

二〇二二年东营市初中学业水平考试

数学试题

(总分 120 分 考试时间 120 分钟)

注意事项:

- 1.本试题分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分,第Ⅰ卷为选择题,30分;第Ⅱ卷为非选择题,90分;本试题共6页.
- 2.数学试题答题卡共8页.答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号、座号等填写在试题和答题卡上,考试结束,试题和答题卡一并收回.
- 3.第Ⅰ卷每题选出答案后,都必须用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号【ABCD】涂黑.如需改动,先用橡皮擦干净,再改涂其它答案.第Ⅱ卷按要求用0.5mm碳素笔答在答题卡的相应位置上.

第Ⅰ卷(选择题 共30分)

一、选择题:本大题共10小题,在每小题给出的四个选项中,只有一项是正确的,请把正确的选项选出来.每小题选对得3分,选错、不选或选出的答案超过一个均记零分.

1. -2的绝对值是()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -2

【答案】A

【解析】

【分析】根据数轴上某个数与原点的距离叫做这个数的绝对值的定义进行求解即可.

【详解】解:在数轴上,点-2到原点的距离是2,所以-2的绝对值是2,

故选:A.

2. 下列运算结果正确的是()

- A. $3x^3 + 2x^3 = 5x^6$ B. $(x+1)^2 = x^2 + 1$ C. $x^8 \div x^4 = x^2$ D. $\sqrt{4} = 2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项,完全平方公式,同底数幂除法和算术平方根的运算法则逐一进行判断即可.

【详解】解:A. $3x^3 + 2x^3 = 5x^3$,原计算错误,不合题意;

B. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$,原计算错误,不合题意;

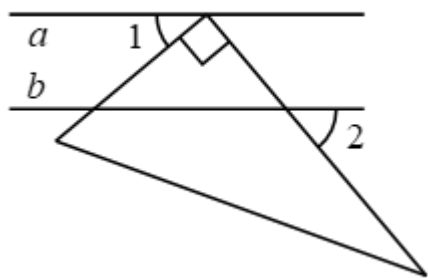
C. $x^8 \div x^4 = x^4$, 原计算错误, 不合题意;

D. $\sqrt{4} = 2$, 原计算正确, 符合题意;

故选: D.

【点睛】 本题考查了合并同类项, 完全平方公式, 同底数幂除法和算术平方根, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

3. 如图, 直线 $a \parallel b$, 一个三角板的直角顶点在直线 a 上, 两直角边均与直线 b 相交, $\angle 1 = 40^\circ$, 则 $\angle 2 =$ ()



A. 40°

B. 50°

C. 60°

D. 65°

【答案】 B

【解析】

【分析】 先根据平角的定义求出 $\angle 3$ 的度数, 再根据平行线的性质即可求出 $\angle 2$ 的度数.

【详解】 解: 由题意得 $\angle ABC = 90^\circ$,

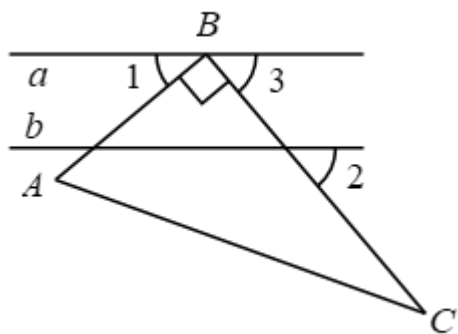
$$\therefore \angle 1 = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle ABC = 50^\circ,$$

$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 50^\circ,$$

故选 B.



【点睛】 本题主要考查了几何图形中角度的计算，平行线的性质，三角板中角度的计算，熟知平行线的性质是解题的关键.

4. 植树节当天，七年级 1 班植树 300 棵，正好占这批树苗总数的 $\frac{3}{5}$ ，七年级 2 班植树棵数是这批树苗总数的 $\frac{1}{5}$ ，则七年级 2 班植树的棵数是 ()

A. 36 B. 60 C. 100 D. 180

【答案】 C

【解析】

【分析】 设这批树苗一共有 x 棵，根据七年级 1 班植树 300 棵，正好占这批树苗总数的 $\frac{3}{5}$ ，列出方程求解即可.

【详解】 解：设这批树苗一共有 x 棵，

$$\text{由题意得：} \frac{3}{5}x = 300,$$

$$\text{解得 } x = 500,$$

$$\therefore \text{七年级 2 班植树的棵数是 } 500 \times \frac{1}{5} = 100 \text{ 棵,}$$

故选 C.

【点睛】 本题主要考查了一元一次方程的应用，正确理解题意列出方程是解题的关键.

5. 一元二次方程 $x^2 + 4x - 8 = 0$ 的解是 ()

A. $x_1 = 2 + 2\sqrt{3}, x_2 = 2 - 2\sqrt{3}$

B. $x_1 = 2 + 2\sqrt{2}, x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$

C. $x_1 = -2 + 2\sqrt{2}, x_2 = -2 - 2\sqrt{2}$

D. $x_1 = -2 + 2\sqrt{3}, x_2 = -2 - 2\sqrt{3}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 利用配方法解方程即可.

【详解】解: $\because x^2 + 4x - 8 = 0$,

$$\therefore x^2 + 4x = 8,$$

$$\therefore x^2 + 4x + 4 = 12,$$

$$\therefore (x+2)^2 = 12,$$

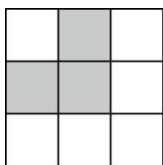
$$\therefore x+2 = \pm 2\sqrt{3},$$

$$\text{解得 } x_1 = -2 + 2\sqrt{3}, x_2 = -2 - 2\sqrt{3},$$

故选 D.

【点睛】本题主要考查了解一元二次方程，熟知解一元二次方程的方法是解题的关键.

6. 如图，任意将图中的某一白色方块涂黑后，能使所有黑色方块构成的图形是轴对称图形的概率是 ()



A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

【答案】A

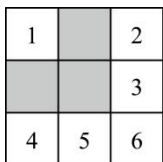
【解析】

【分析】根据轴对称图形的定义，结合概率计算公式求解即可.

【详解】解: 如图所示，由轴对称图形的定义可知当选取编号为 1, 3, 5, 6 其中一个白色区域涂黑后，能使黑色方块构成的图形是轴对称图形，

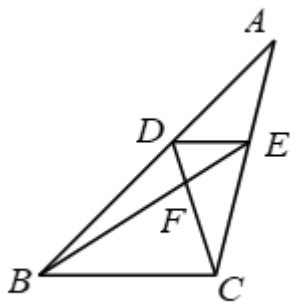
$$\therefore \text{任意将图中的某一白色方块涂黑后，能使所有黑色方块构成的图形是轴对称图形的概率是 } \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

故选 A.



【点睛】本题主要考查了轴对称图形的定义，简单的概率计算，熟知轴对称图形的定义是解题的关键.

7. 如图，点 D 为 $\triangle ABC$ 边 AB 上任一点， $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E，连接 BE、CD 相交于点 F，则下列等式中不成立的是 ()



- A. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ B. $\frac{DE}{BC} = \frac{DF}{FC}$ C. $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{EC}$ D. $\frac{EF}{BF} = \frac{AE}{AC}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行线分线段成比例定理即可判断 A，根据相似三角形的性质即可判断 B、C、D.

【详解】解：∵ $DE \parallel BC$,

∴ $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$, $\triangle DEF \sim \triangle CBF$, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 故 A 不符合题意;

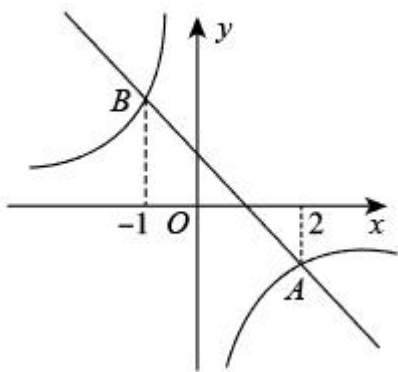
∴ $\frac{DE}{CB} = \frac{DF}{CF} = \frac{EF}{BF}$, $\frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC}$, 故 B 不符合题意, C 符合题意;

∴ $\frac{EF}{BF} = \frac{AE}{AC}$, 故 D 不符合题意;

故选 C.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的性质与判定，平行线分线段成比例定理，熟知相似三角形的性质与判定，平行线分线段成比例定理是解题的关键.

8. 如图，一次函数 $y_1 = k_1x + b$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 A, B 两点，点 A 的横坐标为 2，点 B 的横坐标为 -1，则不等式 $k_1x + b < \frac{k_2}{x}$ 的解集是 ()



- A. $-1 < x < 0$ 或 $x > 2$ B. $x < -1$ 或 $0 < x < 2$ C. $x < -1$ 或 $x > 2$ D. $-1 < x < 2$

【答案】A

【解析】

【分析】根据不等式 $k_1x + b < \frac{k_2}{x}$ 的解集即为一次函数图象在反比例函数图象下方时自变量的取值范围进行求解即可.

【详解】解：由题意得不等式 $k_1x + b < \frac{k_2}{x}$ 的解集即为一次函数图象在反比例函数图象下方时自变量的取值范围，

$\therefore$ 不等式 $k_1x + b < \frac{k_2}{x}$ 的解集为 $-1 < x < 0$ 或 $x > 2$ ，

故选 A.

【点睛】本题主要考查了一次函数与反比例函数综合，利用数形结合的思想求解是解题的关键.

9. 用一张半圆形铁皮，围成一个底面半径为 4cm 的圆锥形工件的侧面（接缝忽略不计），则圆锥的母线长为（ ）

- A. 4cm B. 8cm C. 12cm D. 16cm

【答案】B

【解析】

【分析】设圆锥的母线长为 l ，根据圆锥的底面圆周长为半圆形铁皮的周长（不包括直径）列式求解即可.

【详解】解：设圆锥的母线长为 l ，

由题意得： $2 \times 4\pi = \frac{180 \times \pi \cdot l}{180}$ ，

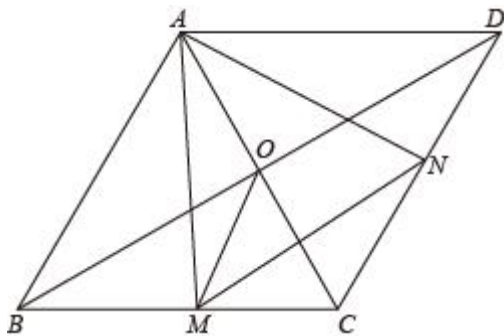
$\therefore l = 8\text{cm}$ ，

故选 B.

【点睛】本题主要考查了求圆锥的母线长，熟知圆锥的底面圆周长为半圆形铁皮的周长（不包括直径）是

解题的关键.

10. 如图, 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 点 M 、 N 分别是边 BC 、 CD 上的动点, $\angle BAC = \angle MAN = 60^\circ$, 连接 MN 、 OM . 以下四个结论正确的是 ()



① $\triangle AMN$ 是等边三角形; ② MN 的最小值是 $\sqrt{3}$; ③ 当 MN 最小时 $S_{\triangle CMN} = \frac{1}{8} S_{\text{菱形}ABCD}$; ④ 当 $OM \perp BC$

时, $OA^2 = DN \cdot AB$.

A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ①②③④

【答案】D

【解析】

【分析】①依据题意, 利用菱形的性质及等边三角形的判定与性质, 证出 $\angle MAC = \angle DAN$, 然后证 $\triangle CAM \cong \triangle DAN(ASA)$, $AM = AN$, 即可证出.

②当 MN 最小值时, 即 AM 为最小值, 当 $AM \perp BC$ 时, AM 值最小, 利用勾股定理求出

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}, \text{ 即可得到 } MN \text{ 的值.}$$

③当 MN 最小时, 点 M 、 N 分别为 BC 、 CD 中点, 利用三角形中位线定理得到 $AC \perp MN$, 用勾股定理求

$$\text{出 } CE = \sqrt{CN^2 - EN^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}, \quad S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 而菱形 } ABCD \text{ 的面积为: } 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

即可得到答案.

④当 $OM \perp BC$ 时, 可证 $\triangle OCM \sim \triangle BCO$, 利用相似三角形对应边成比例可得 $OC^2 = CM \cdot BC$, 根据等量代换, 最后得到答案.

【详解】解: 如图: 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = BC = AD = CD$, $AC \perp BD$, $OA = OC$,

$$\therefore \angle BAC = \angle MAN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ADC = 60^\circ, \quad \triangle ABC \text{ 与 } \triangle ADC \text{ 为等边三角形,}$$

$$\text{又 } \angle MAC = \angle MAN - \angle CAN = 60^\circ - \angle CAN,$$

$$\angle DAN = \angle DAC - \angle CAN = 60^\circ - \angle CAN,$$

$$\therefore \angle MAC = \angle DAN,$$

在 $\triangle CAM$ 与 $\triangle DAN$ 中

$$\begin{cases} \angle CAM = \angle DAN \\ AC = AC \\ \angle ACM = \angle ADN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CAM \cong \triangle DAN (ASA),$$

$$\therefore AM = AN,$$

即 $\triangle AMN$ 为等边三角形,

故①正确;

$$\therefore AC \perp BD,$$

当 MN 最小值时, 即 AM 为最小值, 当 $AM \perp BC$ 时, AM 值最小,

$$\therefore AB = 2, BM = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{即 } MN = \sqrt{3},$$

故②正确;

当 MN 最小时, 点 M 、 N 分别为 BC 、 CD 中点,

$$\therefore MN \parallel BD,$$

$$\therefore AC \perp MN,$$

在 $\triangle CMN$ 中,

$$CE = \sqrt{CN^2 - EN^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{而菱形 } ABCD \text{ 的面积为: } 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{1}{8} \times 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

故③正确,

当 $OM \perp BC$ 时,

$$\begin{cases} \angle BOC = \angle OMC = 90^\circ \\ \angle OCM = \angle BCO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OCM \sim \triangle BCO$$

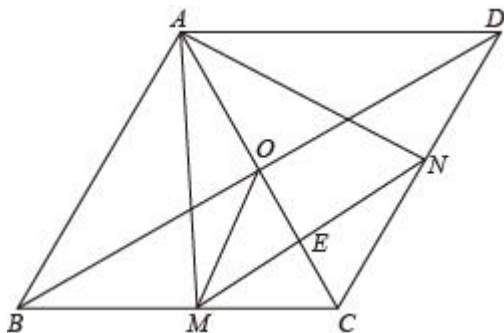
$$\therefore \frac{OC}{BC} = \frac{CM}{OC}$$

$$\therefore OC^2 = CM \cdot BC$$

$$\therefore OA^2 = DN \cdot AB$$

故④正确;

故选: D.



【点睛】此题考查了菱形的性质与面积, 等边三角形的判定与性质, 全等三角形的判定, 勾股定理, 三角形中位线定理等相关内容, 熟练掌握菱形的性质是解题关键.

第Ⅱ卷 (非选择题共 90 分)

二、填空题: 本大题共 8 小题, 其中 11-14 题每小题 3 分, 15-18 题每小题 4 分, 共 23 分. 只要求填写最后结果.

11. 2022 年 2 月 20 日, 北京冬奥会圆满落幕, 赛事获得了数十亿次数字平台互动, 在中国仅电视收视人数就超 6 亿. 6 亿用科学记数法表示为_____.

【答案】 6×10^8

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负整数.

【详解】解: 6 亿 = 600000000 = 6×10^8 .

故答案为: 6×10^8 .

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. 因式分解: $x^3 - 9x =$ _____.

【答案】 $x(x+3)(x-3)$

【解析】

【分析】利用提公因式法和公式法即可求解.

【详解】解: $x^3 - 9x = x(x^2 - 3^2) = x(x+3)(x-3)$,

故答案为: $x(x+3)(x-3)$.

【点睛】本题考查了因式分解, 熟练掌握提公因式法和平方差公式是解题的关键.

13. 为了落实“双减”政策, 东营市某学校对初中学生的课外作业时长进行了问卷调查, 15 名同学的作业时长统计如下表, 则这组数据的众数是_____分钟.

作业时长 (单位: 分钟)	50	60	70	80	90
人数 (单位: 人)	1	4	6	2	2

【答案】70

【解析】

【分析】根据众数的定义, 人数最多的即为这组数据的众数.

【详解】解: 由表可知:

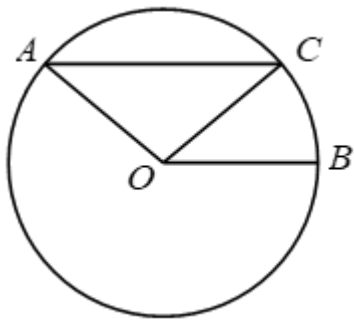
$$\therefore 6 > 4 > 2 > 2 > 1,$$

$\therefore$ 这组数据的众数是 70 分钟.

故答案为: 70.

【点睛】本题考查了众数的定义, 掌握众数的定义是本题关键.

14. 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 $AC \parallel$ 半径 OB , $\angle BOC = 40^\circ$, 则 $\angle AOC$ 的度数为_____.



【答案】100°##100 度

【解析】

【分析】先根据平行线的性质求出 $\angle OCA$ 的度数, 再根据等边对等角求出 $\angle OAC$ 的度数, 即可利用三角形内角和定理求出 $\angle AOC$ 的度数.

【详解】解: $\because AC \parallel OB$,

$$\therefore \angle OCA = \angle BOC = 40^\circ,$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 180^\circ - \angle OAC - \angle OCA = 100^\circ,$$

故答案为: 100° .

【点睛】本题主要考查了平行线的性质, 圆的基本性质, 三角形内角和定理, 等腰三角形的性质, 熟知相关知识是解题的关键.

15. 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 2$ 且 $k \neq 1$

【解析】

【分析】根据一元二次方程二次项系数不为 0, 以及根的判别式即可得出 k 的取值范围.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta > 0 \text{ 且 } k-1 \neq 0,$$

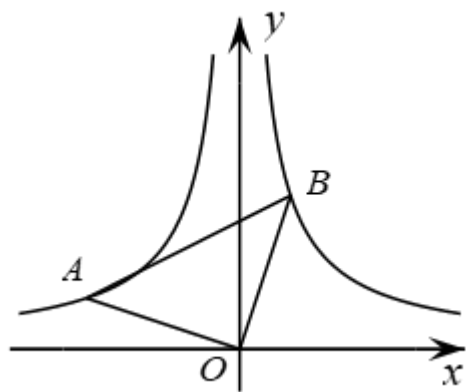
$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(k-1) = 8 - 4k > 0 \text{ 且 } k \neq 1,$$

$$\therefore k < 2 \text{ 且 } k \neq 1.$$

故答案为: $k < 2$ 且 $k \neq 1$.

【点睛】本题考查了根的判别式, 一元二次方程的概念, 熟练掌握一元二次方程的概念以及根的判别式是本题的关键.

16. 如图, $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形, 直角顶点与坐标原点重合, 若点 B 在反比例函数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 的图象上, 则经过点 A 的反比例函数表达式为_____.



【答案】 $y = -\frac{1}{x}$

【解析】

【分析】如图所示，过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C ，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于 D ，证明 $\triangle ACO \cong \triangle ODB$ 得到 $AC=OD$ ， $OC=BD$ ，设点 B 的坐标为 (a, b) ，则点 A 的坐标为 $(-b, a)$ ，再由点 B 在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ ，推出 $a = \frac{-1}{-b}$ ，由此即可得到答案.

【详解】解：如图所示，过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C ，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于 D ，则 $\angle ACO = \angle ODB = 90^\circ$ ，由题意得 $OA=OB$ ， $\angle AOB=90^\circ$ ，

$$\therefore \angle CAO + \angle COA = \angle AOC + \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle DOB,$$

$$\therefore \triangle ACO \cong \triangle ODB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AC=OD, OC=BD,$$

设点 B 的坐标为 (a, b) ，则 $AC=OD=a$ ， $OC=BD=b$ ，

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (-b, a),$$

$$\because \text{点 } B \text{ 在反比例函数 } y = \frac{1}{x},$$

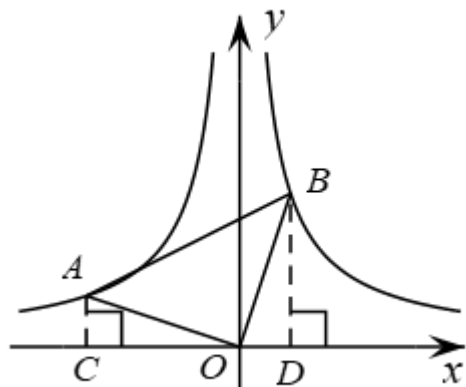
$$\therefore ab=1,$$

$$\therefore -ab=-1,$$

$$\therefore a = \frac{-1}{-b},$$

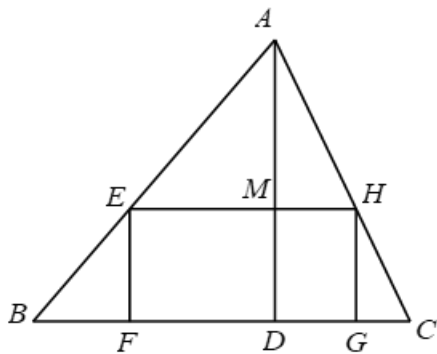
$$\therefore \text{经过点 } A \text{ 的反比例函数表达式为 } y = -\frac{1}{x},$$

故答案为： $y = -\frac{1}{x}$.



【点睛】本题主要考查了反比例函数与几何综合，全等三角形的性质与判定，熟知相关知识是解题的关键.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 F 、 G 在 BC 上, 点 E 、 H 分别在 AB 、 AC 上, 四边形 $EFGH$ 是矩形, $EH = 2EF$, AD 是 $\triangle ABC$ 的高. $BC = 8, AD = 6$, 那么 EH 的长为_____.



【答案】 $\frac{24}{5}$ ##4.8

【解析】

【分析】通过四边形 $EFGH$ 为矩形推出 $EH \parallel BC$, 因此 $\triangle AEH$ 与 $\triangle ABC$ 两个三角形相似, 将 AM 视为 $\triangle AEH$ 的高, 可得出 $\frac{AM}{AD} = \frac{EH}{BC}$, 再将数据代入即可得出答案.

【详解】 $\because$ 四边形 $EFGH$ 是矩形,

$$\therefore EH \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC,$$

$\because AM$ 和 AD 分别是 $\triangle AEH$ 和 $\triangle ABC$ 的高,

$$\therefore \frac{AM}{AD} = \frac{EH}{BC}, DM = EF,$$

$$\therefore AM = AD - DM = AD - EF = 6 - EF,$$

$$\because EH = 2EF,$$

$$\text{代入可得: } \frac{6 - EF}{6} = \frac{2EF}{8},$$

$$\text{解得 } EF = \frac{12}{5},$$

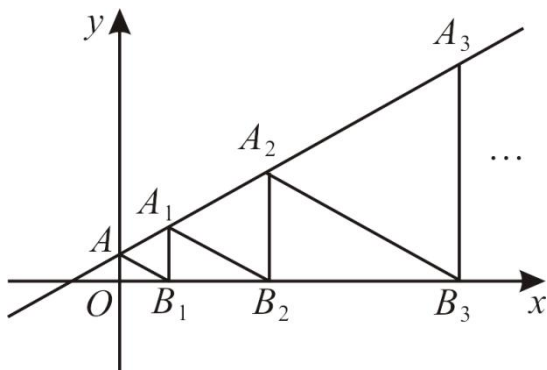
$$\therefore EH = 2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{24}{5}.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质及矩形的性质, 灵活运用相似三角形的性质是本题的关键.

18. 如图, $\triangle AB_1A_1, \triangle A_1B_2A_2, \triangle A_2B_3A_3, \dots$ 是等边三角形, 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 经过它们的顶点

$A, A_1, A_2, A_3, \dots$, 点 $B_1, B_2, B_3, \dots$ 在 x 轴上, 则点 A_{2022} 的横坐标是_____.



【答案】 $(2^{2023} - 2)\sqrt{3}$

【解析】

【分析】如图, 设直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 与 x 轴交于点 C , 求出点 A 、 C 的坐标, 可得 $OA = 2$, $OC = 2\sqrt{3}$, 然

后解直角三角形求出 $\angle ACO = 30^\circ$, 可得 $\angle CB_1A_1 = 90^\circ$, $\angle CB_1A = 30^\circ$, 然后求出

$CB_1 = 2OB_1 = 4\sqrt{3} = 2^2 \times \sqrt{3}$, $CB_2 = 2CB_1 = 8\sqrt{3} = 2^3 \times \sqrt{3}$, $CB_3 = 2CB_2 = 16\sqrt{3} = 2^4 \times \sqrt{3}$, ..., 进

而可得 $CB_{2022} = 2^{2023} \times \sqrt{3}$, 再求出 OB_{2022} 即可.

【详解】解: 如图, 设直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 与 x 轴交于点 C ,

在 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 中, 当 $x = 0$ 时, $y = 2$;

当 $y = 0$ 时, 即 $\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 = 0$, 解得: $x = -2\sqrt{3}$,

$\therefore A(0, 2)$, $C(-2\sqrt{3}, 0)$,

$\therefore OA = 2$, $OC = 2\sqrt{3}$,

$\therefore \tan \angle ACO = \frac{OA}{OC} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle ACO = 30^\circ$,

$\therefore \triangle AB_1A_1$ 是等边三角形,

$\therefore \angle AA_1B_1 = \angle AB_1A_1 = 60^\circ$,

$$\therefore \angle CB_1A_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CB_1A = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = AB_1,$$

$$\because AO \perp CB_1,$$

$$\therefore OB_1 = OC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CB_1 = 2OB_1 = 4\sqrt{3} = 2^2 \times \sqrt{3},$$

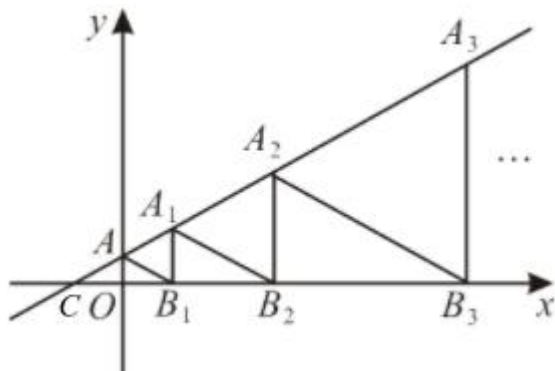
$$\text{同理可得: } CB_2 = 2CB_1 = 8\sqrt{3} = 2^3 \times \sqrt{3}, \quad CB_3 = 2CB_2 = 16\sqrt{3} = 2^4 \times \sqrt{3}, \quad \dots,$$

$$\therefore CB_{2022} = 2^{2023} \times \sqrt{3},$$

$$\therefore OB_{2022} = 2^{2023} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (2^{2023} - 2)\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } A_{2022} \text{ 的横坐标是 } (2^{2023} - 2)\sqrt{3},$$

$$\text{故答案为: } (2^{2023} - 2)\sqrt{3}.$$



【点睛】 本题考查了一次函数的图象和性质，等边三角形的性质，解直角三角形，等腰三角形的判定和性质等知识，通过解直角三角形求出 $\angle ACO = 30^\circ$ 是解题的关键.

三、解答题： 本大题共 7 小题， 共 62 分.解答要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

19. 计算及先化简，再求值：

$$(1) (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) + \sqrt{48} \div \sqrt{3} - (-\sqrt{3})^0 + (-2\sin 30^\circ)^{2022}$$

$$(2) \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right) \div \frac{2y}{x^2 + 2xy + y^2}, \text{ 其中 } x=3, y=2.$$

【答案】 (1) 3 (2) $\frac{x+y}{x-y}$, 5

【解析】

【分析】(1) 先根据特殊角的三角函数值计算, 再根据二次根式的混合运算的法则进行计算即可.

(2) 根据分式的加法和除法可以化简题目中的式子, 然后将 x 、 y 的值代入化简后的式子即可解答本题.

【小问 1 详解】

$$\text{原式} = 3 - 4 + 4\sqrt{3} \div \sqrt{3} - 1 + 1$$

$$= -1 + 4$$

$$= 3$$

【小问 2 详解】

$$\text{原式} = \frac{x+y-x+y}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{2y}$$

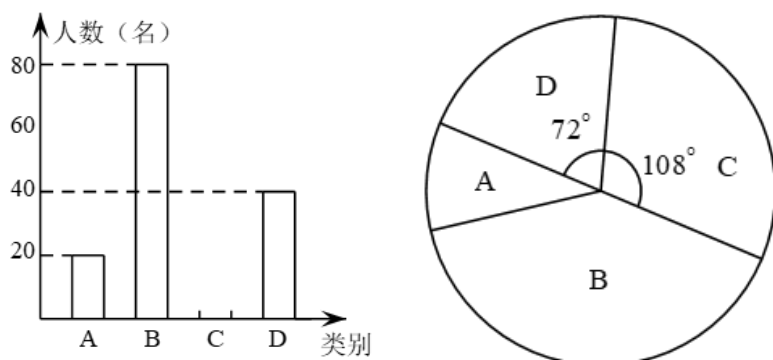
$$= \frac{2y}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{2y}$$

$$= \frac{x+y}{x-y}$$

$$\text{当 } x=3, y=2 \text{ 时, 原式} = \frac{x+y}{x-y} = 5$$

【点睛】此题考查了二次根式和三角函数的化简, 以及分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

20. 中国共产党的助手和后备军——中国共青团, 担负着为中国特色社会主义事业培养合格建设者和可靠接班人的根本任务. 成立一百周年之际, 各中学持续开展了 A: 青年大学习; B: 青年学党史; C: 中国梦宣传教育; D: 社会主义核心价值观培育践行等一系列活动, 学生可以任选一项参加. 为了解参与情况, 进行了一次抽样调查, 根据收集的数据绘制了两幅不完整的统计图.



请根据图中提供的信息, 解答下列问题:

(1) 在这次调查中, 一共抽取了_____名学生;

- (2) 补全条形统计图;
- (3) 若该校共有学生 1280 名, 请估计参加 B 项活动的学生数;
- (4) 小杰和小慧参加了上述活动, 请用列表或画树状图的方法, 求他们参加同一项活动的概率.

【答案】(1) 200;

(2) 见解析; (3) 估计参加 B 项活动的学生数有 512 名;

(4) 画树状图见解析, 他们参加同一项活动的概率为 $\frac{1}{4}$.

【解析】

【分析】(1) 根据 D 项活动所占圆心角度数和 D 项活动的人数计算即可;

(2) 根据总人数求出参加 C 项活动的人数, 进而可补全条形统计图;

(3) 用该校总学生人数乘以抽查的学生中参加 B 项活动所占的比例即可;

(4) 画出树状图可知, 共有 16 种等可能的结果, 其中他们参加同一项活动的情况数有 4 种, 然后根据概率公式计算即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 40 \div \frac{72^\circ}{360^\circ} = 200 \text{ (名),}$$

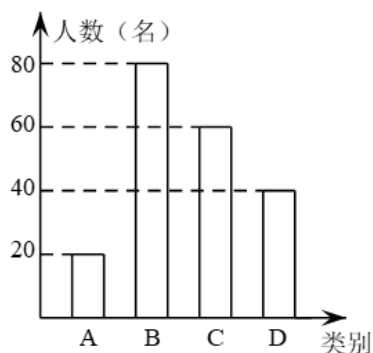
即在这次调查中, 一共抽取了 200 名学生,

故答案为: 200;

【小问 2 详解】

参加 C 项活动的人数为: $200 - 20 - 80 - 40 = 60$ (名),

补全条形统计图如图:



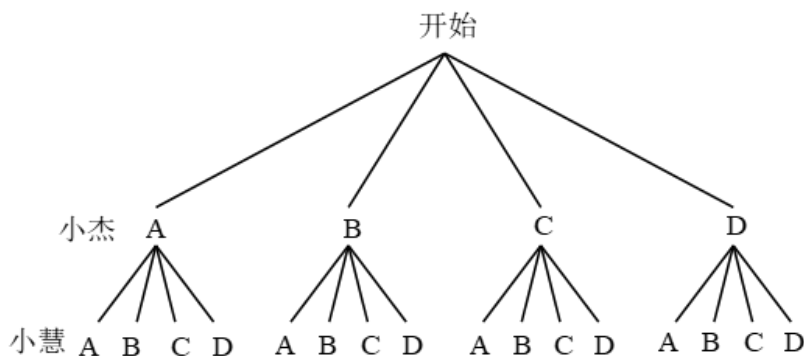
【小问 3 详解】

$$1280 \times \frac{80}{200} = 512 \text{ (名),}$$

答: 估计参加 B 项活动的学生数有 512 名;

【小问 4 详解】

画树状图如图:

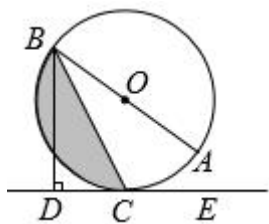


由树状图可知, 共有 16 种等可能的结果, 其中他们参加同一项活动的情况数有 4 种,

所以他们参加同一项活动的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

【点睛】 本题考查了条形统计图, 扇形统计图, 用样本估计总体, 列表法或树状图法求概率, 能够从不同的统计图中获取有用信息是解题的关键.

21. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 $\odot O$ 上一点, $BD \perp CE$ 于点 D , BC 平分 $\angle ABD$.



(1) 求证: 直线 CE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\angle ABC = 30^\circ$, $\odot O$ 的半径为 2, 求图中阴影部分的面积.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$

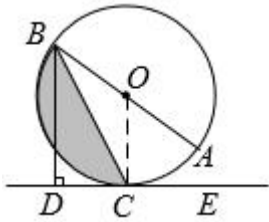
【解析】

【分析】 (1) 连接 OC , 根据 $OB=OC$, 以及 BC 平分 $\angle ABD$ 推导出 $\angle OCB = \angle DCB$, 即可得出 $BD \parallel OC$, 从而推出 $OC \perp DE$, 即证明得出结论;

(2) 过点 O 作 $OF \perp CB$ 于 F , 利用 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OBC} - S_{\triangle OBC}$ 即可得出答案.

【小问 1 详解】

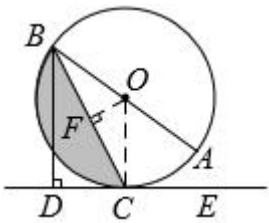
证明: 连接 OC , 如图,



$\because OB = OC$,
 $\therefore \angle OBC = \angle OCB$,
 $\because BC$ 平分 $\angle ABD$,
 $\therefore \angle OBC = \angle DCB$,
 $\therefore \angle OCB = \angle DCB$,
 $\therefore BD \parallel OC$,
 $\because BD \perp CE$ 于点 D ,
 $\therefore OC \perp DE$,
 $\therefore$ 直线 CE 是 $\odot O$ 的切线;

【小问2 详解】

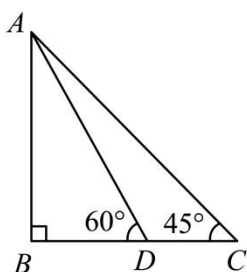
过点 O 作 $OF \perp CB$ 于 F , 如图,



$\because \angle ABC = 30^\circ$, $OB = 2$,
 $\therefore OF = 1$, $BF = OB \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}$,
 $\therefore BC = 2BF = 2\sqrt{3}$,
 $\therefore S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} BC \cdot OF = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$,
 $\because \angle BOF = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BOC = 2\angle BOF = 120^\circ$,
 $\therefore S_{\text{扇形}OBC} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 2^2 = \frac{4}{3} \pi$,
 $\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OBC} - S_{\triangle OBC} = \sqrt{3} - \frac{4}{3} \pi$.

【点睛】 本题考查了圆的综合问题，包括垂径定理，圆的切线，扇形的面积公式等，熟练掌握以上性质并正确作出辅助线是本题的关键.

22. 胜利黄河大桥犹如一架巨大的竖琴，凌驾于滔滔黄河之上，使黄河南北“天堑变通途”. 已知主塔 AB 垂直于桥面 BC 于点 B ，其中两条斜拉索 AD 、 AC 与桥面 BC 的夹角分别为 60° 和 45° ，两固定点 D 、 C 之间的距离约为 33m ，求主塔 AB 的高度（结果保留整数，参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41, \sqrt{3} \approx 1.73$ ）



【答案】 主塔 AB 的高度约为 78m .

【解析】

【分析】 在 $Rt\triangle ABD$ 中，利用正切的定义求出 $AB = \sqrt{3}BD$ ，然后根据 $\angle C = 45^\circ$ 得出 $AB = BC$ ，列方程求出 BD ，即可解决问题.

【详解】 解： $\because AB \perp BC$,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中, } AB = BD \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}BD,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore \sqrt{3}BD = BD + 33,$$

$$\therefore BD = \frac{33}{\sqrt{3}-1} = \frac{33 \times (\sqrt{3}+1)}{2} \text{ m},$$

$$\therefore AB = BC = BD + 33 = \frac{33 \times (\sqrt{3}+1)}{2} + 33 \approx 78 \text{ m},$$

答：主塔 AB 的高度约为 78m .

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，熟练掌握正切的定义是解题的关键.

23. 为满足顾客的购物需求，某水果店计划购进甲、乙两种水果进行销售. 经了解，甲水果的进价比乙水果的进价低 20% ，水果店用 1000 元购进甲种水果比用 1200 元购进乙种水果的重量多 10 千克，已知甲、乙两种水果的售价分别为 6 元/千克和 8 元/千克.

(1) 求甲、乙两种水果的进价分别是多少?

(2) 若水果店购进这两种水果共 150 千克, 其中甲种水果的重量不低于乙种水果重量的 2 倍, 则水果店应如何进货才能获得最大利润, 最大利润是多少?

【答案】(1) 甲种水果的进价是 4 元/千克, 乙种水果的进价是 5 元/千克;

(2) 水果店购进甲种水果 100 千克, 乙种水果 50 千克时获得最大利润, 最大利润是 350 元.

【解析】

【分析】(1) 设乙种水果的进价是 x 元/千克, 根据“甲水果的进价比乙水果的进价低 20%, 水果店用 1000 元购进甲种水果比用 1200 元购进乙种水果的重量多 10 千克”列出分式方程, 解方程检验后可得出答案;

(2) 设水果店购进甲种水果 a 千克, 获得的利润为 y 元, 则购进乙种水果 $(150 - a)$ 千克, 根据利润 = (售价 - 进价) $\times$ 数量列出 y 关于 a 的一次函数解析式, 求出 a 的取值范围, 然后利用一次函数的性质解答.

【小问 1 详解】

解: 设乙种水果的进价是 x 元/千克,

$$\text{由题意得: } \frac{1000}{(1-20\%)x} = \frac{1200}{x} + 10,$$

解得: $x = 5$,

经检验, $x = 5$ 是分式方程的解且符合题意,

$$\text{则 } (1-20\%)x = 0.8 \times 5 = 4,$$

答: 甲种水果的进价是 4 元/千克, 乙种水果的进价是 5 元/千克;

【小问 2 详解】

解: 设水果店购进甲种水果 a 千克, 获得的利润为 y 元, 则购进乙种水果 $(150 - a)$ 千克,

$$\text{由题意得: } y = (6-4)a + (8-5)(150-a) = -a + 450,$$

$$\because -1 < 0,$$

$\therefore y$ 随 a 的增大而减小,

$\because$ 甲种水果的重量不低于乙种水果重量的 2 倍,

$$\therefore a \geq 2(150-a),$$

解得: $a \geq 100$,

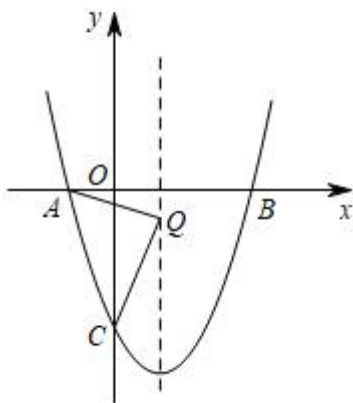
$$\therefore \text{当 } a = 100 \text{ 时, } y \text{ 取最大值, 此时 } y = -100 + 450 = 350, \quad 150 - a = 50,$$

答: 水果店购进甲种水果 100 千克, 乙种水果 50 千克时获得最大利润, 最大利润是 350 元.

【点睛】本题考查了分式方程的应用, 一次函数与一元一次不等式的应用, 正确理解题意, 找出合适的等

量关系列出方程和解析式是解题的关键.

24. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 点 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C .



- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 在对称轴上找一点 Q , 使 $\triangle ACQ$ 的周长最小, 求点 Q 的坐标;
- (3) 点 P 是抛物线对称轴上的一点, 点 M 是对称轴左侧抛物线上的一点, 当 $\triangle PMB$ 是以 PB 为腰的等腰直角三角形时, 请直接写出所有点 M 的坐标.

【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 3$

(2) $(1, -2)$ (3) $(-1, 0)$ 或 $(1 - \sqrt{2}, -2)$ 或 $(1 - \sqrt{6}, 2)$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 先求出点 C 的坐标和抛物线的对称轴, 如图所示, 作点 C 关于直线 $x=1$ 的对称点 E , 连接 AE , EQ , 则点 E 的坐标为 $(2, -3)$, 根据轴对称最短路径可知 AE 与抛物线对称轴的交点即为点 Q ;

(3) 分两种情况当 $\angle BPM=90^\circ$ 和当 $\angle PBM=90^\circ$ 两种情况讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 点 $B(3, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} a - b - 3 = 0 \\ 9a + 3b - 3 = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$, 与 y 轴交于点 C ,

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x = 1$, 点 C 的坐标为 $(0, -3)$

如图所示, 作点 C 关于直线 $x = 1$ 的对称点 E , 连接 AE , EQ , 则点 E 的坐标为 $(2, -3)$,

由轴对称的性质可知 $CQ = EQ$,

$\therefore \triangle ACQ$ 的周长 $= AC + AQ + CQ$,

要使 $\triangle ACQ$ 的周长最小, 则 $AQ + CQ$ 最小, 即 $AQ + QE$ 最小,

$\therefore$ 当 A 、 Q 、 E 三点共线时, $AQ + QE$ 最小,

设直线 AE 的解析式为 $y = k_1x + b_1$,

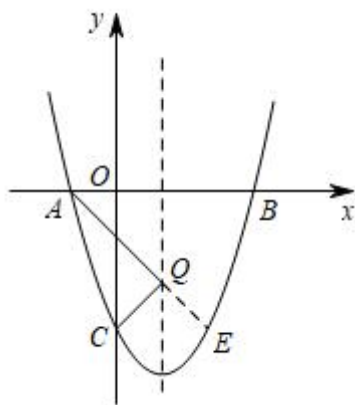
$$\therefore \begin{cases} -k_1 + b_1 = 0 \\ 2k_1 + b_1 = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k_1 = -1 \\ b_1 = -1 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AE 的解析式为 $y = -x - 1$,

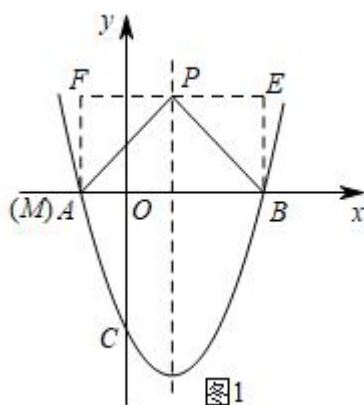
当 $x = 1$ 时, $y = -x - 1 = -1 - 1 = -2$,

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(1, -2)$;



【小问 3 详解】

解: 如图 1 所示, 当点 P 在 x 轴上方, $\angle BPM = 90^\circ$ 时, 过点 P 作 $EF \parallel x$ 轴, 过点 M 作 $MF \perp EF$ 于 F , 过点 B 作 $BE \perp EF$ 于 E ,



$\therefore \triangle PBM$ 是以 PB 为腰的等腰直角三角形,

$\therefore PA=PB$, $\angle MFP=\angle PEB=\angle BPM=90^\circ$,

$\therefore \angle FMP+\angle FPM=\angle FPM+\angle EPB=90^\circ$,

$\therefore \angle FMP=\angle EPB$,

$\therefore \triangle FMP \cong \triangle EPB$ (AAS),

$\therefore PE=MF$, $BE=PF$,

设点 P 的坐标为 $(1, m)$,

$\therefore BE=m$, $PE=2$,

$\therefore MF=2$, $PF=m$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(1-m, m-2)$,

$\because$ 点 M 在抛物线 $y=x^2-2x-3$ 上,

$\therefore (1-m)^2-2(1-m)-3=m-2$,

$\therefore 1-2m+m^2-2+2m-3=m-2$,

$\therefore m^2-m-2=0$,

解得 $m=2$ 或 $m=-1$ (舍去),

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-1, 0)$;

同理当点 P 在 x 轴下方, $\angle BPM=90^\circ$ 时可以求得点 M 的坐标为 $(-1, 0)$;

如图 2 所示, 当点 P 在 x 轴上方, $\angle PBM=90^\circ$ 时, 过点 B 作 $EF \parallel y$ 轴, 过点 P 作 $PE \perp EF$ 于 E , 过点 M 作 $MF \perp EF$ 于 F , 设点 P 的坐标为 $(1, m)$,

同理可证 $\triangle PEB \cong \triangle BFM$ (AAS),

$\therefore BF=PE=2$, $MF=BE=m$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(3-m, -2)$,

$\because$ 点 M 在抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 上,

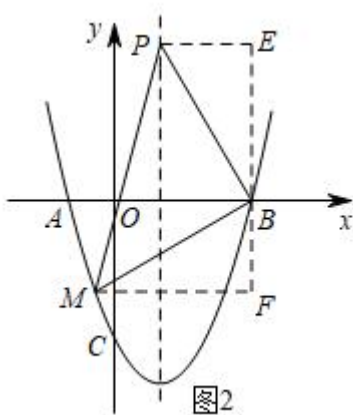
$$\therefore (3-m)^2 - 2(3-m) - 3 = -2,$$

$$\therefore 9 - 6m + m^2 - 6 + 2m - 3 = -2,$$

$$\therefore m^2 - 4m + 2 = 0,$$

解得 $m = 2 + \sqrt{2}$ 或 $m = 2 - \sqrt{2}$ (舍去),

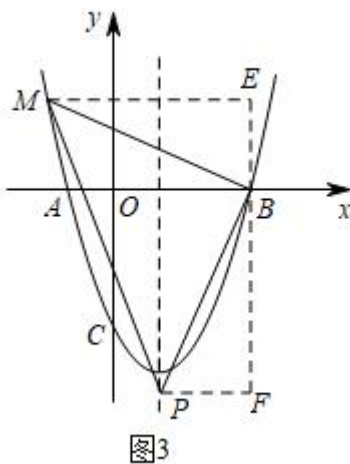
$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(1 - \sqrt{2}, -2)$;



如图 3 所示, 当点 P 在 x 轴下方, $\angle PBM = 90^\circ$ 时,

同理可以求得点 M 的坐标为 $(1 - \sqrt{6}, 2)$;

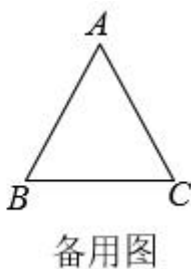
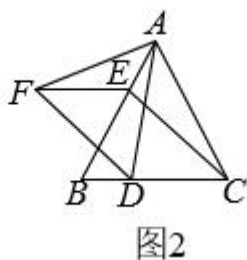
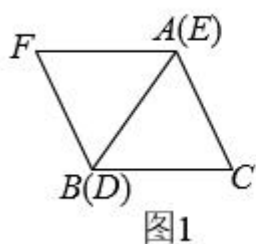
综上所述, 当 $\triangle PMB$ 是以 PB 为腰的等腰直角三角形时, 点 M 的坐标为 $(-1, 0)$ 或 $(1 - \sqrt{2}, -2)$ 或 $(1 - \sqrt{6}, 2)$.



【点睛】 本题主要考查了待定系数法求二次函数解析式, 二次函数综合, 一次函数与几何综合, 全等三角

形的性质与判定等等, 熟知二次函数的相关知识是解题的关键.

25. $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADF$ 均为等边三角形, 点 E 、 D 分别从点 A 、 B 同时出发, 以相同的速度沿 AB 、 BC 运动, 运动到点 B 、 C 停止.



(1) 如图 1, 当点 E 、 D 分别与点 A 、 B 重合时, 请判断: 线段 CD 、 EF 的数量关系是_____, 位置关系是_____;

(2) 如图 2, 当点 E 、 D 不与点 A 、 B 重合时, (1) 中的结论是否依然成立? 若成立, 请给予证明; 若不成立, 请说明理由;

(3) 当点 D 运动到什么位置时, 四边形 $CEFD$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的一半, 请直接写出答案; 此时, 四边形 $BDEF$ 是哪种特殊四边形? 请在备用图中画出图形并给予证明.

【答案】(1) $CD=EF$, $CD \parallel EF$

(2) $CD=EF$, $CD \parallel EF$, 成立, 理由见解析

(3) 点 D 运动到 BC 的中点时, $\square BDEF$ 是菱形, 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADF$ 均为等边三角形, 得到 $AF=AD$, $AB=BC$, $\angle FAD=\angle ABC=60^\circ$, 根据 E 、 D 分别与点 A 、 B 重合, 得到 $AB=AD$, $EF=AF$, $CD=BC$, $\angle FAD=\angle FAB$, 推出 $CD=EF$, $CD \parallel EF$;

(2) 连接 BF , 根据 $\angle FAD=\angle BAC=60^\circ$, 推出 $\angle FAB=\angle DAC$, 根据 $AF=AD$, $AB=AC$, 推出 $\triangle AFB \cong \triangle ADC$, 得到 $\angle ABF=\angle ACD=60^\circ$, $BF=CD$, 根据 $AE=BD$, 推出 $BE=CD$, 得到 $BF=BE$, 推出 $\triangle BFE$ 是等边三角形, 得到 $BF=EF$, $\angle FEB=60^\circ$, 推出 $CD=EF$, $CD \parallel EF$;

(3) 过点 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G , 设 $\triangle ABC$ 的边长为 a , $AD=h$, 根据 $AB=BC$, $BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$, $BD=AE$, 推出 $AE=BE=\frac{1}{2}AB$, 根据 $AB=AC$, 推出 $AD \perp BC$, 得到 $EG \parallel AD$, 推出 $\triangle EBG \sim \triangle ABD$, 推出 $\frac{EG}{AD}=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{2}$, 得到 $EG=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}h$, 根据 $CD=EF$, $CD \parallel EF$, 推出四边形 $CEFD$ 是平行四边形, 推出

$S_{CEFD}=CD \cdot EG=\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}h=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}S_{ABC}$, 根据 $EF=BD$, $EF \parallel BD$, 推出四边形 $BDEF$ 是平行四边形, 根据 $BF=EF$, 推出 $\square BDEF$ 是菱形.

【小问 1 详解】

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADF$ 均为等边三角形,

$\therefore AF=AD, AB=BC, \angle FAD=\angle ABC=60^\circ,$

当点 E, D 分别与点 A, B 重合时, $AB=AD, EF=AF, CD=BC, \angle FAD=\angle FAB,$

$\therefore CD=EF, CD \parallel EF;$

故答案为: $CD=EF, CD \parallel EF;$

【小问 2 详解】

$CD=EF, CD \parallel EF,$ 成立.

证明:

连接 $BF,$

$\because \angle FAD=\angle BAC=60^\circ,$

$\therefore \angle FAD-\angle BAD=\angle BAC-\angle BAD,$

即 $\angle FAB=\angle DAC,$

$\because AF=AD, AB=AC,$

$\therefore \triangle AFB \cong \triangle ADC(\text{SAS}),$

$\therefore \angle ABF=\angle ACD=60^\circ, BF=CD,$

$\because AE=BD,$

$\therefore BE=CD,$

$\therefore BF=BE,$

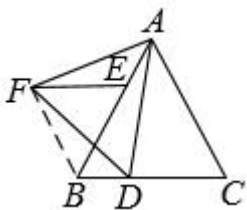
$\therefore \triangle BFE$ 是等边三角形,

$\therefore BF=EF, \angle FEB=60^\circ,$

$\therefore CD=EF, BC \parallel EF,$

即 $CD \parallel EF,$

$\therefore CD=EF, CD \parallel EF;$



【小问 3 详解】

如图, 当点 D 运动到 BC 的中点时, 四边形 $CEFD$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的一半, 此时, 四边形 $BDEF$ 是菱形.

证明:

过点 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G , 设 $\triangle ABC$ 的边长为 a , $AD=h$,

$$\therefore AB=BC, \quad BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a, \quad BD=AE,$$

$$\therefore AE=BE=\frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AB=AC,$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore EG \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle EBG \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \frac{EG}{AD} = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EG = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}h,$$

由 (2) 知, $CD=EF$, $CD \parallel EF$,

$\therefore$ 四边形 $CEFD$ 是平行四边形,

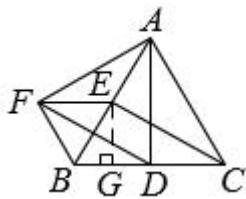
$$\therefore S_{\text{四边形}CEFD} = CD \cdot EG = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

此时, $EF=BD$, $EF \parallel BD$,

$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 是平行四边形,

$$\therefore BF=EF,$$

$\therefore \square BDEF$ 是菱形.



【点睛】 本题主要考查了等边三角形判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 平行四边形的判定与性质, 相似三角形的判定与性质, 菱形的判定, 解决问题的关键是熟练掌握等边三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 平行四边形判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 菱形的判定.

