

2023 年天津市初中学业水平考试试卷

数学

本试卷分为第 I 卷（选择题）、第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷为第 1 页至第 3 页，第 II 卷为第 4 页至第 8 页，试卷满分 120 分。考试时间 100 分钟。

答卷前，请务必将自己的姓名、考生号、考点校、考场号、座位号填写在“答题卡”上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答题时，务必将答案涂写在“答题卡”上，答案答在试卷上无效。考试结束后，将本试卷和“答题卡”一并交回。祝你考试顺利！

第 I 卷

注意事项：

1. 每题选出答案后，用 2B 铅笔把“答题卡”上对应题目的答案标号的信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号的信息点。

2. 本卷共 12 题，共 36 分。

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 计算 $\frac{1}{2} \times (-2)$ 的结果等于 ()

A. $-\frac{5}{2}$

B. -1

C. $\frac{1}{4}$

D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】根据有理数的乘法法则，进行计算即可。

【详解】解： $\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) = 1$ ；

故选 D。

【点睛】本题考查有理数的乘法。熟练掌握有理数的乘法法则，是解题的关键。

2. 估计 $\sqrt{6}$ 的值应在 ()

A. 1 和 2 之间

B. 2 和 3 之间

C. 3 和 4 之间

D. 4 和 5 之间

【答案】B

【解析】

【分析】由于 $4 < 6 < 9$ ，于是 $\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$ ，从而有 $2 < \sqrt{6} < 3$ 。

【详解】解：∵ $4 < 6 < 9$ ，

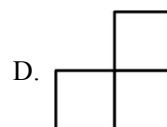
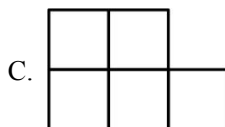
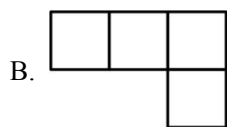
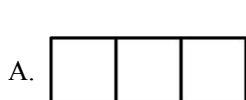
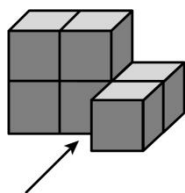
$$\therefore \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9},$$

$$\therefore 2 < \sqrt{6} < 3,$$

故选 B.

【点睛】本题考查了无理数的估算，解题关键是确定无理数的整数部分即可解决问题。

3. 如图是一个由 6 个相同的正方体组成的立体图形，它的主视图是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】根据主视图的定义判断。

【详解】根据主视图的定义，从正面（图中箭头方向）看到的图形应为两层，上层有 2 个，下层有 3 个正方形，

故答案为：C.

【点睛】本题考查主视图的定义，注意观察的方向，掌握主视图的定义判断是解题的关键。

4. 在一些美术字中，有的汉字是轴对称图形。下面 4 个汉字中，可以看作是轴对称图形的是（ ）

A. 全

B. 面

C. 发

D. 展

【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称的定义判断即可；

【详解】解：全面发展四个字中，可以看作是轴对称图形的是全；

故选 A.

【点睛】本题考查了轴对称图形：如果一个平面图形沿着一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线就是它的对称轴；掌握定义是解题关键。

5. 据 2023 年 5 月 21 日《天津日报》报道，在天津举办的第七届世界智能大会通过“百网同播、万人同屏、

亿人同观”，全球网友得以共享高端思想盛宴，总浏览量达到 935000000 人次，将数据 935000000 用科学记数法表示应为（ ）

- A. 0.935×10^9 B. 9.35×10^8 C. 93.5×10^7 D. 935×10^6

【答案】B

【解析】

【分析】根据科学记数法的表示方法进行表示即可.

【详解】解： $935000000 = 9.35 \times 10^8$ ；

故选 B.

【点睛】本题考查科学记数法. 熟练掌握科学记数法的表示方法： $a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$)， n 为整数，是解题的关键.

6. $\sin 45^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的值等于（ ）

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】先根据特殊角的三角函数值进行化简，再进行二次根式的加法运算即可.

【详解】解： $\sin 45^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值和二次根式的加法运算，熟练掌握特殊角的三角函数值是解题的关键.

7. 计算 $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$ 的结果等于（ ）

- A. -1 B. $x-1$ C. $\frac{1}{x+1}$ D. $\frac{1}{x^2-1}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据异分母分式加减法法则进行计算即可.

【详解】解： $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x+1};$$

故选：C.

【点睛】本题考查了异分母分式加减法法则，解答关键是按照相关法则进行计算.

8. 若点 $A(x_1, -2)$, $B(x_2, 1)$, $C(x_3, 2)$ 都在反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象上，则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是 ()

A. $x_3 < x_2 < x_1$

B. $x_2 < x_1 < x_3$

C. $x_1 < x_3 < x_2$

D. $x_2 < x_3 < x_1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质，进行判断即可.

【详解】解： $y = -\frac{2}{x}$, $-2 < 0$,

$\therefore$ 双曲线在二、四象限，在每一象限， y 随 x 的增大而增大；

$\because A(x_1, -2), B(x_2, 1), C(x_3, 2)$,

$\therefore x_1 > 0, x_2 < x_3 < 0$,

$\therefore x_2 < x_3 < x_1$;

故选 D.

【点睛】本题考查反比例函数的图象和性质. 熟练掌握反比例函数的性质，是解题的关键.

9. 若 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 6x - 7 = 0$ 的两个根，则 ()

A. $x_1 + x_2 = 6$

B. $x_1 + x_2 = -6$

C. $x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{6}$

D. $x_1 \cdot x_2 = 7$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一元二次方程的根与系数的关系即可得.

【详解】解：方程 $x^2 - 6x - 7 = 0$ 中的 $a = 1, b = -6, c = -7$,

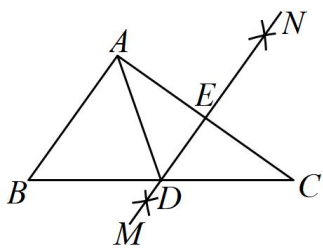
$\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - 6x - 7 = 0$ 的两个根，

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 6, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -7,$$

故选：A.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根与系数的关系，熟练掌握一元二次方程的根与系数的关系是解题关键.

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，分别以点 A 和点 C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧（弧所在圆的半径都相等），两弧相交于 M, N 两点，直线 MN 分别与边 BC, AC 相交于点 D, E ，连接 AD . 若 $BD = DC, AE = 4, AD = 5$ ，则 AB 的长为（ ）



- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】由作图可知直线 MN 为边 AC 的垂直平分线，再由 $BD = DC$ 得到 $AD = DC = BD = 5$ ，则可知 A, B, C 三点在以 D 为圆心 BC 直径的圆上，进而得到 $\angle BAC = 90^\circ$ ，由勾股定理求出 AB 即可.

【详解】解：由作图可知，直线 MN 为边 AC 的垂直平分线，

$$\therefore AD = 5$$

$$\therefore DC = AD = 5,$$

$$\therefore BD = DC,$$

$$\therefore AD = DC = BD = 5,$$

$\therefore A, B, C$ 三点在以 D 为圆心 BC 直径的圆上，

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = 4,$$

$$\therefore AC = 8$$

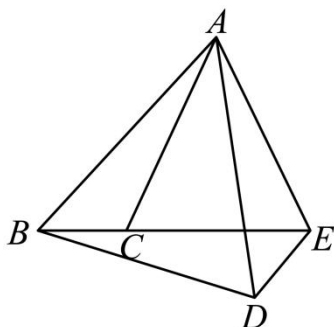
$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 6.$$

故选：D.

【点睛】本题考查了线段垂直平分线的尺规作图和性质，圆的基本性质和勾股定理，解答关键是熟练掌握

常用尺规作图的作图痕迹，由作图过程得到新的结论.

11. 如图，把 $\triangle ABC$ 以点 A 为中心逆时针旋转得到 $\triangle ADE$ ，点 B, C 的对应点分别是点 D, E ，且点 E 在 BC 的延长线上，连接 BD ，则下列结论一定正确的是（ ）



- A. $\angle CAE = \angle BED$ B. $AB = AE$ C. $\angle ACE = \angle ADE$ D. $CE = BD$

【答案】A

【解析】

【分析】根据旋转的性质即可解答.

【详解】根据题意，由旋转的性质，

可得 $AB = AD$ ， $AC = AE$ ， $BC = DE$ ，故 B 选项和 D 选项不符合题意，

$$\angle ABC = \angle ADE$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ABC + \angle BAC$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ADE + \angle BAC, \text{ 故 C 选项不符合题意,}$$

$$\angle ACB = \angle AED$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CAE + \angle CEA$$

$$\therefore \angle AED = \angle CEA + \angle BED$$

$$\therefore \angle CAE = \angle BED, \text{ 故 A 选项符合题意,}$$

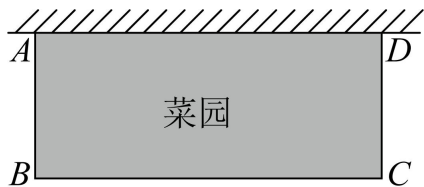
故选：A.

【点睛】本题考查了旋转的性质，熟练掌握旋转的性质和三角形外角运用是解题的关键.

12. 如图，要围一个矩形菜园 $ABCD$ ，共中一边 AD 是墙，且 AD 的长不能超过 26m，其余的三边 AB, BC, CD 用篱笆，且这三边的和为 40m. 有下列结论：

- ① AB 的长可以为 6m；
- ② AB 的长有两个不同的值满足菜园 $ABCD$ 面积为 192m^2 ；
- ③ 菜园 $ABCD$ 面积的最大值为 200m^2 .

其中，正确结论的个数是（ ）



A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】设 AB 的长为 x m，矩形 $ABCD$ 的面积为 y m²，则 BC 的长为 $(40-2x)$ m，根据矩形的面积公式列二次函数解析式，再分别根据 AD 的长不能超过 26 m，二次函数的最值，解一元二次方程求解即可。

【详解】设 AB 的长为 x m，矩形 $ABCD$ 的面积为 y m²，则 BC 的长为 $(40-2x)$ m，由题意得

$$y = x(40-2x) = -2x^2 + 40x = -2(x-10)^2 + 200,$$

其中 $0 < 40-2x \leq 26$ ，即 $7 \leq x < 20$ ，

① AB 的长不可以为 6 m，原说法错误；

③ 菜园 $ABCD$ 面积的最大值为 200 m²，原说法正确；

② 当 $y = -2(x-10)^2 + 200 = 192$ 时，解得 $x = 8$ 或 $x = 12$ ，

$\therefore AB$ 的长有两个不同的值满足菜园 $ABCD$ 面积为 192 m²，说法正确；

综上，正确结论的个数是 2 个，

故选：C.

【点睛】本题考查了二次函数的应用，解一元二次方程，准确理解题意，列出二次函数解析式是解题的关键。

第 II 卷

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

13. 不透明袋子中装有 10 个球，其中有 7 个绿球、3 个红球，这些球除颜色外无其他差别。从袋子中随机取出 1 个球，则它是绿球的概率为_____。

【答案】 $\frac{7}{10}$ 或 0.7

【解析】

【分析】直接利用概率公式求解即可。

【详解】解：由题意，从装有 10 个球的不透明袋子中，随机取出 1 个球，则它是绿球的概率为 $\frac{7}{10}$ ，

故答案为： $\frac{7}{10}$.

【点睛】 本题考查求简单事件的概率，理解题意是解答的关键.

14. 计算 $(xy^2)^2$ 的结果为_____.

【答案】 x^2y^4

【解析】

【分析】 直接利用积的乘方运算法则计算即可求得答案.

【详解】 解： $(xy^2)^2 = x^2y^4$

故答案为： x^2y^4 .

【点睛】 本题考查了积的乘方运算，解题的关键是熟练掌握运算法则.

15. 计算 $(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})$ 的结果为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 根据平方差公式，二次根式的性质及运算法则处理.

【详解】 解： $(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{6})^2 = 7 - 6 = 1$

故答案为： 1

【点睛】 本题考查平方差公式、二次根式性质及运算，熟练掌握平方差公式是解题的关键.

16. 若直线 $y = x$ 向上平移 3 个单位长度后经过点 $(2, m)$ ，则 m 的值为_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 根据平移的规律求出平移后的解析式，再将点 $(2, m)$ 代入即可求得 m 的值.

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = x$ 向上平移 3 个单位长度，

$\therefore$ 平移后的直线解析式为： $y = x + 3$.

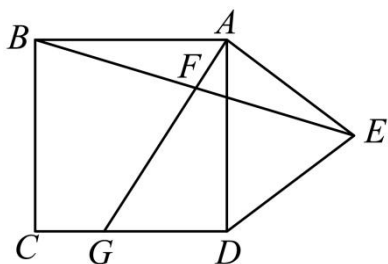
$\because$ 平移后经过 $(2, m)$ ，

$\therefore m = 2 + 3 = 5$.

故答案为： 5.

【点睛】 本题考查的是一次函数的平移，解题的关键在于掌握平移的规律：左加右减，上加下减.

17. 如图，在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 的外侧，作等腰三角形 ADE ， $EA = ED = \frac{5}{2}$ 。



- (1) $\triangle ADE$ 的面积为_____；
 (2) 若 F 为 BE 的中点，连接 AF 并延长，与 CD 相交于点 G ，则 AG 的长为_____。

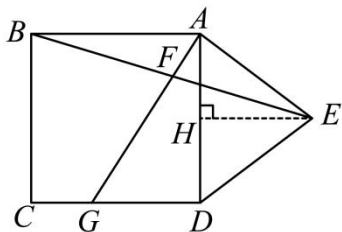
【答案】 ①. 3 ②. $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】(1) 过点 E 作 $EH \perp AD$ ，根据正方形和等腰三角形的性质，得到 AH 的长，再利用勾股定理，求出 EH 的长，即可得到 $\triangle ADE$ 的面积；

(2) 延长 EH 交 AG 于点 K ，利用正方形和平行线的性质，证明 $\triangle ABF \cong \triangle KEF$ (ASA)，得到 EK 的长，进而得到 KH 的长，再证明 $\triangle AHK \sim \triangle ADG$ ，得到 $\frac{KH}{GD} = \frac{AH}{AD}$ ，进而求出 GD 的长，最后利用勾股定理，即可求出 AG 的长。

【详解】解：(1) 过点 E 作 $EH \perp AD$ ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 3，

$$\therefore AD = 3,$$

$\because \triangle ADE$ 是等腰三角形， $EA = ED = \frac{5}{2}$ ， $EH \perp AD$ ，

$$\therefore AH = DH = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AHE \text{ 中, } EH = \sqrt{AE^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot EH = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3,$$

故答案为：3；

(2) 延长 EH 交 AG 于点 K ,

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 3,

$\therefore \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = 3$,

$\therefore AB \perp AD$, $CD \perp AD$,

$\because EK \perp AD$,

$\therefore AB \parallel EK \parallel CD$,

$\therefore \angle ABF = \angle KEF$,

$\because F$ 为 BE 的中点,

$\therefore BF = EF$,

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle KEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABF = \angle KEF \\ BF = EF \\ \angle AFB = \angle KFE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle KEF (ASA)$,

$\therefore EK = AB = 3$,

由 (1) 可知, $AH = \frac{1}{2}AD$, $EH = 2$,

$\therefore KH = 1$,

$\because KH \parallel CD$,

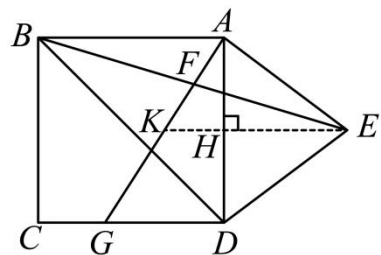
$\therefore \triangle AHK \sim \triangle ADG$,

$$\therefore \frac{KH}{GD} = \frac{AH}{AD},$$

$\therefore GD = 2$,

在 $Rt \triangle ADG$ 中, $AG = \sqrt{AD^2 + GD^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$,

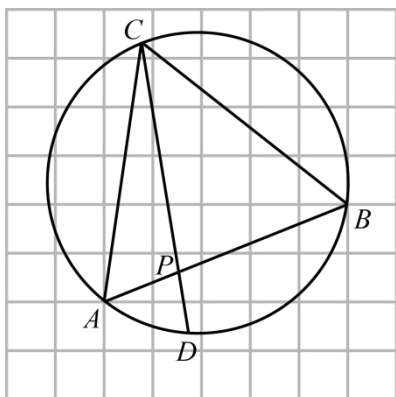
故答案为: $\sqrt{13}$.



【点睛】本题考查了正方形的性质，等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理等知识，作辅助线构造全等三角形和相似三角形是解题关

键.

18. 如图, 在每个小正方形的边长为 1 的网格中, 等边三角形 ABC 内接于圆, 且顶点 A, B 均在格点上.



(1) 线段 AB 的长为 _____;

(2) 若点 D 在圆上, AB 与 CD 相交于点 P . 请用无刻度的直尺, 在如图所示的网格中, 画出点 Q , 使 $\triangle CPQ$ 为等边三角形, 并简要说明点 Q 的位置是如何找到的 (不要求证明) _____.

【答案】(1) $\sqrt{29}$

(2) 画图见解析; 如图, 取 AC, AB 与网格线的交点 E, F , 连接 EF 并延长与网格线相交于点 G ; 连接 DB 与网格线相交于点 H , 连接 HF 并延长与网格线相交于点 I , 连接 AI 并延长与圆相交于点 K , 连接 CK 并延长与 GB 的延长线相交于点 Q , 则点 Q 即为所求

【解析】

【分析】(1) 在网格中用勾股定理求解即可;

(2) 取 AC, AB 与网格线的交点 E, F , 连接 EF 并延长与网格线相交于点 M , 连接 MB ; 连接 DB 与网格线相交于点 G , 连接 GF 并延长与网格线相交于点 H , 连接 AH 并延长与圆相交于点 I , 连接 CI 并延长与 MB 的延长线相交于点 Q , 则点 Q 即为所求, 连接 PQ, AD, BK , 过点 E 作 $ET \perp$ 网格线, 过点 G 作 $GS \perp$ 网格线, 由图可得 $\text{Rt}\triangle AJF \cong \text{Rt}\triangle BLF$ (AAS), 根据全等三角形的性质可得 $\text{Rt}\triangle IMF \cong \text{Rt}\triangle HNF$ (ASA) 和 $\triangle AIF \cong \triangle BHF$ (SAS), 根据同弧所对圆周角相等可得 $\widehat{AD} = \widehat{BK}$, 进而得到 $\angle 1 = \angle 2$ 和 $\angle PCQ = 60^\circ$, 再通过证明 $\triangle CAP \cong \triangle CBQ$ (ASA) 即可得到结论.

【小问 1 详解】

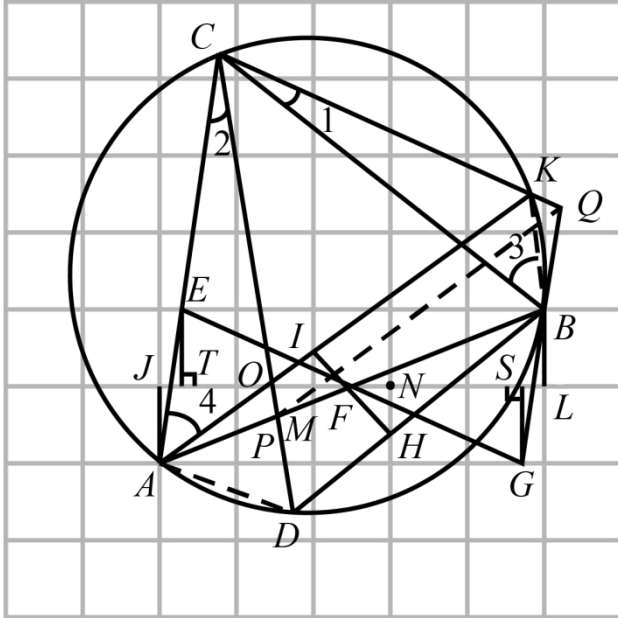
解: $AB = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$;

故答案为: $\sqrt{29}$.

【小问 2 详解】

解：如图，取 AC, AB 与网格线的交点 E, F ，连接 EF 并延长与网格线相交于点 G ；连接 DB 与网格线相交于点 H ，连接 HF 并延长与网格线相交于点 I ，连接 AI 并延长与圆相交于点 K ，连接 CK 并延长与 GB 的延长线相交于点 Q ，则点 Q 即为所求；

连接 PQ ， AD, BK ，过点 E 作 $ET \perp$ 网格线，过点 G 作 $GS \perp$ 网格线，



由图可得： $\because \angle AJF = \angle BLF$ ， $\angle AFJ = \angle BFL$ ， $AJ = BL$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle AJF \cong \text{Rt}\triangle BLF (\text{AAS})$ ，

$\therefore FJ = FL$ ， $AF = BF$ ，

$\because MJ = NL$ ，

$\therefore FJ - MJ = FL - NL$ ，即 $FM = FN$ ，

$\because \angle IMF = \angle HNF$ ， $\angle IFM = \angle HFN$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle IMF \cong \text{Rt}\triangle HNF (\text{ASA})$ ，

$\therefore FI = FH$ ，

$\because \angle AFI = \angle BFH$ ， $AF = BF$ ，

$\therefore \triangle AIF \cong \triangle BHF (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle FAI = \angle FBH$ ，

$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BK}$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ACB = 60^\circ$ ，即 $\angle 1 + \angle PCB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 + \angle PCB = 60^\circ$, 即 $\angle PCQ = 60^\circ$,
 $\because ET = GS$, $\angle ETF = \angle GSF$, $\angle EFT = \angle GFS$,
 $\therefore \text{Rt}\triangle ETF \cong \text{Rt}\triangle GSF (\text{AAS})$,
 $\therefore EF = GF$,
 $\because AF = BF$, $\angle AFE = \angle BFG$,
 $\therefore \triangle AFE \cong \triangle BFG (\text{SAS})$,
 $\therefore \angle EAF = \angle GBF$,
 $\therefore \angle GBF = \angle EAF = \angle CBA = 60^\circ$,
 $\therefore \angle CBQ = 180^\circ - \angle CBA - \angle GBF = 60^\circ$,
 $\therefore \angle CBQ = \angle CAB$,
 $\because CA = CB$,
 $\therefore \triangle CAP \cong \triangle CBQ (\text{ASA})$,
 $\therefore CQ = CP$,
 $\therefore \angle PCQ = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle PCQ$ 是等边三角形, 此时点 Q 即为所求;

故答案为: 如图, 取 AC, AB 与网格线的交点 E, F , 连接 EF 并延长与网格线相交于点 G ; 连接 DB 与网格线相交于点 H , 连接 HF 并延长与网格线相交于点 I , 连接 AI 并延长与圆相交于点 K , 连接 CK 并延长与 GB 的延长线相交于点 Q , 则点 Q 即为所求.

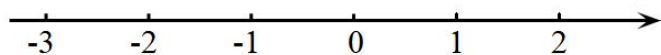
【点睛】本题考查作图—复杂作图, 勾股定理、等边三角形的判定、全等三角形的判定与性质等知识, 解题关键是理解题意, 灵活运用所学知识是关键.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 66 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或推理过程)

19. 解不等式组
$$\begin{cases} 2x+1 \geq x-1 & \text{①} \\ 4x-1 \leq x+2 & \text{②} \end{cases}$$

请结合题意填空, 完成本题的解答.

- (1) 解不等式①, 得_____;
- (2) 解不等式②, 得_____;
- (3) 把不等式①和②的解集在数轴上表示出来:



(4) 原不等式组的解集为_____.

【答案】(1) $x \geq -2$

(2) $x \leq 1$

(3) 见解析 (4) $-2 \leq x \leq 1$

【解析】

【分析】分别解两个不等式，然后根据公共部分确定不等式组的解集，再利用数轴表示解集即可.

【小问 1 详解】

解：解不等式①，得 $x \geq -2$ ，

故答案为： $x \geq -2$ ；

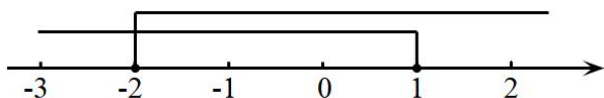
【小问 2 详解】

解：解不等式②，得 $x \leq 1$ ，

故答案为： $x \leq 1$ ；

【小问 3 详解】

解：把不等式①和②的解集在数轴上表示出来：



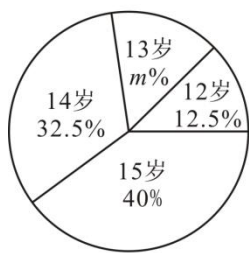
【小问 4 详解】

解：原不等式组的解集为 $-2 \leq x \leq 1$ ，

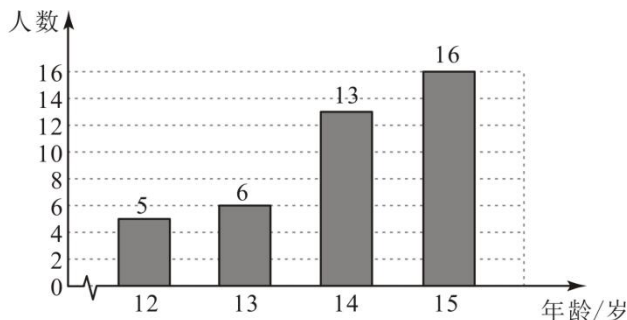
故答案为： $-2 \leq x \leq 1$.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组并把解集在数轴上表示，熟练掌握一元一次不等式的解法是解决本题的关键.

20. 为培养青少年的劳动意识，某校开展了剪纸、编织、烘焙等丰富多彩的活动，该校为了解参加活动的学生的年龄情况，随机调查了 a 名参加活动的学生的年龄（单位：岁）. 根据统计的结果，绘制出如下的统计图①和图②.



图①



图②

请根据相关信息，解答下列问题：

- (1) 填空： a 的值为_____，图①中 m 的值为_____；
- (2) 求统计的这组学生年龄数据的平均数、众数和中位数。

【答案】(1) 40, 15；

(2) 平均数是14，众数是15，中位数是14。

【解析】

【分析】(1) 根据条形图求出各组数据总和可得到 a ，再根据百分比的定义求 m 即可；

(2) 根据平均数，众数，中位数的定义求解即可；

【小问1 详解】

解：由题意， $a = 5 + 6 + 13 + 16 = 40$ ，

13岁学生所占百分比为： $m\% = \frac{6}{40} \times 100\% = 15\%$ ，

故答案为：40, 15；

【小问2 详解】

观察条形统计图，

$$\therefore \bar{x} = \frac{12 \times 5 + 13 \times 6 + 14 \times 13 + 15 \times 16}{5 + 6 + 13 + 16} = 14,$$

$\therefore$ 这组数据的平均数是14。

$\therefore$ 在这组数据中，15出现了16次，出现的次数最多，

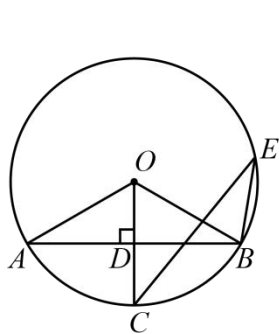
$\therefore$ 这组数据的众数是15。

$\therefore$ 将这组数据按由小到大的顺序排列，处于中间的两个数都是14，有 $\frac{14+14}{2} = 14$ ，

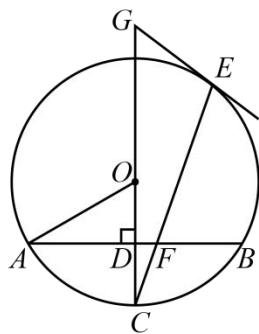
$\therefore$ 这组数据的中位数是14。

【点睛】本题考查的是条形统计图和扇形图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到信息是解决问题的关键。

21. 在 $\odot O$ 中，半径 OC 垂直于弦 AB ，垂足为 D ， $\angle AOC = 60^\circ$ ， E 为弦 AB 所对的优弧上一点。



图①



图②

(1) 如图①, 求 $\angle AOB$ 和 $\angle CEB$ 的大小;

(2) 如图②, CE 与 AB 相交于点 F , $EF = EB$, 过点 E 作 $\odot O$ 的切线, 与 CO 的延长线相交于点 G , 若 $OA = 3$, 求 EG 的长.

【答案】(1) $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle CEB = 30^\circ$

(2) $\sqrt{3}$

【解析】

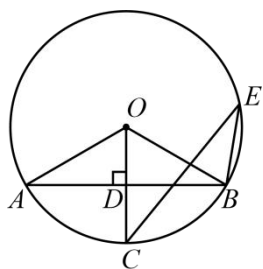
【分析】(1) 根据半径 OC 垂直于弦 AB , 可以得到 $\widehat{AC} = \widehat{BC}$, 从而得到 $\angle AOC = \angle BOC$, 结合已知条件 $\angle AOC = 60^\circ$ 即可得到 $\angle AOB = 2\angle AOC = 120^\circ$, 根据 $\angle CEB = \frac{1}{2}\angle AOC$ 即可求出 $\angle CEB = 30^\circ$;

(2) 根据 $\angle CEB = 30^\circ$, 结合 $EF = EB$, 推算出 $\angle EBF = \angle EFB = 75^\circ$, 进一步推算出 $\angle GOE = \angle AOE - \angle AOG = 30^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle OEG$ 中, $\tan \angle GOE = \frac{EG}{OE}$, $OE = OA = 3$, 再根据

$EG = 3 \times \tan 30^\circ$ 即可得到答案.

【小问 1 详解】

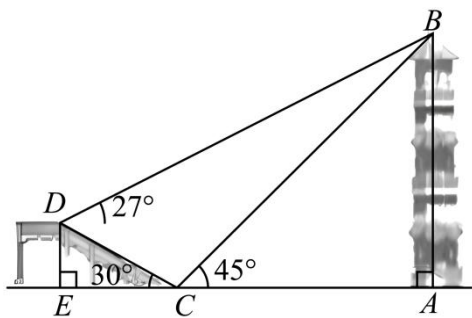
解: 在 $\odot O$ 中, 半径 OC 垂直于弦 AB ,



$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC}$, 得 $\angle AOC = \angle BOC$.

$\therefore \angle AOC = 60^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 2\angle AOC = 120^\circ$.



某学习小组在观景台 C 处测得塔顶部 B 的仰角为 45° ，在观景台 D 处测得塔顶部 B 的仰角为 27° 。

- (1) 求 DE 的长；
 - (2) 设塔 AB 的高度为 h (单位: m).
- ①用含有 h 的式子表示线段 EA 的长 (结果保留根号);
- ②求塔 AB 的高度 ($\tan 27^\circ$ 取 0.5, $\sqrt{3}$ 取 1.7, 结果取整数).

【答案】 (1) 3m

(2) ① $(h + 3\sqrt{3})$ m; ② 11m

【解析】

【分析】 (1) 根据含 30° 度角的直角三角形的性质求解即可;

(2) ①分别在 $\text{Rt} \triangle DCE$ 和 $\text{Rt} \triangle BCA$ 中, 利用锐角三角函数定义求得 $EC = 3\sqrt{3}$, $CA = h$, 进而可求解;

②过点 D 作 $DF \perp AB$, 垂足为 F . 可证明四边形 $DEAF$ 是矩形, 得到 $DF = EA = (h + 3\sqrt{3})$ m, $FA = DE = 3$ m. 在 $\text{Rt} \triangle BDF$ 中, 利用锐角三角函数定义得到 $BF = DF \cdot \tan \angle BDF$, 然后求解即可.

【小问 1 详解】

解: 在 $\text{Rt} \triangle DCE$ 中, $\angle DCE = 30^\circ$, $CD = 6$,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = 3.$$

即 DE 的长为 3m.

【小问 2 详解】

解: ①在 $\text{Rt} \triangle DCE$ 中, $\cos \angle DCE = \frac{EC}{CD}$,

$$\therefore EC = CD \cdot \cos \angle DCE = 6 \times \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}.$$

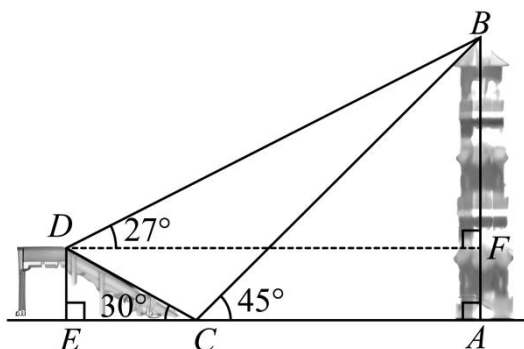
在 $\text{Rt} \triangle BCA$ 中, 由 $\tan \angle BCA = \frac{AB}{CA}$, $AB = h$, $\angle BCA = 45^\circ$,

$$\text{则 } CA = \frac{AB}{\tan 45^\circ} = h.$$

$$\therefore EA = CA + EC = h + 3\sqrt{3}.$$

即 EA 的长为 $(h + 3\sqrt{3})\text{m}$.

②如图，过点 D 作 $DF \perp AB$ ，垂足为 F .



根据题意， $\angle AED = \angle FAE = \angle DFA = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $DEAF$ 是矩形.

$$\therefore DF = EA = (h + 3\sqrt{3})\text{m}, \quad FA = DE = 3\text{m}.$$

可得 $BF = AB - FA = (h - 3)\text{m}$.

在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中， $\tan \angle BDF = \frac{BF}{DF}$ ， $\angle BDF = 27^\circ$,

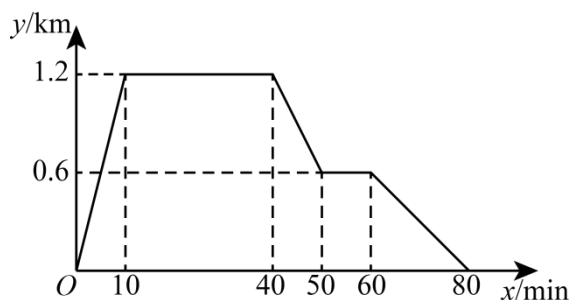
$$\therefore BF = DF \cdot \tan \angle BDF. \quad \text{即 } h - 3 = (h + 3\sqrt{3}) \times \tan 27^\circ.$$

$$\therefore h = \frac{3 + 3\sqrt{3} \times \tan 27^\circ}{1 - \tan 27^\circ} \approx \frac{3 + 3 \times 1.7 \times 0.5}{1 - 0.5} \approx 11(\text{m}).$$

答：塔 AB 的高度约为 11m .

【点睛】 本题考查解直角三角形的应用，涉及含 30° 角的直角三角形的性质、矩形判定与性质、锐角三角函数，理解题意，掌握作辅助线构造直角三角形解决问题是解答的关键.

23. 已知学生宿舍、文具店、体育场依次在同一条直线上，文具店离宿舍 0.6km ，体育场离宿舍 1.2km ，张强从宿舍出发，先用了 10min 匀速跑步去体育场，在体育场锻炼了 30min ，之后匀速步行了 10min 到文具店买笔，在文具店停留 10min 后，用了 20min 匀速散步返回宿舍. 下面图中 x 表示时间， y 表示离宿舍的距离. 图象反映了这个过程中张强离宿舍的距离与时间之间的对应关系.



请根据相关信息，回答下列问题：

(1) ①填表：

张强离开宿舍的时间/min	1	10	20	60
张强离宿舍的距离/km		1.2		

②填空：张强从体育场到文具店的速度为_____ km/min；

③当 $50 \leq x \leq 80$ 时，请直接写出张强离宿舍的距离 y 关于时间 x 的函数解析式；

(2) 当张强离开体育场 15 min 时，同宿舍的李明也从体育场出发匀速步行直接回宿舍，如果李明的速度为 0.06 km/min，那么他在回宿舍的途中遇到张强时离宿舍的距离是多少？（直接写出结果即可）

【答案】(1) ①0.12, 1.2, 0.6; ②0.06; ③ $\begin{cases} y = 0.6 (50 \leq x \leq 60) \\ y = -0.03x + 2.4 (60 < x \leq 80) \end{cases}$;

(2) 0.3 km

【解析】

【分析】(1) ①根据图象作答即可；②根据图象，由张强从体育场到文具店的距离除以时间求解即可；③当 $50 \leq x \leq 60$ 时，直接根据图象写出解析式即可；当 $60 < x \leq 80$ 时，设 y 与 x 的函数解析式为 $y = kx + b$ ，利用待定系数法求函数解析式即可；

(2) 当张强离开体育场 15 min 时，即 $x = 55$ 时，同宿舍的李明也从体育场出发匀速步行直接回宿舍，当李明在回宿舍的途中遇到张强时，他俩离宿舍的距离是相等的，可列方程为

$$-0.03x + 2.4 = 1.2 - 0.06(x - 55), \text{ 求解即可.}$$

【小问 1 详解】

$$\textcircled{1} 1.2 \div 10 \times 1 = 0.12 \text{ km},$$

由图填表：

张强离开宿舍的时间/min	1	10	20	60
张强离宿舍的距离/km	0.12	1.2	1.2	0.6

故答案为：0.12, 1.2, 0.6;

②张强从体育场到文具店的速度为 $0.6 \div (50 - 40) = 0.06 \text{ km/min}$,

故答案为: 0.06;

当 $50 \leq x \leq 60$ 时,

$$y = 0.6;$$

当 $60 < x \leq 80$ 时, 设 y 与 x 的函数解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{把 } (60, 0.6), (80, 0) \text{ 代入, 得 } \begin{cases} 0.6 = 60k + b \\ 0 = 80k + b \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -0.03 \\ b = 2.4 \end{cases},$$

$$\therefore y = -0.03x + 2.4;$$

综上, 张强离宿舍的距离 y 关于时间 x 的函数解析式为 $\begin{cases} y = 0.6 (50 \leq x \leq 60) \\ y = -0.03x + 2.4 (60 < x \leq 80) \end{cases}$;

【小问 2 详解】

当张强离开体育场 15 min 时, 即 $x = 55$ 时, 同宿舍的李明也从体育场出发匀速步行直接回宿舍,

当李明在回宿舍的途中遇到张强时, 他俩离宿舍的距离是相等的,

$$\therefore -0.03x + 2.4 = 1.2 - 0.06(x - 55)$$

解得 $x = 70$,

$$\text{当 } x = 70 \text{ 时, } 1.2 - 0.06 \times (70 - 55) = 0.3 \text{ km},$$

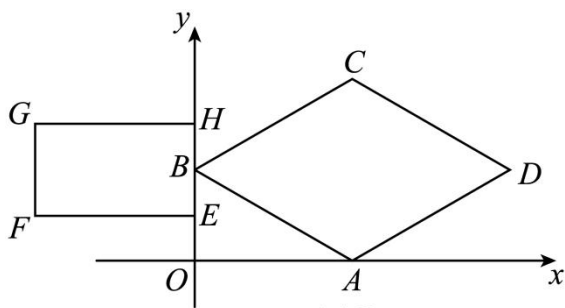
所以, 他在回宿舍的途中遇到张强时离宿舍的距离是 0.3 km.

【点睛】本题考查了从函数图象获取信息, 求函数的解析式, 列一元一次方程解决实际问题, 准确理解题意, 熟练掌握知识点是解题的关键.

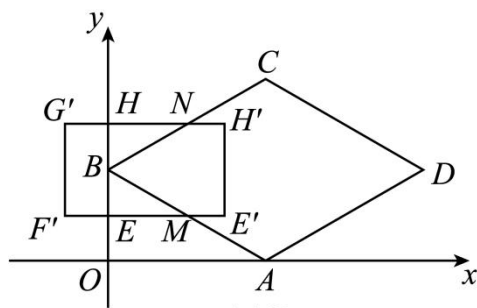
24. 在平面直角坐标系中, O 为原点, 菱形 $ABCD$ 的顶点 $A(\sqrt{3}, 0), B(0, 1), D(2\sqrt{3}, 1)$, 矩形 $EFGH$ 的顶点 $E\left(0, \frac{1}{2}\right), F\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), H\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

(1) 填空: 如图①, 点 C 的坐标为_____, 点 G 的坐标为_____;

(2) 将矩形 $EFGH$ 沿水平方向向右平移, 得到矩形 $E'F'G'H'$, 点 E, F, G, H 的对应点分别为 E', F', G', H' . 设 $EE' = t$, 矩形 $E'F'G'H'$ 与菱形 $ABCD$ 重叠部分的面积为 S .



图①



图②

①如图②，当边 $E'F'$ 与 AB 相交于点 M 、边 $G'H'$ 与 BC 相交于点 N ，且矩形 $E'F'G'H'$ 与菱形 $ABCD$ 重叠部分为五边形时，试用含有 t 的式子表示 S ，并直接写出 t 的取值范围：

②当 $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{11\sqrt{3}}{4}$ 时，求 S 的取值范围（直接写出结果即可）。

【答案】(1) $(\sqrt{3}, 2)$, $(-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$.

(2) ① $\frac{\sqrt{3}}{2} < t \leq \sqrt{3}$; ② $\frac{\sqrt{3}}{16} \leq S \leq \sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据矩形及菱形的性质可进行求解；

(2) ①由题意易得 $EF = E'F' = \sqrt{3}$, $EH = E'H' = 1$ ，然后可得 $\angle ABO = 60^\circ$ ，则有 $EM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，进而根据割补法可进行求解面积 S ；②由①及题意可知当 $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分的面积 S 是增大的，当 $\frac{3\sqrt{3}}{2} < t \leq \frac{11\sqrt{3}}{4}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分的面积 S 是减小的，然后根据题意画出图形计算面积的最大值和最小值即可。

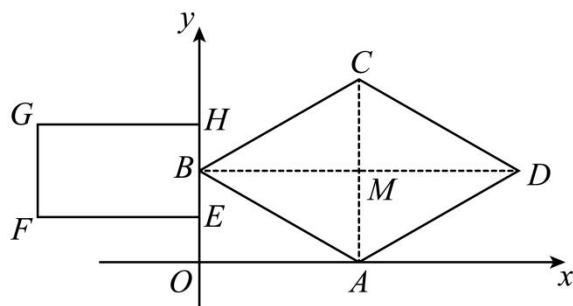
【小问 1 详解】

解：∵ 四边形 $EFGH$ 是矩形，且 $E(0, \frac{1}{2})$, $F(-\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, $H(0, \frac{3}{2})$,

∴ $EF = GH = \sqrt{3}$, $EH = FG = 1$,

∴ $G(-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$;

连接 AC, BD ，交于一点 H ，如图所示：



图①

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, 且 $A(\sqrt{3}, 0), B(0, 1), D(2\sqrt{3}, 1)$,

$\therefore AB = AD = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (0-1)^2} = 2$, $AC \perp BD, CM = AM = OB = 1, BM = MD = OA = \sqrt{3}$,

$\therefore AC = 2$,

$\therefore C(\sqrt{3}, 2)$,

故答案为 $(\sqrt{3}, 2), (-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$;

【小问 2 详解】

解: ① $\because$ 点 $E(0, \frac{1}{2})$, 点 $F(-\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, 点 $H(0, \frac{3}{2})$,

$\therefore$ 矩形 $EFGH$ 中, $EF \parallel x$ 轴, $EH \perp x$ 轴, $EF = \sqrt{3}, EH = 1$.

$\therefore$ 矩形 $E'F'G'H'$ 中, $E'F' \parallel x$ 轴, $E'H' \perp x$ 轴, $E'F' = \sqrt{3}, E'H' = 1$.

由点 $A(\sqrt{3}, 0)$, 点 $B(0, 1)$, 得 $OA = \sqrt{3}, OB = 1$.

在 $Rt\triangle ABO$ 中, $\tan \angle ABO = \frac{OA}{OB} = \sqrt{3}$, 得 $\angle ABO = 60^\circ$.

在 $Rt\triangle BME$ 中, 由 $EM = EB \cdot \tan 60^\circ, EB = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 得 $EM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore S_{\triangle BME} = \frac{1}{2} EB \cdot EM = \frac{\sqrt{3}}{8}$. 同理, 得 $S_{\triangle BNH} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

$\because EE' = t$, 得 $S_{\text{矩形}EE'H'H} = EE' \cdot EH = t$.

又 $S = S_{\text{矩形}EE'H'H} - S_{\triangle BME} - S_{\triangle BNH}$,

$\therefore S = t - \frac{\sqrt{3}}{4}$,

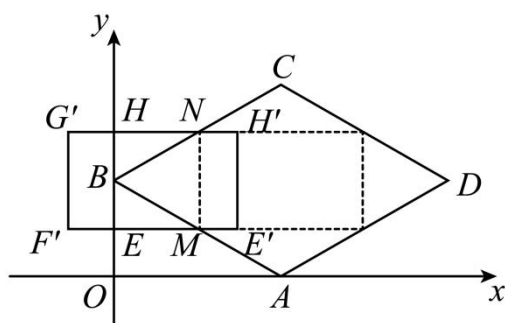
当 $EE' = EM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，则矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分为 $\triangle BE'H'$ ，

$\therefore t$ 的取值范围是 $\frac{\sqrt{3}}{2} < t \leq \sqrt{3}$ 。

②由①及题意可知当 $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分的面积 S 是增大的，当

$\frac{3\sqrt{3}}{2} < t \leq \frac{11\sqrt{3}}{4}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分的面积 S 是减小的，

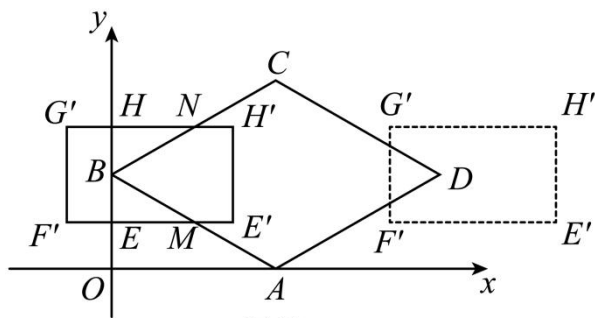
$\therefore$ 当 $t = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分如图所示：



图②

此时面积 S 最大，最大值为 $S = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ；

当 $t = \frac{11\sqrt{3}}{4}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分如图所示：



图②

由 (1) 可知 B 、 D 之间的水平距离为 $2\sqrt{3}$ ，则有点 D 到 $G'F'$ 的距离为 $\sqrt{3} - \left(\frac{11\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

由①可知： $\angle D = \angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分为等边三角形，

$$\therefore \text{该等边三角形的边长为 } 2 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{此时面积 } S \text{ 最小, 最小值为 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16};$$

$$\text{综上所述: 当 } \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{11\sqrt{3}}{4} \text{ 时, 则 } \frac{\sqrt{3}}{16} \leq S \leq \sqrt{3}.$$

【点睛】本题主要考查矩形、菱形的性质及三角函数、图形与坐标，熟练掌握矩形、菱形的性质及三角函数、图形与坐标是解题的关键。

25. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ (b, c 为常数, $c > 1$) 的顶点为 P , 与 x 轴相交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴相交于点 C , 抛物线上的点 M 的横坐标为 m , 且 $-c < m < \frac{b}{2}$, 过点 M 作 $MN \perp AC$, 垂足为 N .

(1) 若 $b = -2, c = 3$.

①求点 P 和点 A 的坐标;

②当 $MN = \sqrt{2}$ 时, 求点 M 的坐标;

(2) 若点 A 的坐标为 $(-c, 0)$, 且 $MP \parallel AC$, 当 $AN + 3MN = 9\sqrt{2}$ 时, 求点 M 的坐标.

【答案】(1) ①点 P 的坐标为 $(-1, 4)$; 点 A 的坐标为 $(-3, 0)$; ②点 M 的坐标为 $(-2, 3)$

$$(2) \left(-\frac{5}{2}, \frac{21}{4}\right)$$

【解析】

【分析】(1) ①待定系数法求解析式, 然后化为顶点式, 即可求得 P 的坐标, 令 $y = 0$, 解方程, 即可求得 A 的坐标;

②过点 M 作 $ME \perp x$ 轴于点 E , 与直线 AC 相交于点 F . 得出 $OA = OC$. 可得 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $\angle OAC = 45^\circ$. $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $EF = AE$. 设点 $M(m, -m^2 - 2m + 3)$, 点 $E(m, 0)$. 根据 $MN = \sqrt{2}$, 解方程即可求解;

(2) 根据题意得出抛物线的解析式为 $y = -x^2 + (1-c)x + c$. 得点 $M(m, -m^2 + (1-c)m + c)$, 其中 $-c < m < \frac{1-c}{2}$. 则顶点 P 的坐标为 $\left(\frac{1-c}{2}, \frac{(1+c)^2}{4}\right)$, 对称轴为直线 $l: x = \frac{1-c}{2}$. 过点 M 作 $MQ \perp l$ 于

点 Q ，则 $\angle MQP = 90^\circ$ ，点 $Q\left(\frac{1-c}{2}, -m^2 + (1-c)m + c\right)$ 。由 $MP \parallel AC$ ，得 $\angle PMQ = 45^\circ$ 。于是 $MQ = QP$ 。得出 $c_1 = -2m - 1, c_2 = -2m + 1$ (舍)，同(I)，过点 M 作 $ME \perp x$ 轴于点 E ，与直线 AC 相交于点 F ，则点 $E(m, 0)$ ，点 $F(m, -m - 1)$ ，点 $M(m, m^2 - 1)$ 。根据已知条件式，建立方程，解方程即可求解。

【小问 1 详解】

解：①由 $b = -2, c = 3$ ，得抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x + 3$ 。

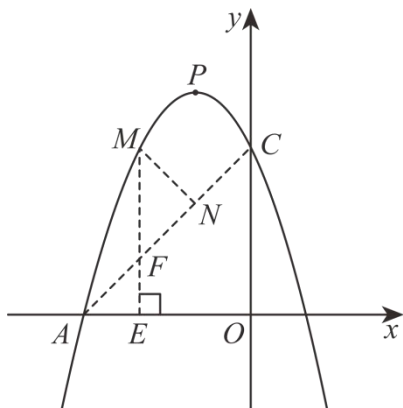
$$\therefore y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-1, 4)$ 。

当 $y = 0$ 时， $-x^2 - 2x + 3 = 0$ 。解得 $x_1 = -3, x_2 = 1$ 。又点 A 在点 B 的左侧，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3, 0)$ 。

②过点 M 作 $ME \perp x$ 轴于点 E ，与直线 AC 相交于点 F 。



$\therefore$ 点 $A(-3, 0)$ ，点 $C(0, 3)$ ，

$\therefore OA = OC$ 。可得 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $\angle OAC = 45^\circ$ 。

$\therefore \text{Rt}\triangle AEF$ 中， $EF = AE$ 。

$\therefore$ 抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 上的点 M 的横坐标为 m ，其中 $-3 < m < -1$ ，

$\therefore$ 设点 $M(m, -m^2 - 2m + 3)$ ，点 $E(m, 0)$ 。

得 $EF = AE = m - (-3) = m + 3$ 。即点 $F(m, m + 3)$ 。

$\therefore FM = (-m^2 - 2m + 3) - (m + 3) = -m^2 - 3m$ 。

$\text{Rt}\triangle FMN$ 中，可得 $\angle MFN = 45^\circ$ 。

$$\therefore FM = \sqrt{2}MN. \text{ 又 } MN = \sqrt{2},$$

得 $FM = 2$. 即 $-m^2 - 3m = 2$. 解得 $m_1 = -2, m_2 = -1$ (舍).

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-2, 3)$.

【小问 2 详解】

$\therefore$ 点 $A(-c, 0)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上, 其中 $c > 1$,

$$\therefore -c^2 - bc + c = 0. \text{ 得 } b = 1 - c.$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + (1 - c)x + c$.

得点 $M(m, -m^2 + (1 - c)m + c)$, 其中 $-c < m < \frac{1 - c}{2}$.

$$\therefore y = -x^2 + (1 - c)x + c = -\left(x - \frac{1 - c}{2}\right)^2 + \frac{(1 + c)^2}{4},$$

$\therefore$ 顶点 P 的坐标为 $\left(\frac{1 - c}{2}, \frac{(1 + c)^2}{4}\right)$, 对称轴为直线 $l: x = \frac{1 - c}{2}$.

过点 M 作 $MQ \perp l$ 于点 Q , 则 $\angle MQP = 90^\circ$, 点 $Q\left(\frac{1 - c}{2}, -m^2 + (1 - c)m + c\right)$.

由 $MP \parallel AC$, 得 $\angle PMQ = 45^\circ$. 于是 $MQ = QP$.

$$\therefore \frac{1 - c}{2} - m = \frac{(1 + c)^2}{4} - [-m^2 + (1 - c)m + c].$$

即 $(c + 2m)^2 = 1$. 解得 $c_1 = -2m - 1, c_2 = -2m + 1$ (舍).

同(1), 过点 M 作 $ME \perp x$ 轴于点 E , 与直线 AC 相交于点 F ,

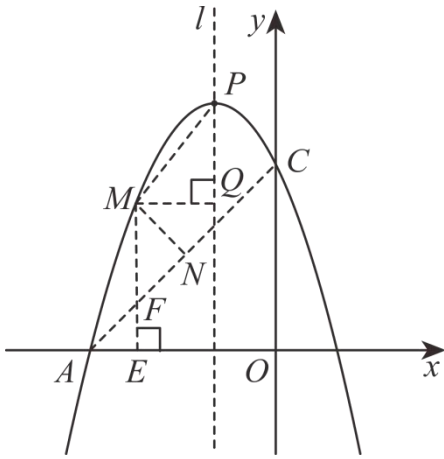
则点 $E(m, 0)$, 点 $F(m, -m - 1)$, 点 $M(m, m^2 - 1)$.

$$\therefore AN + 3MN = AF + FN + 3MN = \sqrt{2}EF + 2\sqrt{2}FM = 9\sqrt{2},$$

$$\therefore \sqrt{2}(-m - 1) + 2\sqrt{2}(m^2 - 1 + m + 1) = 9\sqrt{2}.$$

即 $2m^2 + m - 10 = 0$. 解得 $m_1 = -\frac{5}{2}, m_2 = 2$ (舍).

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(-\frac{5}{2}, \frac{21}{4}\right)$.



【点睛】 本题考查了二次函数的综合运用， 角度问题， 线段问题，

待定系数法求解析式， 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

