=AE=EB,$$

$$\therefore \triangle ACE \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore EC=AE=EB,$$

故答案为: $EC=EB$;

(2) 如图 2 中, 结论: $ED=EB$.



理由：连接 PE，

$\because \triangle ACP, \triangle ADE$ 都是等边三角形，

$\therefore AC=AD=DE, AD=AE, \angle CAP=\angle DAE=60^\circ$ ，

$\therefore \angle CAD=\angle PAE$ ，

$\therefore \triangle CAD \cong \triangle PAE$ ，

$\therefore \angle ACD=\angle APE=90^\circ$ ，

$\therefore EP \perp AB, \therefore PA=PB$ ，

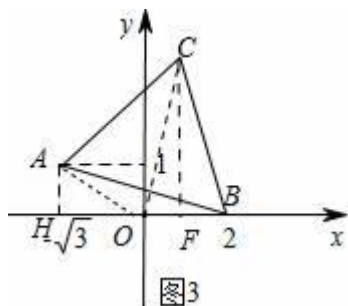
$\therefore EA=EB, \therefore DE=AE$ ，

$\therefore ED=EB$ ；

(3) 当点 D 为边 CB 延长线上任意一点时，同法可证：ED=EB，

故答案为：ED=EB；

拓展应用：如图 3 中，作 $AH \perp x$ 轴于 H， $CF \perp OB$ 于 F，连接 OA，



$\therefore A(-\sqrt{3}, 1)$ ，

$\therefore \angle AOH=30^\circ$ ，

由 (2) 可知， $CO=CB$ ，

$\therefore CF \perp OB$ ，

$\therefore OF=FB=1$ ，

$\therefore$ 可以假设 $C(1, n)$ ，

$\therefore OC=BC=AB$ ，

$\therefore 1+n^2=1+(\sqrt{3}+2)^2$ ，

$$\therefore n=2+\sqrt{3},$$

$$\therefore C(1, 2+\sqrt{3}).$$

【点睛】 本题考查三角形综合题、等边三角形的判定和性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理、线段的垂直平分线的性质等知识，正确添加常用辅助线，构造全等三角形是解决问题的关键.

