

2023 年安徽省初中学业水平考试

数学

(试题卷)

注意事项:

1. 你拿到的试卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟.
2. 试卷包括“试题卷”和“答题卷”两部分.“试题卷”共 4 页，“答题卷”共 6 页.
3. 请务必在“答题卷”上答题，在“试题卷”上答题是无效的.
4. 考试结束后，请将“试题卷”和“答题卷”一并交回.

一、选择题 (本大题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分)

每小题都给出 A, B, C, D 四个选项，其中只有一个是符合题目要求的.

1. -5 的相反数是 ()

- A. 5 B. -5 C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$

【答案】A

【解析】

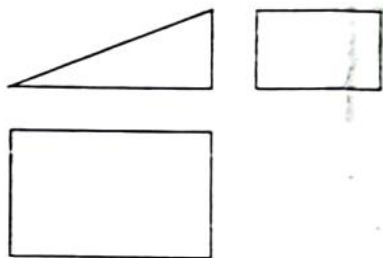
【分析】根据相反数的定义即可求解.

【详解】解: -5 的相反数是 5,

故选: A.

【点睛】此题主要考查相反数，解题的关键是熟知相反数的定义.

2. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体为 ()



- A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据主视图是三角形，结合选项即可求解.

【详解】解：∵主视图是直角三角形，

故 A，C，D 选项不合题意，

故选：B.

【点睛】主视图是在物体正面从前向后观察物体得到的图形；俯视图是站在物体的正面从上向下观察物体得到的图形；左视图是在物体正面从左向右观察到的图形,掌握三视图的定义是解题关键.

3. 下列计算正确的是 ()

A. $a^4 + a^4 = a^8$

B. $a^4 \cdot a^4 = a^{16}$

C. $(a^4)^4 = a^{16}$

D. $a^8 \div a^4 = a^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，逐项分析判断即可求解.

【详解】解：A. $a^4 + a^4 = 2a^4$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B. $a^4 \cdot a^4 = a^8$ ，故该选项不正确，不符合题意；

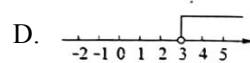
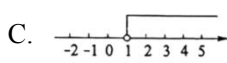
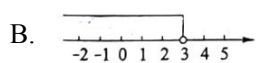
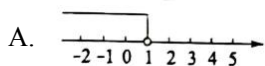
C. $(a^4)^4 = a^{16}$ ，故该选项正确，符合题意；

D. $a^8 \div a^4 = a^4$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，熟练掌握同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项的运算法则是解题的关键.

4. 在数轴上表示不等式 $\frac{x-1}{2} < 0$ 的解集，正确的是 ()



【答案】A

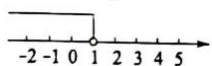
【解析】

【分析】先解不等式，然后在数轴上表示不等式的解集即可求解.

【详解】解： $\frac{x-1}{2} < 0$

解得： $x < 1$,

数轴上表示不等式的解集



故选：A.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式，在数轴上表示不等式的解集，数形结合是解题的关键.

5. 下列函数中， y 的值随 x 值的增大而减小的是 ()

- A. $y = x^2 + 1$ B. $y = -x^2 + 1$ C. $y = 2x + 1$ D. $y = -2x + 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数的性质，一次函数的性质，逐项分析判断即可求解.

【详解】解：A. $y = x^2 + 1$, $a > 0$, 对称轴为直线 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时， y 的值随 x 值的增大而减小，当 $x > 0$ 时， y 的值随 x 值的增大而增大，故该选项不正确，不符合题意；

B. $y = -x^2 + 1$, $a < 0$, 对称轴为直线 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时， y 的值随 x 值的增大而增大，当 $x > 0$ 时， y 的值随 x 值的增大而减小，故该选项不正确，不符合题意；

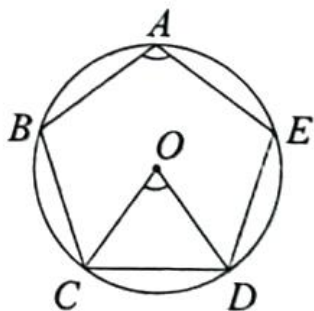
C. $y = 2x + 1$, $k > 0$, y 的值随 x 值的增大而增大，故该选项不正确，不符合题意；

D. $y = -2x + 1$, $k < 0$, y 的值随 x 值的增大而减小，故该选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了一次函数与二次函数的性质，熟练掌握一次函数与二次函数的性质是解题的关键.

6. 如图，正五边形 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$ ，连接 OC, OD ，则 $\angle BAE - \angle COD =$ ()



- A. 60° B. 54° C. 48° D. 36°

【答案】D

【解析】

【分析】先计算正五边形的内角，再计算正五边形的中心角，作差即可.

【详解】 $\because \angle BAE = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5}, \angle COD = \frac{360^\circ}{5},$
 $\therefore \angle BAE - \angle COD = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} - \frac{360^\circ}{5} = 36^\circ,$

故选 D.

【点睛】本题考查了正五边形的外角，内角，中心角的计算，熟练掌握计算公式是解题的关键.

7. 如果一个三位数中任意两个相邻数字之差的绝对值不超过 1，则称该三位数为“平稳数”. 用 1, 2, 3 这三个数字随机组成一个无重复数字的三位数，恰好是“平稳数”的概率为 ()

- A. $\frac{5}{9}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{9}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意列出所有可能，根据新定义，得出 2 种可能是“平稳数”，根据概率公式即可求解.

【详解】解：依题意，用 1, 2, 3 这三个数字随机组成一个无重复数字的三位数，可能结果有，

123, 132, 213, 231, 312, 321 共六种可能，

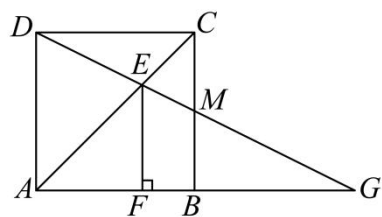
只有 123, 321 是“平稳数”

$\therefore$ 恰好是“平稳数”的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

故选：C.

【点睛】本题考查了新定义，概率公式求概率，熟练掌握概率公式是解题的关键.

8. 如图，点 E 在正方形 ABCD 的对角线 AC 上，EF ⊥ AB 于点 F，连接 DE 并延长，交边 BC 于点 M，交边 AB 的延长线于点 G. 若 AF = 2，FB = 1，则 MG = ()



- A. $2\sqrt{3}$ B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ C. $\sqrt{5}+1$ D. $\sqrt{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行线分线段成比例得出 $\frac{DE}{EM} = \frac{AF}{FB} = 2$ ，根据 $\triangle ADE \sim \triangle CME$ ，得出 $\frac{CM}{AD} = \frac{DE}{EM} = 2$ ，
 则 $CM = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}$ ，进而可得 $MB = \frac{2}{3}$ ，根据 $BC \parallel AD$ ，得出 $\triangle GMB \sim \triangle GDA$ ，根据相似三角形的性

质得出 $BG = 3$ ，进而在 $\text{Rt}\triangle BGM$ 中，勾股定理即可求解.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $AF = 2$ ， $FB = 1$ ，

$$\therefore AD = BC = AB = AF + FG = 2 + 1 = 3, \quad AD \parallel CB, \quad AD \perp AB, CB \perp AB,$$

$$\therefore EF \perp AB,$$

$$\therefore AD \parallel EF \parallel BC$$

$$\therefore \frac{DE}{EM} = \frac{AF}{FB} = 2, \quad \triangle ADE \sim \triangle CME,$$

$$\therefore \frac{CM}{AD} = \frac{DE}{EM} = 2, \quad \text{则 } CM = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2},$$

$$\therefore MB = \frac{2}{3},$$

$$\because BC \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle GMB \sim \triangle GDA,$$

$$\therefore \frac{BG}{AB} = \frac{MB}{DA} = \frac{\frac{2}{3}}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore BG = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2},$$

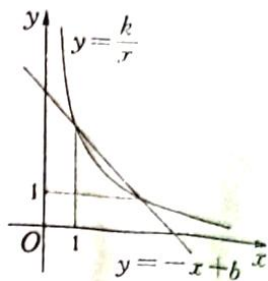
$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BGM \text{ 中, } MG = \sqrt{MB^2 + BG^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

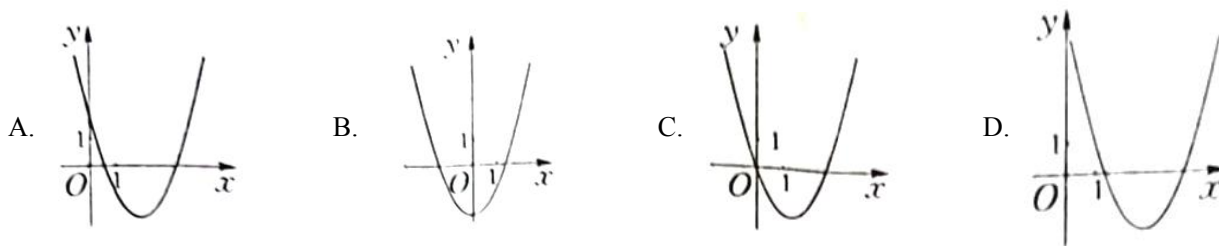
故选：B.

【点睛】本题考查了正方形的性质，平行线分线段成比例，相似三角形的性质与判定，勾股定理，熟练掌握以上知识是解题的关键.

9. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在第一象限内的图象与一次函数 $y = -x + b$ 的图象如图所示，则函数

$y = x^2 - bx + k - 1$ 的图象可能为 ()



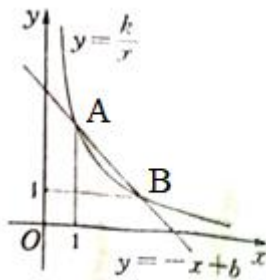


【答案】A

【解析】

【分析】设 $A(1, k)$ ，则 $B(k, 1)$ ， $k > 1$ ，将点 $B(k, 1)$ ，代入 $y = -x + b$ ，得出 $k = b - 1$ ，代入二次函数，可得当 $x = 1$ 时， $y = -1$ ，则 $y = x^2 - bx + k - 1$ ，得出对称轴为直线 $x = \frac{b}{2} > 1$ ，抛物线对称轴在 y 轴的右侧，且过定点 $(1, -1)$ ，进而即可求解。

【详解】解：如图所示，



设 $A(1, k)$ ，则 $B(k, 1)$ ，根据图象可得 $k > 1$ ，

将点 $B(k, 1)$ 代入 $y = -x + b$ ，

$$\therefore 1 = -k + b,$$

$$\therefore k = b - 1,$$

$$\therefore k > 1,$$

$$\therefore b > 2,$$

$$\therefore y = x^2 - bx + k - 1 = x^2 - bx + (b - 1) - 1 = x^2 - bx + b - 2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} + b - 2,$$

对称轴为直线 $x = \frac{b}{2} > 1$ ，

当 $x = 1$ 时， $1 - b + b - 2 = -1$ ，

$\therefore$ 抛物线经过点 $(1, -1)$ ，

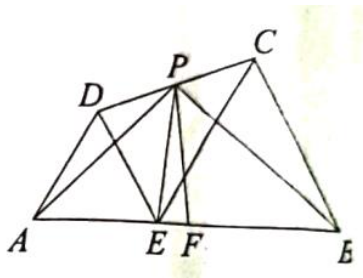
$\therefore$ 抛物线对称轴在 $x = 1$ 的右侧，且过定点 $(1, -1)$ ，

当 $x=0$ 时, $y=k-1=b-2>0$,

故选: A.

【点睛】 本题考查了一次函数与反比例函数交点问题, 二次函数图象的性质, 得出 $k=b-1$ 是解题的关键.

10. 如图, E 是线段 AB 上一点, $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCE$ 是位于直线 AB 同侧的两个等边三角形, 点 P, F 分别是 CD, AB 的中点. 若 $AB=4$, 则下列结论错误的是 ()



A. $PA+PB$ 的最小值为 $3\sqrt{3}$

B. $PE+PF$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$

C. $\triangle CDE$ 周长的最小值为 6

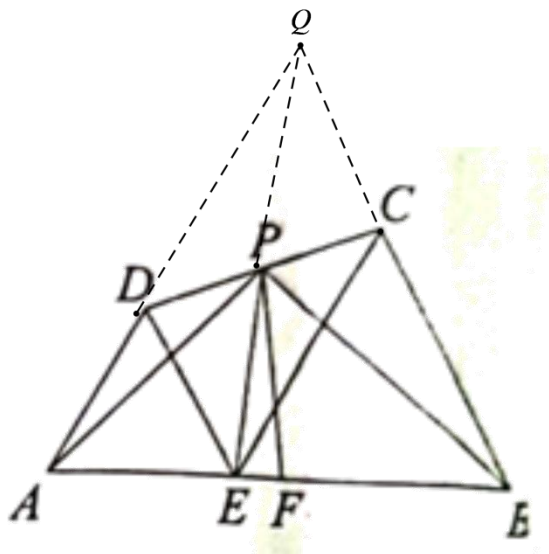
D. 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 $3\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 延长 AD, BC , 则 $\triangle ABQ$ 是等边三角形, 观察选项都是求最小时, 进而得出当 E 点与 F 重合时, 则 Q, P, F 三点共线, 各项都取得最小值, 得出 B, C, D 选项正确, 即可求解.

【详解】 解: 如图所示,



延长 AD, BC ,

依题意 $\angle QAD = \angle QBA = 60^\circ$

$\therefore \triangle ABQ$ 是等边三角形,

$\because P$ 是 CD 的中点,

$\therefore PD = PC$,

$\because \angle DEA = \angle CBA$,

$\therefore ED \parallel CQ$

$\therefore \angle PQC = \angle PED, \angle PCQ = \angle PDE$,

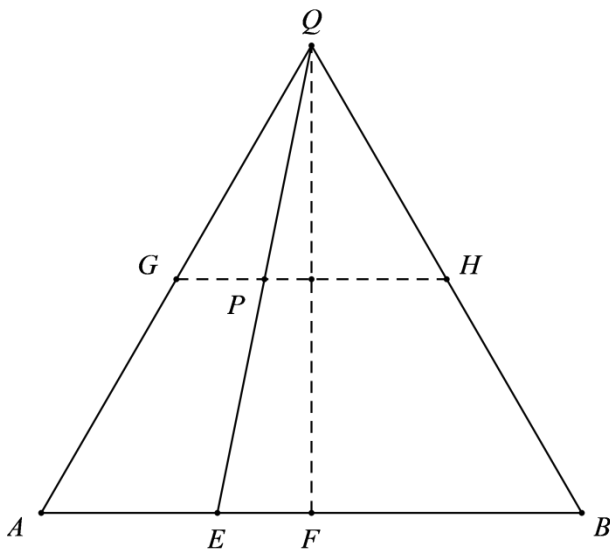
$\therefore \triangle PDE \cong \triangle PCQ$

$\therefore PQ = PE$,

$\therefore$ 四边形 $DECQ$ 是平行四边形,

则 P 为 EQ 的中点

如图所示,



设 AQ, BQ 的中点分别为 G, H ,

则 $GP = \frac{1}{2}AE, PH = \frac{1}{2}EB$

$\therefore$ 当 E 点在 AB 上运动时, P 在 GH 上运动,

当 E 点与 F 重合时, 即 $AE = EB$,

则 Q, P, F 三点共线， PF 取得最小值，此时 $AE = EB = \frac{1}{2}(AE + EB) = 2$,

则 $\triangle ADE \cong \triangle ECB$,

$\therefore C, D$ 到 AB 的距离相等,

则 $CD \parallel AB$,

$$\text{此时 } PF = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \sqrt{3}$$

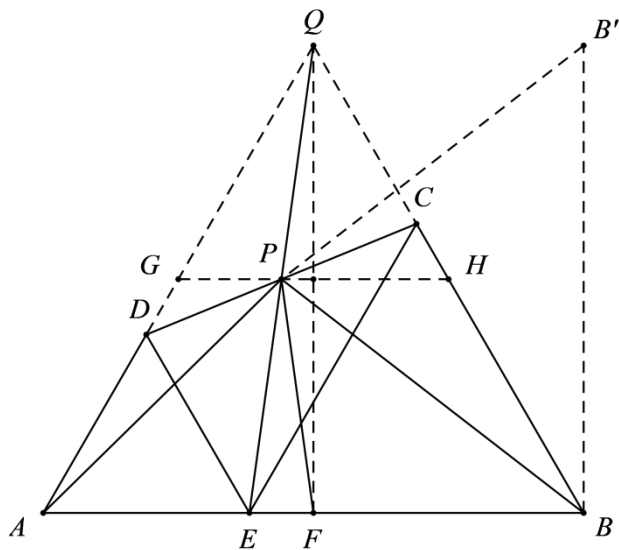
此时 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCE$ 的边长都为 2，则 AP, PB 最小，

$$\therefore PF = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3},$$

$$\therefore PA = PB = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore PA + PB = 2\sqrt{7},$$

或者如图所示，作点 B 关于 GH 对称点 B' ，则 $PB = PB'$ ，则当 A, P, B' 三点共线时， $AP + PB = AB'$



$$\text{此时 } AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$$

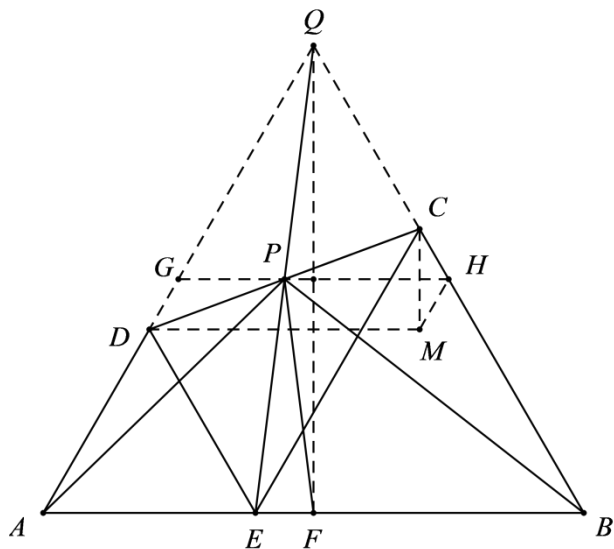
故 A 选项错误，

根据题意可得 P, Q, F 三点共线时， PF 最小，此时 $PE = PF = \sqrt{3}$ ，则 $PE + PF = 2\sqrt{3}$ ，故 B 选项正确；

$$\triangle CDE \text{ 周长等于 } CD + DE + CE = CD + AE + EB = CD + AB = CD + 4,$$

即当 CD 最小时， $\triangle CDE$ 周长最小，

如图所示，作平行四边形 $GDMH$ ，连接 CM ，



$\therefore \angle GHQ = 60^\circ, \angle GHM = \angle GDM = 60^\circ$ ，则 $\angle CHM = 120^\circ$

如图，延长 DE, HG ，交于点 N ，

则 $\angle NGD = \angle QGH = 60^\circ$ ， $\angle NDG = \angle ADE = 60^\circ$

$\therefore \triangle NGD$ 是等边三角形，

$\therefore ND = GD = HM$ ，

在 $\triangle NPD$ 与 $\triangle HPC$ 中，

$$\begin{cases} \angle NPD = \angle HPC \\ \angle N = \angle CHP = 60^\circ \\ PD = PC \end{cases}$$

$\therefore \triangle NPD \cong \triangle HPC$

$\therefore ND = CH$

$\therefore CH = MH$

$\therefore \angle HCM = \angle HMC = 30^\circ$

$\therefore CM \parallel QF$ ，则 $CM \perp DM$ ，

$\therefore \triangle DMC$ 是直角三角形，

故选：A.

【点睛】本题考查了解直角三角形，等边三角形的性质，勾股定理，熟练掌握等边三角形的性质，得出当 E 点与 F 重合时得出最小值是解题的关键.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

11. 计算： $\sqrt[3]{8} + 1 =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】根据求一个数的立方根，有理数的加法即可求解.

【详解】解： $\sqrt[3]{8} + 1 = 2 + 1 = 3$,

故答案为： 3.

【点睛】本题考查了求一个数的立方根，熟练掌握立方根的定义是解题的关键.

12. 据统计，2023年第一季度安徽省采矿业实现利润总额 74.5 亿元，其中 74.5 亿用科学记数法表示为_____.

【答案】 7.45×10^9

【解析】

【分析】用科学记数法表示绝对值较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数.

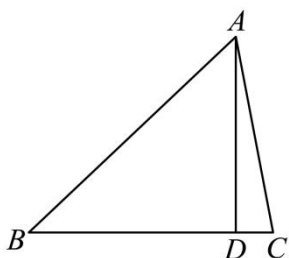
【详解】解： 74.5 亿 $= 74.5 \times 10^8 = 7.45 \times 10^9$.

故答案为： 7.45×10^9 .

【点睛】本题考查了科学记数法，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原来的数，变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

13. 清初数学家梅文鼎在著作《平三角举要》中，对南宋数学家秦九韶提出的计算三角形面积的“三斜求积术”给出了一个完整的证明，证明过程中创造性地设计直角三角形，得出了一个结论：如图， AD 是锐角

$\triangle ABC$ 的高，则 $BD = \frac{1}{2} \left(BC + \frac{AB^2 - AC^2}{BC} \right)$. 当 $AB = 7, BC = 6, AC = 5$ 时， $CD =$ _____.



【答案】 1

【解析】

【分析】 根据公式求得 BD ，根据 $CD = BC - BD$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because AB = 7, BC = 6, AC = 5$,

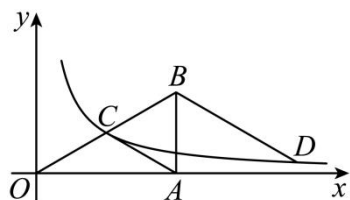
$$\therefore BD = \frac{1}{2} \left(BC + \frac{AB^2 - AC^2}{BC} \right) = \frac{1}{2} \left(6 + \frac{49 - 25}{6} \right) = 5$$

$$\therefore CD = BC - BD = 6 - 5 = 1,$$

故答案为： 1.

【点睛】 本题考查了三角形的高的定义，正确的使用公式是解题的关键.

14. 如图， O 是坐标原点， $Rt\triangle OAB$ 的直角顶点 A 在 x 轴的正半轴上， $AB = 2, \angle AOB = 30^\circ$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象经过斜边 OB 的中点 C .



(1) $k =$ _____;

(2) D 为该反比例函数图象上的一点，若 $DB \parallel AC$ ，则 $OB^2 - BD^2$ 的值为_____.

【答案】 ①. $\sqrt{3}$ ②. 4

【解析】

【分析】 (1) 根据已知条件得出 A, B 的坐标，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的得出 C 的坐标，进而即可求解；

(2) 根据题意，求得直线 AC, BD ，联立 BD 与反比例函数解析式，得出 D 的坐标，进而根据两点距离公式求得 OB^2, BD^2 ，进而即可求解.

【详解】 解： (1) $\because AB = 2, \angle AOB = 30^\circ$,

$$\therefore OA = 2\sqrt{3}, OB = 2AB = 4$$

$$\therefore A(2\sqrt{3}, 0), B(2\sqrt{3}, 2),$$

$\because C$ 是 OB 的中点,

$$\therefore C(\sqrt{3}, 1),$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象经过斜边 OB 的中点 C .

$$\therefore k = \sqrt{3};$$

$$\therefore \text{反比例数解析式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{x}$$

故答案为: $\sqrt{3}$;

$$(2) \because A(2\sqrt{3}, 0), C(\sqrt{3}, 1)$$

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b$

$$\therefore \begin{cases} 0 = 2\sqrt{3}k + b \\ 1 = \sqrt{3}k + b \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2,$$

$$\therefore DB \parallel AC,$$

设直线 BD 的解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$, 将点 $B(2\sqrt{3}, 2)$ 代入并解得 $b = 4$,

$$\therefore \text{直线 } BD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4,$$

$$\therefore \text{反比例数解析式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{x}$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{x} \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 2\sqrt{3} + 3 \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2\sqrt{3} - 3 \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{当 } \begin{cases} x = 2\sqrt{3} + 3 \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ 时, } BD^2 = (2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3})^2 + (2 - 2 + \sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12$$

$$\text{当} \begin{cases} x = 2\sqrt{3} - 3 \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{时, } BD^2 = (2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3)^2 + (2 + \sqrt{3} - 2)^2 = 9 + 3 = 12$$

$$OB^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 16$$

$$\therefore OB^2 - BD^2 = 4,$$

故答案为：4.

【点睛】本题考查了反比例函数与几何图形，反比例函数与一次函数交点问题，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键.

三、(本大题共2小题，每小题8分，满分16分)

15. 先化简，再求值： $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ ，其中 $x = \sqrt{2} - 1$.

【答案】 $x + 1$ ； $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先根据分式的性质化简，最后将字母的值代入求解.

【详解】解： $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

$$= \frac{(x + 1)^2}{x + 1}$$

$$= x + 1,$$

当 $x = \sqrt{2} - 1$ 时，

$$\therefore \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2}.$$

【点睛】本题考查了分式化简求值，解题关键是熟练运用分式运算法则进行求解.

16. 根据经营情况，公司对某商品在甲、乙两地的销售单价进行了如下调整：甲地上涨10%，乙地降价5元，已知销售单价调整前甲地比乙地少10元，调整后甲地比乙地少1元，求调整前甲、乙两地该商品的销售单价.

【答案】调整前甲、乙两地该商品的销售单价分别为40,50元

【解析】

【分析】设调整前甲、乙两地该商品的销售单价分别为 x, y 元，根据题意，列出二元一次方程组，解方程组即可求解.

【详解】解：设调整前甲、乙两地该商品的销售单价分别为 x, y 元，根据题意得，

$$\begin{cases} x+10=y \\ x(1+10\%)+1=y-5 \end{cases}$$

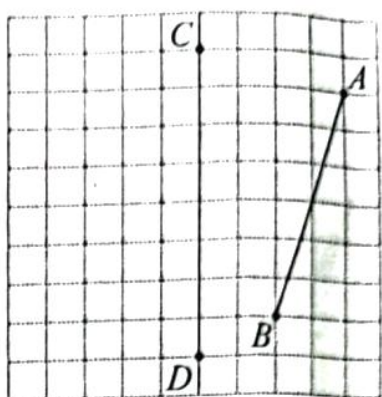
解得：
$$\begin{cases} x=40 \\ y=50 \end{cases}$$

答：调整前甲、乙两地该商品的销售单价分别为 40,50 元

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的应用，根据题意列出二元一次方程组是解题的关键.

四、(本大题共 2 小题、每小题 8 分、满分 16 分)

17. 如图，在由边长为 1 个单位长度的小正方形组成的网格中，点 A, B, C, D 均为格点（网格线的交点）.



- (1) 画出线段 AB 关于直线 CD 对称的线段 A_1B_1 ;
- (2) 将线段 AB 向左平移 2 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，得到线段 A_2B_2 ，画出线段 A_2B_2 ;
- (3) 描出线段 AB 上的点 M 及直线 CD 上的点 N ，使得直线 MN 垂直平分 AB .

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据轴对称的性质找到 A, B 关于直线 CD 的对称点， A_1, B_1 ，连接 A_1, B_1 ，则线段 A_1B_1 即为所求；

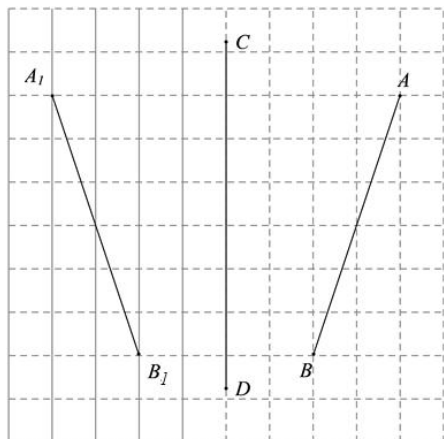
(2) 根据平移的性质得到线段 A_2B_2 即为所求；

(3) 勾股定理求得 $AM = BM = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ， $MN = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，则 $AM = MN$ 证明

$\triangle NPM \cong \triangle MQA$ 得出 $\angle NMP + \angle AMQ = 90^\circ$ ，则 $AM \perp MN$ ，则点 M, N 即为所求.

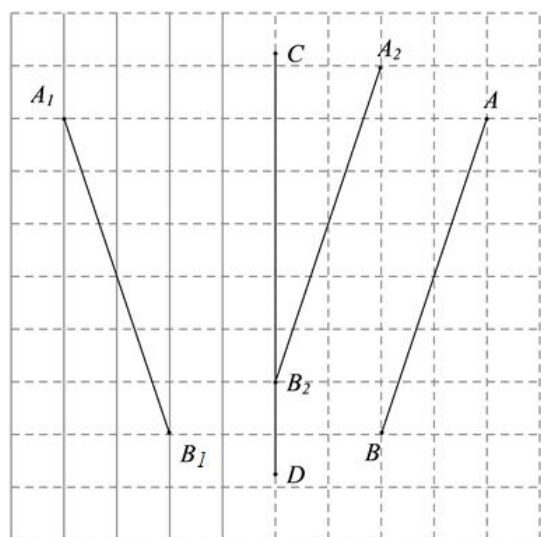
【小问 1 详解】

解：如图所示，线段 A_1B_1 即为所求；



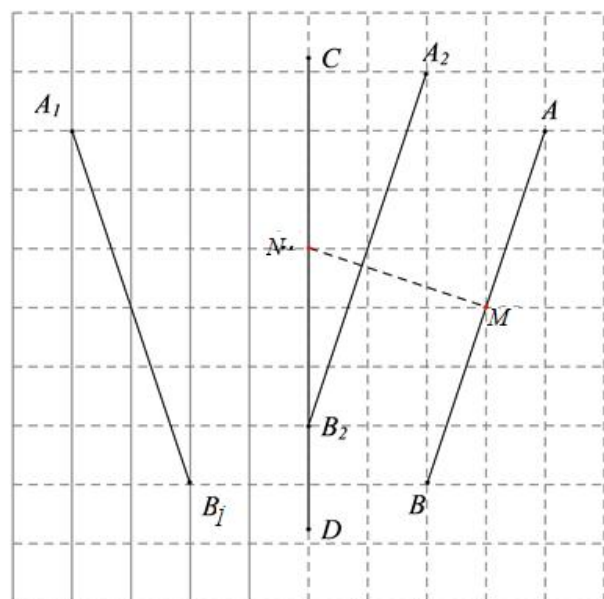
【小问 2 详解】

解：如图所示，线段 A_2B_2 即为所求；

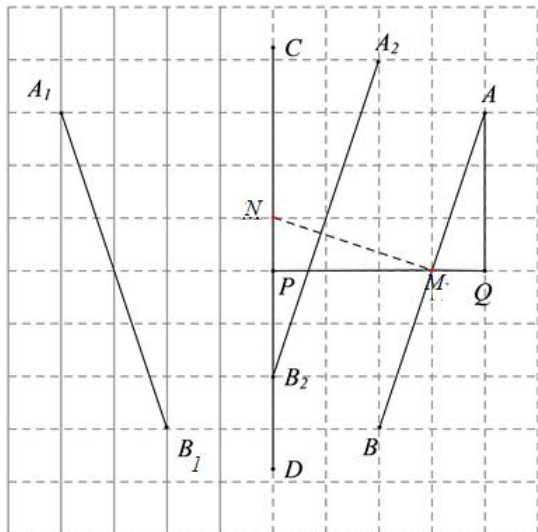


【小问 3 详解】

解：如图所示，点 M, N 即为所求



如图所示，



$$\because AM = BM = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \quad MN = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore AM = MN,$$

$$\text{又 } NP = MQ = 1, MP = AQ = 3,$$

$$\therefore \triangle NPM \cong \triangle MQA,$$

$$\therefore \angle NMP = \angle MAQ,$$

$$\text{又 } \angle MAQ + \angle AMQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NMP + \angle AMQ = 90^\circ$$

$$\therefore AM \perp MN,$$

$$\therefore MN \text{ 垂直平分 } AB.$$

【点睛】 本题考查了轴对称作图，平移作图，勾股定理与网格问题，熟练掌握以上知识是解题的关键.

18. 【观察思考】



【规律发现】

请用含 n 的式子填空:

(1) 第 n 个图案中 “ $\odot$ ” 的个数为_____;

(2) 第1个图案中“★”的个数可表示为 $\frac{1 \times 2}{2}$ ，第2个图案中“★”的个数可表示为 $\frac{2 \times 3}{2}$ ，第3个图案中“★”的个数可表示为 $\frac{3 \times 4}{2}$ ，第4个图案中“★”的个数可表示为 $\frac{4 \times 5}{2}$ ，……，第 n 个图案中“★”的个数可表示为_____.

【规律应用】

(3) 结合图案中“★”的排列方式及上述规律，求正整数 n ，使得连续的正整数之和 $1+2+3+\cdots+n$ 等于第 n 个图案中“◎”的个数的2倍.

【答案】(1) $3n$

(2) $\frac{n \times (n+1)}{2}$

(3) $n=11$

【解析】

【分析】(1) 根据前几个图案的规律，即可求解；

(2) 根据题意，结合图形规律，即可求解.

(3) 根据题意，列出一元二次方程，解方程即可求解.

【小问1详解】

解：第1个图案中有3个◎，

第2个图案中有 $3+3=6$ 个◎，

第3个图案中有 $3+2 \times 3=9$ 个◎，

第4个图案中有 $3+3 \times 3=12$ 个◎，

……

∴第 n 个图案中有 $3n$ 个◎，

故答案为： $3n$.

【小问2详解】

第1个图案中“★”的个数可表示为 $\frac{1 \times 2}{2}$ ，

第2个图案中“★”的个数可表示为 $\frac{2 \times 3}{2}$ ，

第3个图案中“★”的个数可表示为 $\frac{3 \times 4}{2}$ ，

第4个图案中“★”的个数可表示为 $\frac{4 \times 5}{2}$ ，……，

第 n 个图案中“★”的个数可表示为 $\frac{n \times (n+1)}{2}$ ，

【小问 3 详解】

解：依题意， $1+2+3+\cdots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$,

第 n 个图案中有 $3n$ 个 $\odot$,

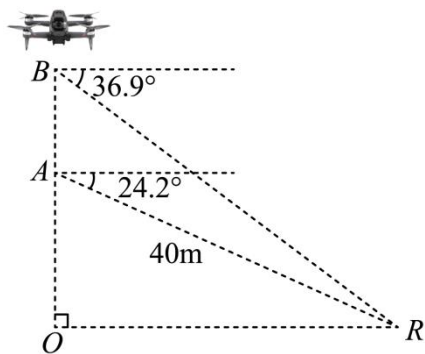
$$\therefore \frac{n(n+1)}{2}=3n\times 2,$$

解得： $n=0$ （舍去）或 $n=11$.

【点睛】本题考查了图形类规律，解一元二次方程，找到规律是解题的关键.

五、(本大题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分)

19. 如图， O, R 是同一水平线上的两点，无人机从 O 点竖直上升到 A 点时，测得 A 到 R 点的距离为 40m , R 点的俯角为 24.2° ，无人机继续竖直上升到 B 点，测得 R 点的俯角为 36.9° . 求无人机从 A 点到 B 点的上升高度 AB （精确到 0.1m ）. 参考数据： $\sin 24.2^\circ \approx 0.41, \cos 24.2^\circ \approx 0.91, \tan 24.2^\circ \approx 0.45$, $\sin 36.9^\circ \approx 0.60, \cos 36.9^\circ \approx 0.80, \tan 36.9^\circ \approx 0.75$.



【答案】无人机从 A 点到 B 点的上升高度 AB 约为 10.9 米

【解析】

【分析】解 $\text{Rt}\triangle AOR$ ，求得 AO ， OR ，在 $\text{Rt}\triangle BOR$ 中，求得 BO ，根据 $AB = BO - AO$ ，即可求解.

【详解】解：依题意， $\angle ARO = 24.2^\circ$ ， $\angle BRO = 36.9^\circ$ ， $AR = 40$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOR$ 中， $\angle ARO = 24.2^\circ$ ，

$$\therefore AO = AR \times \sin \angle ARO = 40 \times \sin 24.2^\circ, \quad RO = AR \times \cos \angle ARO = 40 \times \cos 24.2^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BOR$ 中， $OB = OR \times \tan \angle BRO = 40 \times \cos 24.2^\circ \times \tan 36.9^\circ$ ，

$$\therefore AB = BO - AO$$

$$= 40 \times \cos 24.2^\circ \times \tan 36.9^\circ - 40 \times \sin 24.2^\circ$$

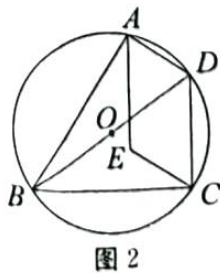
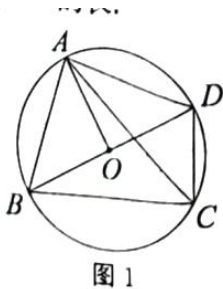
$$\approx 40 \times 0.91 \times 0.75 - 40 \times 0.41$$

$$\approx 10.9 \text{ (米)}$$

答：无人机从A点到B点的上升高度AB约为10.9米.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用，熟练掌握三角函数的定义是解题的关键.

20. 已知四边形ABCD内接于 $\odot O$ ，对角线BD是 $\odot O$ 的直径.



(1) 如图1，连接OA,CA，若 $OA \perp BD$ ，求证：CA平分 $\angle BCD$ ；

(2) 如图2，E为 $\odot O$ 内一点，满足 $AE \perp BC, CE \perp AB$ ，若 $BD = 3\sqrt{3}$ ， $AE = 3$ ，求弦BC的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $BC = 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 利用垂径定理的推论和圆周角的性质证明即可.

(2) 证明四边形AECD平行四边形，后用勾股定理计算即可.

【小问1详解】

$\because$ 对角线BD是 $\odot O$ 的直径， $OA \perp BD$

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AD}$,

$\therefore \angle BCA = \angle DCA$,

$\therefore$ CA平分 $\angle BCD$.

【小问2详解】

$\because$ 对角线BD是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore DC \perp BC, DA \perp AB$

$\because AE \perp BC, CE \perp AB$,

$\therefore DC \parallel AE, DA \parallel CE$,

$\therefore$ 四边形AECD平行四边形，

$\therefore DC = AE$,

$\because BD = 3\sqrt{3}$ ， $AE = 3$ ，

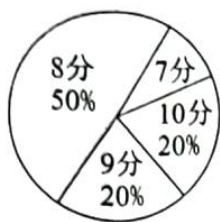
$$\therefore BD = 3\sqrt{3}, \quad DC = 3,$$

$$\therefore BC = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

【点睛】本题考查了垂径定理的推论，直径所对的圆周角是直角，平行四边形的判定和性质，勾股定理，熟练掌握垂径定理的推论，平行四边形的判定和性质，勾股定理是解题的关键.

六、(本题满分 12 分)

21. 端午节是中国的传统节日，民间有端午节吃粽子的习俗，在端午节来临之际，某校七、八年级开展了一次“包粽子”实践活动，对学生的活动情况按10分制进行评分，成绩（单位：分）均为不低于6的整数、为了解这次活动的效果，现从这两个年级各随机抽取10名学生的活动成绩作为样本进行活整理，并绘制统计图表，部分信息如下：



七年级10名学生活动成绩扇形统计图

八年级10名学生活动成绩统计表

成绩/分	6	7	8	9	10
人数	1	2	a	b	2

已知八年级10名学生活动成绩的中位数为8.5分.

请根据以上信息，完成下列问题：

(1) 样本中，七年级活动成绩为7分的学生数是_____，七年级活动成绩的众数为_____分；

(2) $a =$ _____, $b =$ _____；

(3) 若认定活动成绩不低于9分为“优秀”，根据样本数据，判断本次活动中优秀率高的年级是否平均成绩也高，并说明理由.

【答案】(1) 1,8

(2) 2,3

(3) 优秀率高的年级不是平均成绩也高，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据扇形统计图得出七年级活动成绩为7分的学生数的占比为10%，即可得出七年级活动成

绩为7分的学生数，根据扇形统计图结合众数的定义，即可求解；

(2) 根据中位数的定义，得出第5名学生为8分，第6名学生为9分，进而求得 a ， b 的值，即可求解；

(3) 分别求得七年级与八年级的优秀率与平均成绩，即可求解.

【小问1详解】

解：根据扇形统计图，七年级活动成绩为7分的学生数的占比为 $1-50\%-20\%-20\%=10\%$

$\therefore$ 样本中，七年级活动成绩为7分的学生数是 $10 \times 10\%=1$,

根据扇形统计图，七年级活动成绩的众数为8分，

故答案为：1,8.

【小问2详解】

$\therefore$ 八年级10名学生活动成绩的中位数为8.5分，

$\therefore$ 第5名学生为8分，第6名学生为9分，

$\therefore a=5-1-2=2$,

$b=10-1-2-2-2=3$,

故答案为：2,3.

【小问3详解】

优秀率高的年级不是平均成绩也高，理由如下，

七年级优秀率为 $20\%+20\%=40\%$ ，平均成绩为： $7 \times 10\%+8 \times 50\%+9 \times 20\%+10 \times 20\%=8.5$ ，

八年级优秀率为 $\frac{3+2}{10} \times 100\% = 50\% > 40\%$ ，平均成绩为：

$\frac{1}{10} \times (6+7 \times 2+2 \times 8+3 \times 9+2 \times 10) = 8.3 < 8.5$ ，

$\therefore$ 优秀率高的年级为八年级，但平均成绩七年级更高，

$\therefore$ 优秀率高的年级不是平均成绩也高

【点睛】本题考查了扇形统计图，统计表，中位数，众数，求一组数据的平均数，从统计图表获取信息是解题的关键.

七、(本题满分12分)

22. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， M 是斜边 AB 的中点，将线段 MA 绕点 M 旋转至 MD 位置，点 D 在直线 AB 外，连接 AD, BD .

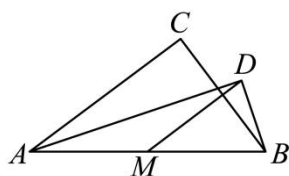


图1

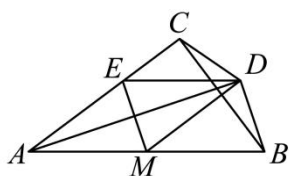


图2

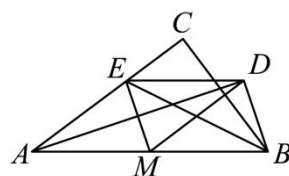


图3

(1) 如图 1, 求 $\angle ADB$ 的大小;

(2) 已知点 D 和边 AC 上的点 E 满足 $ME \perp AD, DE \parallel AB$.

(i) 如图 2, 连接 CD , 求证: $BD = CD$;

(ii) 如图 3, 连接 BE , 若 $AC = 8, BC = 6$, 求 $\tan \angle ABE$ 的值.

【答案】(1) $\angle ADB = 90^\circ$

(2) (i) 见解析; (ii) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据旋转的性质得出 $MA = MD = MB$, 根据等边对接等角得出 $\angle MAD = \angle MDA, \angle MBD = \angle MDB$, 在 $\triangle ABD$ 中, 根据三角形内角和定理即得出 $\angle MAD + \angle MDA + \angle MBD + \angle MDB = 180^\circ$, 进而即可求解;

(2) (i) 延长 AC, BD 交于点 F , 证明四边形 $AEDM$ 是菱形, 进而根据平行线分线段成比例得出, $AF = AB$, 根据等腰三角形的性质, 得出 D 是 BF 的中点, 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 即可得证;

(ii) 如图所示, 过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H , 由 $\triangle AHE \sim \triangle ACB$, 得出 $EH = 3, AH = 4$, $BH = AB - AH = 10 - 4 = 6$, 进而根据正切的定义即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because MA = MD = MB$

$\therefore \angle MAD = \angle MDA, \angle MBD = \angle MDB$,

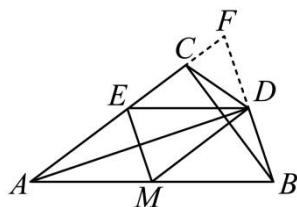
在 $\triangle ABD$ 中, $\angle MAD + \angle MDA + \angle MBD + \angle MDB = 180^\circ$

$\therefore \angle ADB = \angle ADM + \angle BDM = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

【小问 2 详解】

证明: (i) 证法一:

如图, 延长 BD, AC , 交于点 F , 则 $\angle BCF = 90^\circ$,



$$\because ME \perp AD, \angle ADB = 90^\circ$$

$$\therefore EM \parallel BD.$$

$$\text{又} \because DE \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 $BDEM$ 是平行四边形.

$$\therefore DE = BM.$$

$$\because M \text{ 是 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore AM = BM.$$

$$\therefore DE = AM.$$

$\therefore$ 四边形 $AMDE$ 是平行四边形.

$$\because ME \perp AD,$$

$\therefore \square AMDE$ 是菱形.

$$\therefore AE = AM.$$

$$\because EM \parallel BD,$$

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{AM}{AB}.$$

$$\therefore AB = AF.$$

$$\because \angle ADB = 90^\circ, \text{ 即 } AD \perp BF,$$

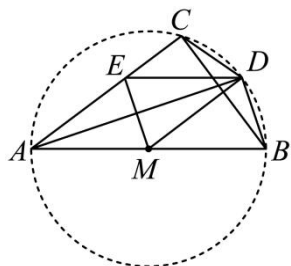
$\therefore BD = DF$, 即点 D 是 $\text{Rt}\triangle BCF$ 斜边的中点.

$$\therefore BD = CD.$$

证法二:

$$\because \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ, M \text{ 是斜边 } AB \text{ 的中点},$$

$\therefore$ 点 A, C, D, B 在以 M 为圆心, AB 为直径的 $\odot M$ 上.



$$\because ME \perp AD,$$

$\therefore ME$ 垂直平分 AD .

$\therefore EA = ED$.

$\therefore \angle EAD = \angle EDA$.

$\therefore DE \parallel AB$,

$\therefore \angle BAD = \angle EDA$.

$\therefore \angle EAD = \angle BAD$.

$\therefore BD = CD$.

证法三:

$\because ME \perp AD$, $\angle ADB = 90^\circ$

$\therefore EM \parallel BD$.

又 $\because DE \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $BDEM$ 是平行四边形.

$\therefore DE = BM$.

$\because M$ 是 AB 的中点,,

$\therefore AM = BM$.

$\therefore DE = AM$.

$\therefore$ 四边形 $AMDE$ 是平行四边形.

$\because ME \perp AD$,

$\therefore \square AMDE$ 是菱形.

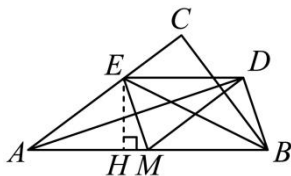
$\therefore \angle EAD = \angle MAD$.

$\because \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, M 是斜边 AB 的中点,

$\therefore$ 点 A 、 C 、 D 、 B 在以 M 为圆心, AB 为直径的 $\odot M$ 上.

$\therefore BD = CD$.

(2) 如图所示, 过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H ,



$\because AC = 8, BC = 6$,

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$, 则 $AE = AM = \frac{1}{2}AB = 5$,

$$\therefore \angle EAH = \angle BAC, \angle ACB = \angle AHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AHE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{EH}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{5}{10},$$

$$\therefore EH = 3, AH = 4,$$

$$\therefore BH = AB - AH = 10 - 4 = 6,$$

$$\therefore \tan ABE = \frac{EH}{BH} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，菱形的性质与判定，平行线分线段成比例，相似三角形的性质与判定，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，勾股定理，求正切，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

八、(本题满分 14 分)

23. 在平面直角坐标系中, 点 O 是坐标原点, 抛物线 $y = ax^2 + bx (a \neq 0)$ 经过点 $A(3, 3)$, 对称轴为直线 $x = 2$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 已知点 B, C 在抛物线上, 点 B 的横坐标为 t , 点 C 的横坐标为 $t+1$. 过点 B 作 x 轴的垂线交直线 OA 于点 D , 过点 C 作 x 轴的垂线交直线 OA 于点 E .

(i) 当 $0 < t < 2$ 时, 求 $\triangle OBD$ 与 $\triangle ACE$ 的面积之和;

(ii) 在抛物线对称轴右侧, 是否存在点 B , 使得以 B, C, D, E 为顶点的四边形的面积为 $\frac{3}{2}$? 若存在, 请求出点 B 的横坐标 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $a = -1, b = 4$

(2) (i) 2; (2) $t = \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解;

(2) (i) 根据题意画出图形, 得出 $B(t, -t^2 + 4t), C(t+1, -(t+1)^2 + 4(t+1)), D(t, t), E(t+1, t+1)$, 继而得出 $BD = |-t^2 + 3t| = \begin{cases} -t^2 + 3t (0 < t \leq 3) \\ t^2 - 3t (t > 3) \end{cases}$, $CE = |-(t+1)^2 + 3(t+1)| = \begin{cases} -t^2 + t + 2 (0 < t < 2) \\ t^2 - t - 2 (t \geq 2) \end{cases}$, 当 $0 < t < 2$ 时, 根据三角形的面积公式, 即可求解.

(ii) 根据 (i) 的结论, 分 $2 < t < 3$ 和 $t > 3$ 分别求得梯形的面积, 根据四边形的面积为 $\frac{3}{2}$ 建立方程, 解方程进而即可求解.

【小问 1 详解】

$$\text{解：依题意，} \begin{cases} 9a + 3b = 3 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x^2 + 4x;$$

【小问 2 详解】

(i) 设直线 OA 的解析式为 $y = kx$,

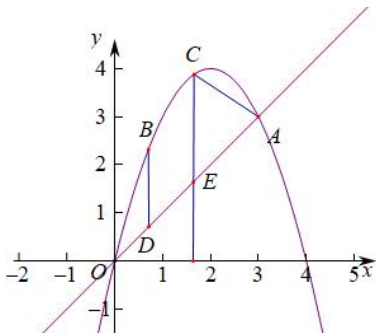
$$\therefore A(3, 3),$$

$$\therefore 3 = 3k$$

$$\text{解得：} k = 1,$$

$$\therefore \text{直线 } y = x,$$

如图所示，依题意， $B(t, -t^2 + 4t), C(t+1, -(t+1)^2 + 4(t+1)), D(t, t), E(t+1, t+1)$,



$$\therefore BD = |-t^2 + 3t| = \begin{cases} -t^2 + 3t & (0 < t \leq 3) \\ t^2 - 3 & (t > 3) \end{cases},$$

$$CE = |-(t+1)^2 + 3(t+1)| = \begin{cases} -t^2 + t + 2 & (0 < t < 2) \\ t^2 - t - 2 & (t \geq 2) \end{cases},$$

$$\therefore \text{当 } 0 < t < 2 \text{ 时，} \triangle OBD \text{ 与 } \triangle ACE \text{ 的面积之和为 } \frac{1}{2}BD \times t + \frac{1}{2}CE(3-t-1) = 2,$$

(ii) 当点 B 在对称右侧时，则 $t > 2$,

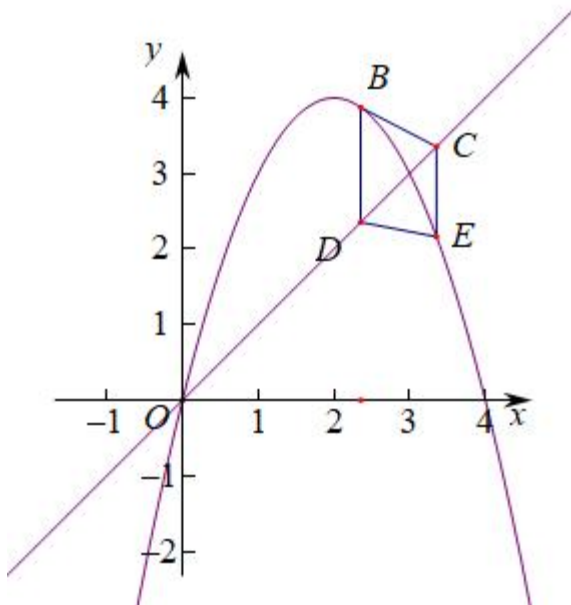
$$\therefore CE = t^2 - t - 2,$$

$$\text{当 } 2 < t < 3 \text{ 时，} BD = -t^2 + 3t,$$

$$\therefore S_{\text{梯形}BDEC} = \frac{1}{2}(-t^2 + 3t + t^2 - t - 2) \times 1 = t - 1,$$

$$\therefore t-1=\frac{3}{2},$$

$$\text{解得: } t=\frac{5}{2},$$

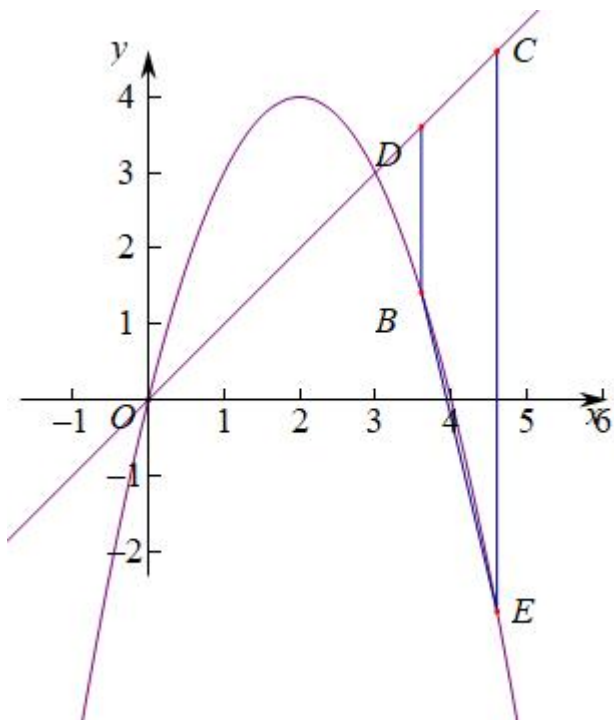


当 $t > 3$ 时, $BD = t^2 - 3t$,

$$\therefore S_{\text{梯形}BDCE} = \frac{1}{2}(t^2 - 3t + t^2 - t - 2) \times 1 = t^2 - 2t - 1,$$

$$\therefore t^2 - 2t - 1 = \frac{3}{2},$$

$$\text{解得: } t = \frac{2 + \sqrt{14}}{2} \text{ (舍去) 或 } t = \frac{2 - \sqrt{14}}{2} \text{ (舍去)}$$



综上所述， $t = \frac{5}{2}$.

【点睛】本题考查了二次函数综合问题，面积问题，待定系数法求二次函数解析式，分类讨论，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】