

绵阳市 2022 年高中阶段学校招生暨初中学业水平考试

数学

满分: 150 分 考试时间: 120 分钟

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米的黑色墨迹签字笔填写在答题卡上, 并认真核对条形码上的姓名、准考证号、考点、考场号.
2. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂在答题卡对应题目标号的位置上, 非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色墨迹签字笔书写在答题卡的对应框内, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效.
3. 考试结束后, 将试题卷和答题卡一并交回.

第 I 卷 (选择题, 共 36 分)

一、选择题: 本大题共 12 个小题, 每小题 3 分, 共 36 分, 每个小题只有一个选项符合题目要求.

1. $-\sqrt{7}$ 的绝对值是 ()

- A. $-\sqrt{7}$ B. $\sqrt{7}$ C. $-\frac{\sqrt{7}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

【答案】B

【解析】

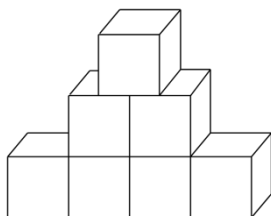
【分析】根据绝对值的性质解答即可.

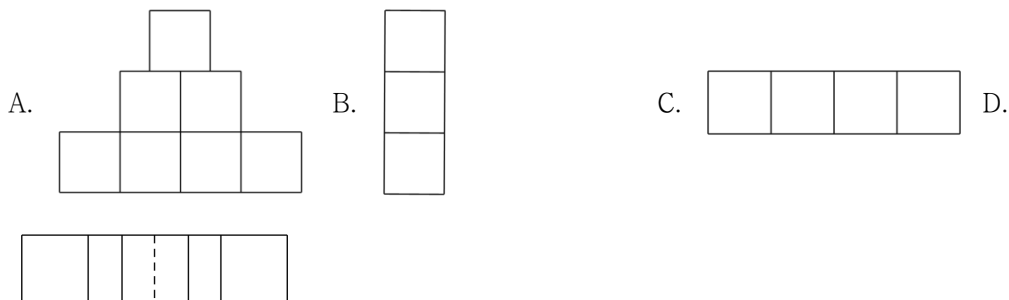
【详解】解: $-\sqrt{7}$ 的绝对值是 $\sqrt{7}$.

故选: B.

【点睛】本题主要考查了绝对值的性质, 掌握绝对值的性质是解答本题的关键.

2. 下图所示几何体是由 7 个完全相同的正方体组合而成, 它的俯视图为 ().



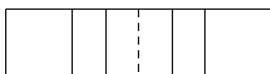


【答案】D

【解析】

【分析】根据俯视图是从上面看到的图形，且看得见的棱是实线，看不见的棱是虚线，即可得出答案.

【详解】解：如图所示几何体的俯视图是：



故选：D.

【点睛】本题考查了简单组合体的三视图，熟知三视图的相关概念，明确从上面看到的图形是俯视图是解题的关键.

3. 中国共产主义青年团是中国青年的先锋队，是中国共产党的忠实助手和可靠后备军、截止至 2021 年 12 月 31 日，全国共有共青团员 7371.5 万名，将 7371.5 万用科学记数法表示为（ ）

- A. 0.73715×10^8 B. 7.3715×10^8
C. 7.3715×10^7 D. 73.715×10^6

【答案】C

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数，当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【详解】7371.5 万 = $7371.5 \times 10^4 = 7.3715 \times 10^7$

故选：C.

【点睛】此题考查了科学记数法，解题的关键是掌握科学记数法的表示方法，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 下列关于等边三角形的描述不正确的是（ ）

- A. 是轴对称图形 B. 对称轴的交点是其重心
C. 是中心对称图形 D. 绕重心顺时针旋转 120° 能与自身重合

【答案】C

【解析】

【分析】根据等边三角形的轴对称性，三线合一的性质逐一判断选项，即可.

【详解】解：A. 等边三角形是轴对称图形，正确，不符合题意，

B. 等边三角形的对称轴的交点是其重心，正确，不符合题意，

C. 等边三角形不是中心对称图形，符合题意，

D. 等边三角形绕重心顺时针旋转 120° 能与自身重合，正确，不符合题意.

故选 C.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，三角形重心，中心对称图形与轴对称图形的定义，正确掌握相关定义是解题关键.

5. 某中学青年志愿者协会的 10 名志愿者，一周的社区志愿服务时间如下表所示：

时间/h	2	3	4	5	6
人数	1	3	2	3	1

关于志愿者服务时间的描述正确的是 ()

A. 众数是 6

B. 平均数是 4

C. 中位数是 3

D. 方差是 1

【答案】B

【解析】

【分析】根据中位数，众数，平均数和方差的定义，逐一判断选项即可.

【详解】解：∵ 志愿者服务时间为 3 小时的人数为 3 个人，志愿者服务时间为 5 小时的人数为 3 个人，

∴ 志愿者服务时间的众数为 3 和 5，故 A 错误；

$$\therefore \frac{2 \times 1 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 3 + 6 \times 1}{10} = 4,$$

∴ 平均数是 4，故 B 正确；

∴ 时间从小到大排序，第 5、6 个数都是 4，

∴ 中位数为 4，故 C 错误；

$$\therefore \frac{1 \times (2-4)^2 + 3 \times (3-4)^2 + 2 \times (4-4)^2 + 3 \times (5-4)^2 + 1 \times (6-4)^2}{10} = 1.4,$$

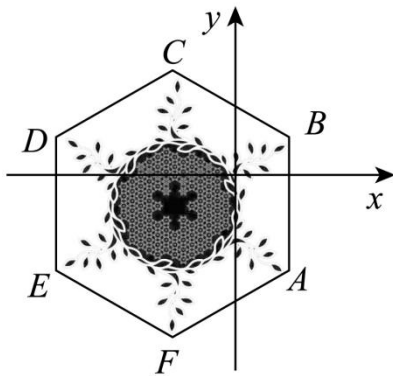
∴ 方差为 1.4，故 D 错误，

故选 B.

【点睛】本题主要考查中位数，众数，平均数和方差的定义，熟练掌握上述定义和计算方法是解题的关键.

6. 在 2022 年北京冬奥会开幕式和闭幕式中，一片“雪花”的故事展现了“世界大同、天下一家”的主题，

让世界观众感受了中国人的浪漫，如图，将“雪花”图案（边长为4的正六边形 $ABCDEF$ ）放在平面直角坐标系中，若 AB 与 x 轴垂直，顶点 A 的坐标为 $(2, -3)$ 。则顶点 C 的坐标为（ ）



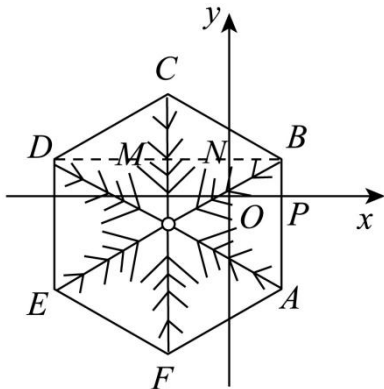
- A. $(2-2\sqrt{3}, 3)$ B. $(0, 1+2\sqrt{3})$ C. $(2-\sqrt{3}, 3)$ D. $(2-2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$

【答案】A

【解析】

【分析】根据正六边形的性质以及坐标与图形的性质进行计算即可。

【详解】解：如图，连接 BD 交 CF 于点 M ，交 y 轴于点 N ，设 AB 交 x 轴于点 P ，



根据题意得： $BD \parallel x$ 轴， $AB \parallel y$ 轴， $BD \perp AB$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ， $AB = BC = CD = 4$ ，

$\therefore BN = OP$ ， $\angle CBD = \angle CDB = 30^\circ$ ， $BD \perp y$ 轴，

$$\therefore BM = \frac{1}{2} BC = 2,$$

$$\therefore BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, -3)$ ，

$$\therefore AP = 3, \quad OP = BN = 2,$$

$$\therefore MN = 2\sqrt{3} - 2, BP = 1,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的纵坐标为 } 1 + 2 = 3,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (2 - 2\sqrt{3}, 3).$$

故选: A

【点睛】 本题考查正多边形, 勾股定理, 直角三角形的性质, 掌握正六边形的性质以及勾股定理是正确计算的前提, 理解坐标与图形的性质是解决问题的关键.

$$7. \text{ 正整数 } a, b \text{ 分别满足 } \sqrt[3]{53} < a < \sqrt[3]{98}, \sqrt{2} < b < \sqrt{7}, \text{ 则 } b^a = (\quad)$$

A. 4

B. 8

C. 9

D. 16

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据 a, b 的取值范围, 先确定 a, b , 再计算 b^a .

$$\text{【详解】 解: } \because \sqrt[3]{53} < \sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{98}, \sqrt{2} < \sqrt{4} < \sqrt{7},$$

$$\therefore a = 4, b = 2,$$

$$\therefore b^a = 2^4 = 16.$$

故选: D.

【点睛】 本题主要考查无理数的估值, 掌握立方根, 平方根的意义, 并能根据 a, b 的取值范围确定的值是解题的关键.

8. 某校开展岗位体验劳动教育活动, 设置了“安全小卫士”“环卫小卫士”“图书管理小卫士”“宿舍管理小卫士”共四个岗位, 每个岗位体验人数不限且每位同学只能从中随机选择一个岗位进行体验, 甲、乙两名同学都参加了此项活动, 则这两名同学恰好在同一岗位体验的概率为 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{16}$

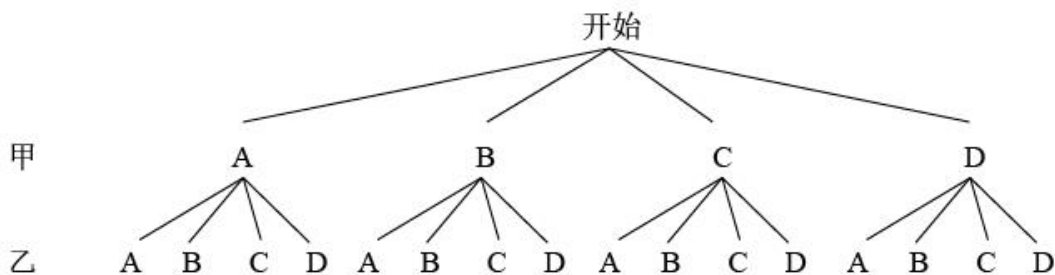
【答案】 A

【解析】

【分析】 设“安全小卫士”“环卫小卫士”“图书管理小卫士”“宿舍管理小卫士”四个岗位为 A, B, C, D , 画出树状图, 即可求解.

【详解】 解: 设“安全小卫士”“环卫小卫士”“图书管理小卫士”“宿舍管理小卫士”四个岗位为 A, B, C, D ,

画树状图如下:



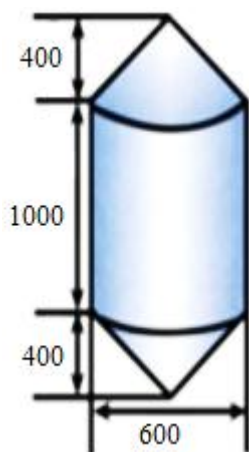
∴一共有 16 种等可能的结果，两名同学恰好在同一岗位体验有 4 种，

∴这两名同学恰好在同一岗位体验的概率 $= 4 \div 16 = \frac{1}{4}$ ，

故选 A.

【点睛】 本题主要考查随机事件的概率，画出树状图是解题的关键.

9. 如图，锚标浮筒是打捞作业中用来标记锚或沉船位置的，它的上下两部分是圆锥，中间是圆柱（单位：mm）. 电镀时，如果每平方米用锌 0.1 千克，电镀 1000 个这样的锚标浮筒，需要多少千克锌？（ π 的值取 3.14）（ ）



A. 282.6

B. 282600000

C. 357.96

D. 357960000

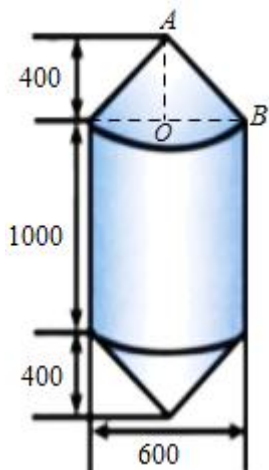
【答案】 A

【解析】

【分析】 求出圆锥的表面积 $S_1 = \pi \cdot r \cdot AB = \pi \cdot 0.3 \times 0.5 = 0.15\pi \text{ m}^2$ ，圆柱的表面积

$S_2 = 2\pi \cdot r \cdot 1 = 2\pi \times 0.3 \times 1 = 0.6\pi \text{ m}^2$ ，进一步求出组合体的表面积为： $S = 2S_1 + S_2 = 0.9\pi \text{ m}^2$ ，即可求出答案.

【详解】 解： 如图：



由勾股定理可知：圆锥的母线长 $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = 500\text{mm} = 0.5\text{m}$ ，

设底圆半径为 r ，则由图可知 $r = 300\text{mm} = 0.3\text{m}$ ，

圆锥的表面积： $S_1 = \pi \cdot r \cdot AB = \pi \times 0.3 \times 0.5 = 0.15\pi\text{m}^2$ ，

圆柱的表面积： $S_2 = 2\pi \cdot r \cdot 1 = 2\pi \times 0.3 \times 1 = 0.6\pi\text{m}^2$ ，

$\therefore$ 组合体的表面积为： $S = 2S_1 + S_2 = 0.9\pi\text{m}^2$ ，

$\therefore$ 每平方米用锌 0.1 千克，

$\therefore$ 电镀 1000 个这样的锚标浮筒，需要锌 $0.9\pi \times 0.1 \times 1000 = 90\pi = 282.6\text{kg}$ 。

故选：A

【点睛】 本题考查组合体的表面积，解题的关键是求出圆锥的表面积和圆柱的表面积，掌握勾股定理，表面积公式。

10. 如图 1，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle C = 120^\circ$ ， M 是 AB 的中点， N 是对角线 BD 上一动点，设 DN 长为 x ，线段 MN 与 AN 长度的和为 y ，图 2 是 y 关于 x 的函数图象，图象右端点 F 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 3)$ ，则图象最低点 E 的坐标为 ()

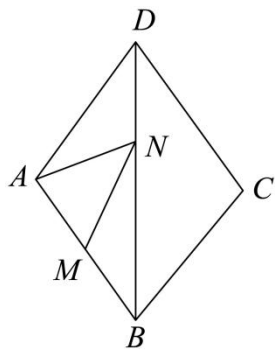


图1

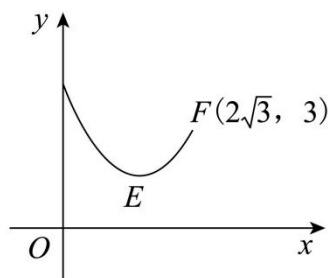


图2

A. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$ B. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$ C. $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$ D. $(\sqrt{3}, 2)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据点 F 的坐标，可得 $MB=1$ ， $AB=2$ ，连接 AC ， CM ，交 BD 于点 N_1 ，连接 AN_1 ，此时 $MN+AN$ 的最小值 $=MN_1+AN_1=CM$ ，根据菱形和直角三角形的性质可得 $CM=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ ， $DN_1=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ ，进而即可得到答案.

【详解】解：∵ 图象右端点 F 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 3)$ ， M 是 AB 的中点，

$$\therefore BD=2\sqrt{3}, MN+AN=AB+MB=3MB=3,$$

$$\therefore MB=1, AB=2,$$

连接 AC ， CM ，交 BD 于点 N_1 ，连接 AN_1 ，此时 $MN+AN$ 的最小值 $=MN_1+AN_1=CM$ ，

∵ 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle C=120^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC=60^\circ,$$

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore CM \perp AB, \angle BCM=30^\circ,$$

$$\therefore BC=2 \times 1=2, CM=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore CM \perp CD,$$

$$\therefore \angle ADC=\angle ABC=60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC=30^\circ,$$

$$\therefore DN_1=CD \div \cos 30^\circ = 2 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore E \text{ 的坐标为 } \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right),$$

故选 C.

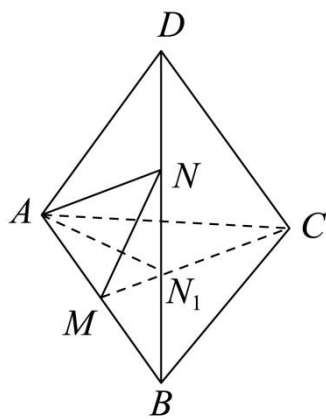
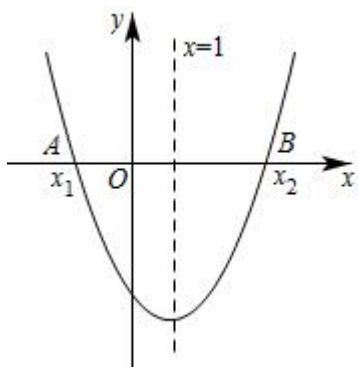


图1

【点睛】本题主要考查菱形的性质，含 30° 角的直角三角形的性质，勾股定理，函数的图像，添加辅助线，构造直角三角形是解题的关键。

11. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称，与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$ ， $B(x_2, 0)$ 两点，若 $-2 < x_1 < -1$ ，则下列四个结论：① $3 < x_2 < 4$ ，② $3a + 2b > 0$ ，③ $b^2 > a + c + 4ac$ ，④ $a > c > b$ 。



正确结论的个数为 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数的对称性，即可判断①；由开口方向和对称轴即可判断②；根据抛物线与 x 轴的交点已经 $x = -1$ 时的函数的取值，即可判断③；根据抛物线的开口方向、对称轴，与 y 轴的交点以及 $a - b + c < 0$ ，即可判断④。

【详解】 $\because$ 对称轴为直线 $x = 1$ ， $-2 < x_1 < -1$ ，

$\therefore 3 < x_2 < 4$ ，①正确，

$$\because -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore 3a + 2b = 3a - 4a = -a,$$

$$\because a > 0,$$

$$\therefore 3a+2b < 0, \text{ ②错误;}$$

$\because$ 抛物线与 x 轴有两个交点,

$$\therefore b^2 - 4ac > 0, \text{ 根据题意可知 } x=-1 \text{ 时, } y < 0,$$

$$\therefore a - b + c < 0,$$

$$\therefore a + c < b,$$

$$\because a > 0,$$

$$\therefore b = -2a < 0,$$

$$\therefore a + c < 0,$$

$$\therefore b^2 - 4ac > a + c,$$

$$\therefore b^2 > a + c + 4ac, \text{ ③正确;}$$

$\because$ 抛物线开口向上, 与 y 轴的交点在 x 轴下方,

$$\therefore a > 0, \quad c < 0,$$

$$\therefore a > c,$$

$$\because a - b + c < 0, \quad b = -2a,$$

$$\therefore 3a + c < 0,$$

$$\therefore c < -3a,$$

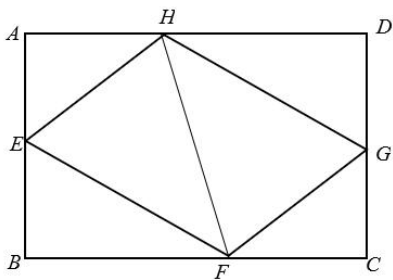
$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore b > c, \text{ 以④错误;}$$

故选 B

【点睛】本题主要考查图象与二次函数系数之间的关系, 解题的关键是掌握数形结合思想的应用, 注意掌握二次函数图象与系数的关系, 掌握二次函数的对称性.

12. 如图, E 、 F 、 G 、 H 分别是矩形的边 AB 、 BC 、 CD 、 AD 上的点, $AH = CF$, $AE = CG$, $\angle EHF = 60^\circ$, $\angle GHF = 45^\circ$. 若 $AH = 2$, $AD = 5 + \sqrt{3}$. 则四边形 $EFGH$ 的周长为 ()



A. $4(2 + \sqrt{6})$

B. $4(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)$

C. $8(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

D. $4(\sqrt{2} + \sqrt{6} + 2)$

【答案】A

【解析】

【分析】证明四边形 $EFGH$ 为平行四边形，作 $EP \perp HF$ 交于点 P ， $HK \perp BC$ 交于点 K ，设 $HP = a$ ，表示出 $EH = 2a$ ， $EP = \sqrt{3}a$ ， $PF = \sqrt{3}a$ ， $EF = HG = \sqrt{6}a$ ，进一步表示出

$HK = AB = \sqrt{4a^2 - 4} + \sqrt{6a^2 - (12 + 6\sqrt{3})}$ ， $HF = (\sqrt{3} + 1)a$ ， $KF = \sqrt{3} + 3 - 2 = \sqrt{3} + 1$ ，利用勾股定理即可求出 a 的值，进一步可求出边长 $EFGH$ 的周长.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore AD = BC, AB = CD,$$

$$\therefore AH = CF, AE = CG,$$

$$\therefore HD = BF, GD = BE,$$

在 $\triangle AEH$ 和 $\triangle CGF$ 中，

$$\begin{cases} AE = CG \\ \angle A = \angle C \\ AH = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle CGF (SAS),$$

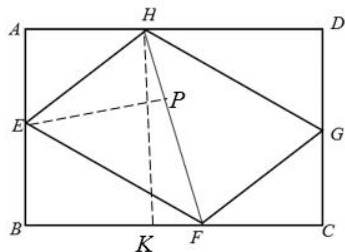
$$\therefore EH = FG,$$

同理： $\triangle BEF \cong \triangle DGH (SAS)$ ，

$$\therefore EF = HG,$$

∴ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形，

作 $EP \perp HF$ 交于点 P ， $HK \perp BC$ 交于点 K ，



设 $HP = a$ ，

$$\therefore \angle EHF = 60^\circ, \angle GHF = 45^\circ, AH = 2, AD = 5 + \sqrt{3},$$

$$\therefore EH = 2a, EP = \sqrt{3}a, PF = \sqrt{3}a, EF = HG = \sqrt{6}a,$$

$$\therefore AE = \sqrt{4a^2 - 4}, BE = DG = \sqrt{6a^2 - (12 + 6\sqrt{3})},$$

$$\therefore AB = AE + BE = \sqrt{4a^2 - 4} + \sqrt{6a^2 - (12 + 6\sqrt{3})},$$

$$\therefore HK \perp BC,$$

$$\therefore ABKH \text{ 为矩形, 即 } HK = AB = \sqrt{4a^2 - 4} + \sqrt{6a^2 - (12 + 6\sqrt{3})},$$

$$\therefore HF = (\sqrt{3} + 1)a, \quad KF = \sqrt{3} + 3 - 2 = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore HK^2 + KF^2 = HF^2,$$

$$\text{即 } \left(\sqrt{4a^2 - 4} + \sqrt{6a^2 - (12 + 6\sqrt{3})} \right)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 a^2,$$

解得: $a = 2$,

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长为: } 2(EH + HG) = 2(4 + 2\sqrt{6}) = 4(2 + \sqrt{6}),$$

故选: A.

【点睛】本题考查矩形的判定及性质, 平行四边形的判定及性质, 勾股定理, 全等三角形的判定及性质, 解题的关键是利用 $HK^2 + KF^2 = HF^2$ 求出 a 的值.

第 II 卷 (非选择题, 共 114 分)

二、填空题: 本大题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 将答案填写在答题卡相应的横线上.

13. 因式分解: $3x^3 - 12xy^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $3x(x + 2y)(x - 2y)$

【解析】

【分析】先提取公因式 $3x$, 然后根据平方差公式因式分解即可求解.

【详解】解: 原式 $= 3x(x^2 - 4y^2) = 3x(x + 2y)(x - 2y).$

故答案为: $3x(x + 2y)(x - 2y).$

【点睛】本题考查了因式分解, 正确的计算是解题的关键.

14. 分式方程 $\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{x-1}$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $x = -3$

【解析】

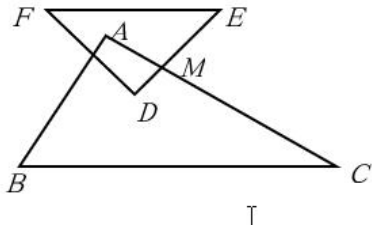
【详解】分式方程化为: $x^2 - x = (x+1)(x-3),$

整理得 $x+3=0,$

求根为 $x=-3,$

经检验 $x = -3$ 是方程的根.

15. 两个三角形如图摆放, 其中 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle EDF = 100^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle F = 40^\circ$, DE 与 AC 交于 M , 若 $BC \parallel EF$, 则 $\angle DMC$ 的大小为_____.

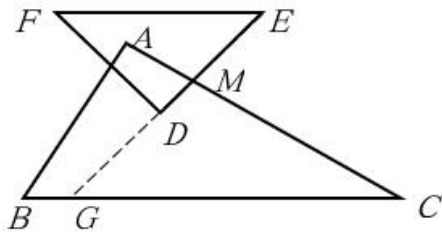


【答案】 110° ##110 度

【解析】

【分析】 延长 ED 交 BC 于点 G , 利用三角形内角和定理求出 $\angle C = 30^\circ$, $\angle E = 40^\circ$, 再利用平行的性质求出 $\angle EGC = \angle E = 40^\circ$, 再利用三角形内角和即可求出 $\angle DMC = 110^\circ$.

【详解】 解: 延长 ED 交 BC 于点 G ,



$$\because \angle BAC = 90^\circ, \angle EDF = 100^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle F = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ, \angle E = 40^\circ,$$

$$\because BC \parallel EF,$$

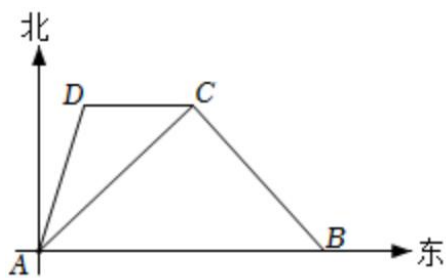
$$\therefore \angle EGC = \angle E = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle DMC = 180^\circ - \angle EGC - \angle C = 110^\circ.$$

故答案为: 110°

【点睛】 本题考查三角形内角和定理以及平行线的性质, 解题的关键是求出 $\angle C = 30^\circ$, $\angle E = 40^\circ$, 证明 $\angle EGC = \angle E = 40^\circ$.

16. 如图, 测量船以 20 海里每小时的速度沿正东方向航行并对某海岛进行测量, 测量船在 A 处测得海岛上观测点 D 位于北偏东 15° 方向上, 观测点 C 位于北偏东 45° 方向上, 航行半个小时到达 B 点, 这时测得海岛上观测点 C 位于北偏西 45° 方向上, 若 CD 与 AB 平行, 则 $CD =$ _____ 海里 (计算结果不取近似值).

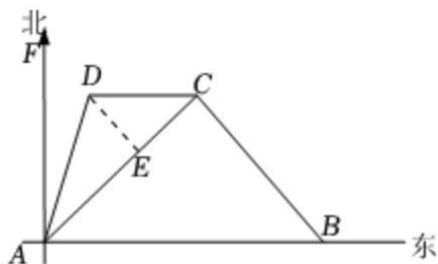


【答案】 $(5\sqrt{3} - 5) \text{ ## } (-5 + 5\sqrt{3})$

【解析】

【分析】过点 D 作 $DE \perp AB$, 垂足为 E , 根据题意求得 $AB = 10$, $\angle FAD = 15^\circ$, $\angle FAC = 45^\circ$, $\angle FAB = 90^\circ$, 进而求得 $\angle ACB = 90^\circ$, 然后在 $Rt\triangle ACB$ 中, 利用锐角三角函数的定义求出 AC 的长, 设 $DE = x$ 海里, 再在 $Rt\triangle ADE$ 中, 利用锐角三角函数的定义求出 AE 的长, 在 $Rt\triangle DEC$ 中, 利用锐角三角函数的定义求出 EC , DC 的长, 最后根据 $AC = 52$ 海里, 列出关于 x 的方程, 进行计算即可解答.

【详解】如图: 过点 D 作 $DE \perp AB$, 垂足为 E ,



依题意得, $AB = 20 \times \frac{1}{2} = 10$, $\angle FAD = 15^\circ$, $\angle FAC = 45^\circ$, $\angle FAB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CBA = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle FAC - \angle FAD = 30^\circ, \quad \angle CAB = \angle FAB - \angle FAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle ACB$ 中,

$$AC = AB \cdot \sin 45^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2},$$

设 $DE = x$ 海里,

$$\text{在 } Rt\triangle DAE \text{ 中, } AE = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}x \text{ 海里,}$$

$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEC \text{ 中, } CE = \frac{DE}{\tan 45^\circ} = x \text{ 海里,}$$

$$DC = \frac{DE}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}x \text{ 海里,}$$

$$\because AE + EC = AC,$$

$$\therefore \sqrt{3}x + x = 5\sqrt{2} \text{ 海里,}$$

$$\therefore x = \frac{5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}}{2} \text{ 海里,}$$

$$\therefore DC = \sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}}{2} = (5\sqrt{3} - 5) \text{ 海里,}$$

故答案为: $(5\sqrt{3} - 5)$.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用, 根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

$$17. \text{ 已知关于 } x \text{ 的不等式组 } \begin{cases} 2x+3 \geq x+m \\ \frac{2x+5}{3} - 3 < 2-x \end{cases} \text{ 无解, 则 } \frac{1}{m} \text{ 的取值范围是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $0 < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 大大小小找不到并结合不等式组的解集可得答案.

$$\text{【详解】 解: } \begin{cases} 2x+3 \geq x+m \text{ ①} \\ \frac{2x+5}{3} - 3 < 2-x \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{解不等式①得: } x \geq m-3,$$

$$\text{解不等式②得: } x < 2,$$

$\therefore$ 不等式组无解,

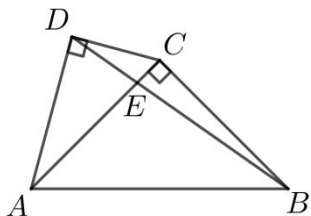
$$\therefore m-3 \geq 2, \text{ 解得: } m \geq 5,$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{5}.$$

故答案为: $0 < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{5}$

【点睛】 本题考查的是解一元一次不等式组, 正确求出每一个不等式解集是基础, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$, $AC \perp BC$, $\angle ABC = 45^\circ$, AC 与 BD 交于点 E , 若 $AB = 2\sqrt{10}$, $CD = 2$, 则 $\triangle ABE$ 的面积为_____.

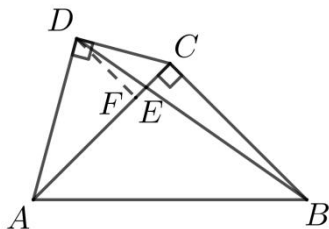


【答案】 $\frac{60}{7}$

【解析】

【分析】 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F , 解 $Rt\triangle ABC$ 求出 AC 、 BC , 再由勾股定理求得 AD , 根据三角形的面积公式求得 DF , 由勾股定理求得 AF , 再证明 $\triangle DEF \sim \triangle BEC$, 求得 EF , 进而求得 AE , 最后由三角形面积公式求得结果.

【详解】 解: 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F ,



$$\because AC \perp BC, \angle ABC = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AC = BC = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 2\sqrt{5},$$

$$\because \angle ADC = 90^\circ, CD = 2,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DF = \frac{1}{2} AD \cdot CD,$$

$$\therefore DF = \frac{4}{5}\sqrt{5},$$

$$\therefore AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \frac{8}{5}\sqrt{5},$$

$$\therefore CF = \frac{2}{5}\sqrt{5},$$

$$\therefore DF \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \frac{EF}{EC} = \frac{DF}{BC}, \text{ 即 } \frac{EF}{\frac{2}{5}\sqrt{5} - EF} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},$$

$$\text{解得: } EF = \frac{4\sqrt{5}}{35},$$

$$\therefore AE = \frac{12}{7}\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AE \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{12}{7}\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = \frac{60}{7}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{60}{7}$$

【点睛】本题主要考查了等腰直角三角形的性质，勾股定理，相似三角形的性质与判定，三角形的面积公式，关键是作辅助线构造相似三角形与直角三角形.

三、解答题：本大题共 7 个小题，共 90 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

$$19. (1) \text{ 计算: } 2 \tan 60^\circ + |\sqrt{3} - 2| + \left(\frac{1}{2022}\right)^{-1} - \frac{\sqrt{12}}{2};$$

$$(2) \text{ 先化简, 再求值: } \left(\frac{x-y}{x} - \frac{x-3y}{x-y}\right) \div \frac{x+y}{x-y}, \text{ 其中 } x=1, y=100$$

【答案】(1) 2024 (2) 化简的结果: $\frac{y}{x}$, 当 $x=1$, $y=100$ 时, 值为 100

【解析】

【分析】(1) 先计算三角函数值、绝对值化简、负指数幂、二次根式化简, 再进行加减计算即可.

(2) 先化简分式, 再代入求值.

$$\text{【详解】(1) 原式} = 2 \times \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2022 - \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2022 - \sqrt{3}$$

$$= 2 + 2022$$

= 2024

(2) 原式 = $\left[\frac{(x-y)(x-y)}{x(x-y)} - \frac{x(x-3y)}{x(x-y)} \right] \div \frac{x+y}{x-y}$

= $\frac{x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 - 3xy)}{x(x-y)} \cdot \frac{x-y}{x+y}$

= $\frac{x^2 - 2xy + y^2 - x^2 + 3xy}{x(x-y)} \cdot \frac{x-y}{x+y}$

= $\frac{xy + y^2}{x(x-y)} \cdot \frac{x-y}{x+y}$

= $\frac{y(x+y)}{x(x-y)} \cdot \frac{x-y}{x+y}$

= $\frac{y}{x}$

将 $x=1$ ， $y=100$ 代入上式，得

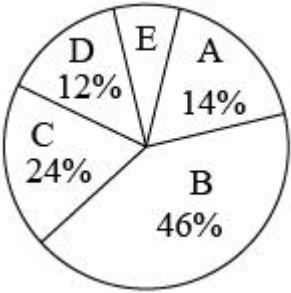
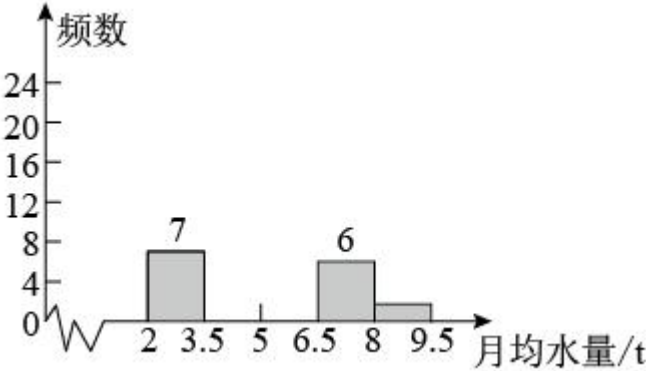
$\frac{y}{x} = \frac{100}{1} = 100$

故原式的值为 100.

【点睛】 本题考查实数的运算、分式的化简求值，解决本题的关键是熟悉各计算法则.

20. 目前，全球淡水资源分布不均、总量不足是人类面临的共同问题，某市在实施居民用水定额管理前，通过简单随机抽样对居民生活用水情况进行了调查，获得了若干个家庭去年的月均用水量数据（单位：t），整理出了频数分布表，频数分布直方图和扇形统计图，部分信息如下：

月均用水量 (t)	$2 \leq x < 3.5$	$3.5 \leq x < 5$	$5 \leq x < 6.5$	$6.5 \leq x < 8$	$8 \leq x < 9.5$
频数	7			6	
对应的扇形区域	A	B	C	D	E



根据以上信息, 解答下列问题:

- (1) 补全频数分布直方图, 并求出扇形图中扇形 E 对应的圆心角的度数;
- (2) 为了鼓励节约用水, 要确定一个用水量的标准, 超出这个标准的部分按 1.5 倍价格收费, 若要使该市 60% 的家庭水费支出不受影响, 你觉得家庭月均用水量应该定为多少? 并说明理由.

【答案】 (1) 频数分布直方图见解析, E 对应的圆心角的度数为: 14.4°

(2) 要使 60% 的家庭收费不受影响, 家庭月均用水量应该定为 5 吨, 理由见解析

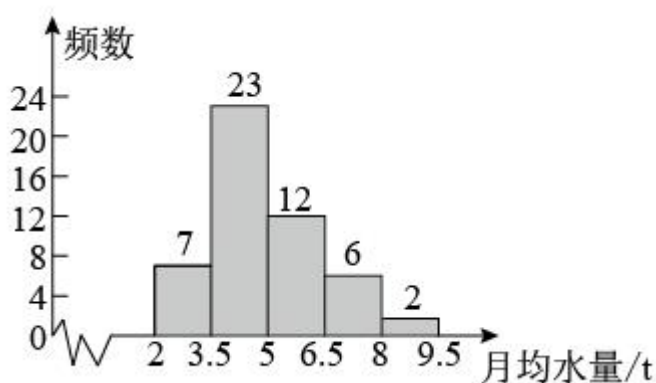
【解析】

【分析】 (1) 根据题 A 的频数和百分比得到抽取的总数, 进而求得 B、C 的频数即可补全频数分布直方图, 求出 E 的频数, 360° 乘以 E 所占的比例即可求解;

(2) 由于 $50 \times 60\% = 30$, 所以为了鼓励节约用水, 要使 60% 的家庭收费不受影响, 即要使 30 户的家庭收费不受影响, 而 $7 + 23 = 30$, 故家庭月均用水量应该定为 5 吨.

【小问 1 详解】

抽取的总数为: $7 \div 14\% = 50$, B 的频数为: $50 \times 46\% = 23$, C 的频数为: $50 \times 24\% = 12$, 频数分布直方图如下:



扇形图中扇形 E 对应的圆心角的度数为:

$$360^\circ \times \frac{2}{50} = 14.4^\circ;$$

【小问 2 详解】

要使 60% 的家庭收费不受影响, 家庭月均用水量应该定为 5 吨, 理由如下:

因为月平均用水量不超过 5 吨的有 $7 + 23 = 30$ (户), $30 \div 50 = 60\%$.

【点睛】 本题考查了读频数分布直方图和频数分布表的能力及利用统计图表获取信息的能力; 利用统计图获取信息时, 必须认真观察、分析、研究统计图, 才能作出正确的判断和解决问题.

21. 某水果经营户从水果批发市场批发水果进行零售, 部分水果批发价格与零售价格如下表:

水果品种	梨子	菠萝	苹果	车厘子
批发价格 (元/kg)	4	5	6	40

零售价格 (元/kg)	5	6	8	50
-------------	---	---	---	----

请解答下列问题:

- (1) 第一天, 该经营户用 1700 元批发了菠萝和苹果共 300kg, 当日全部售出, 求这两种水果获得的总利润?
- (2) 第二天, 该经营户依然用 1700 元批发了菠萝和苹果, 当日销售结束清点盘存时发现进货单丢失, 只记得这两种水果的批发量均为正整数且菠萝的进货量不低于 88kg, 这两种水果已全部售出且总利润高于第一天这两种水果的总利润, 请通过计算说明该经营户第二天批发这两种水果可能的方案有哪些?

【答案】(1) 500 元;

(2) 方案一购进 88kg 菠萝, 210kg 苹果; 方案二购进 94kg 菠萝, 205kg 苹果.

【解析】

【分析】(1) 设第一天, 该经营户批发了菠萝 x kg, 苹果 y kg, 根据该经营户用 1700 元批发了菠萝和苹果共 300kg, 即可得出关于 x, y 的二元一次方程组, 解之即可得出 x, y 的值, 再利用总利润=每千克的销售利润×销售数量 (购进数量), 即可求出结论;

(2) 设购进菠萝 m kg, 则购进苹果 $\frac{1700-5m}{6}$ kg, 根据“菠萝的进货量不低于 88kg, 且这两种水果已全部售出且总利润高于第一天这两种水果的总利润”, 即可得出关于 m 的一元一次不等式组, 解之即可得出 m 的取值范围, 再结合 $m, \frac{1700-5m}{6}$ 均为正整数, 即可得出各进货方案.

【小问 1 详解】

解: 设第一天, 该经营户批发菠萝 x kg, 苹果 y kg, 根据题意得:

$$\begin{cases} x+y=300 \\ 5x+6y=1700 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=100 \\ y=200 \end{cases},$$

$$\therefore (6-5)x+(8-6)y=(6-5)\times 100+(8-6)\times 200=500 \text{ 元},$$

答: 这两种水果获得的总利润为 500 元;

【小问 2 详解】

解: 设购进菠萝 m kg, 则购进苹果 $\frac{1700-5m}{6}$ kg, 根据题意:

$$\begin{cases} m \geq 88 \\ (6-5)m+(8-6)\times \frac{1700-5m}{6} > 500 \end{cases}, \text{ 解得: } 88 \leq m < 100,$$

$$\therefore m, \frac{1700-5m}{6} \text{ 均为正整数},$$

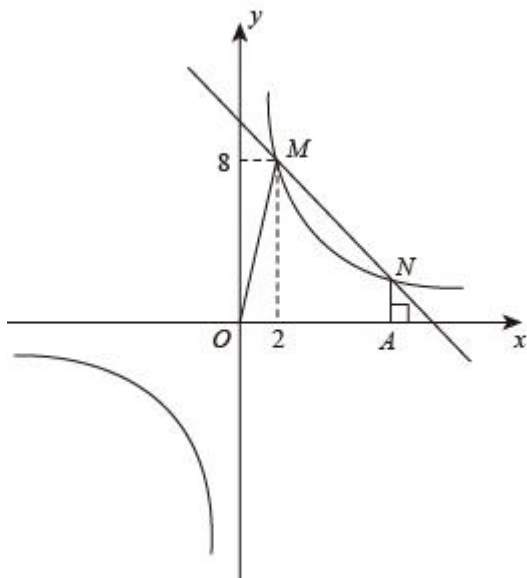
$\therefore m$ 取 88, 94,

$\therefore$ 该经营户第二天共有 2 种批发水果的方案,

方案一购进 88kg 菠萝, 210kg 苹果; 方案二购进 94kg 菠萝, 205kg 苹果.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的应用以及一元一次不等式组的应用, 解题的关键是: (1) 找准等量关系, 正确列出二元一次方程组; (2) 根据各数量之间的关系, 正确列出一元一次不等式组.

22. 如图, 一次函数 $y = k_1x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 在第一象限交于 $M(2, 8)$ 、 N 两点, NA 垂直 x 轴于点 A , O 为坐标原点, 四边形 $OANM$ 的面积为 38.



(1) 求反比例函数及一次函数的解析式;

(2) 点 P 是反比例函数第三象限内的图象上一动点, 请简要描述使 $\triangle PMN$ 的面积最小时点 P 的位置 (不需证明), 并求出点 P 的坐标和 $\triangle PMN$ 面积的最小值.

【答案】(1) $y = \frac{16}{x}$, $y = -x + 10$;

(2) $P(-4, -4)$, $S_{\triangle PMN} = 54$.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法即可求出反比例函数解析式, 再利用四边形 $OANM$ 的面积为 38. 求出 $N(8, 2)$, 进一步利用待定系数法即可求出一函数解析式;

(2) 平移一次函数与 $y = \frac{16}{x}$ 在第三象限有唯一交点 P , 此时 P 到 MN 的距离最短, $\triangle PMN$ 的面积最小, 设平移后的一次函数解析式为: $y = -x + a$, 联立 $y = \frac{16}{x}$, 解得: $a = -8$, 进一步求出: $x = -4$, 即 $P(-4, -4)$, 连接 PM , PN , 过点 P 作 $PB \perp NA$ 的延长线交于点 B , 作 $MC \perp PB$ 交于点 C , 根据

$S_{\triangle PMN} = S_{\triangle PMC} + S_{\text{四边形}MCBN} - S_{\triangle PNB}$ 以及点的坐标即可求出 $\triangle PMN$ 的面积.

【小问 1 详解】

解: $\because M(2,8)$ 在 $y = \frac{k_2}{x}$ 上,

$\therefore k_2 = 16$, 即反比例函数解析式为: $y = \frac{16}{x}$,

设 $N(n, \frac{16}{n})$,

$\therefore$ 四边形 $OANM$ 的面积为 38.

$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times 8 + \frac{1}{2} \left(\frac{16}{n} + 8 \right) \times (n-2) = 38$, 整理得: $2n^2 - 15n - 8 = 0$,

解得: $n = -\frac{1}{2}$ (舍去), $n = 8$,

$\therefore N(8, 2)$,

将 $N(8, 2)$ 和 $M(2, 8)$ 代入 $y = k_1x + b$ 可得: $\begin{cases} 2k_1 + b = 8 \\ 8k_1 + b = 2 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} k_1 = -1 \\ b = 10 \end{cases}$,

$\therefore$ 一次函数解析式为: $y = -x + 10$.

【小问 2 详解】

解: 平移一次函数 $y = -x + 10$ 到第三象限, 与 $y = \frac{16}{x}$ 在第三象限有唯一交点 P , 此时 P 到 MN 的距离最短,

$\triangle PMN$ 的面积最小,

设平移后的一次函数解析式为: $y = -x + a$, 联立 $y = \frac{16}{x}$ 可得: $-x + a = \frac{16}{x}$, 整理得: $x^2 - ax + 16 = 0$,

$\therefore$ 有唯一交点 P ,

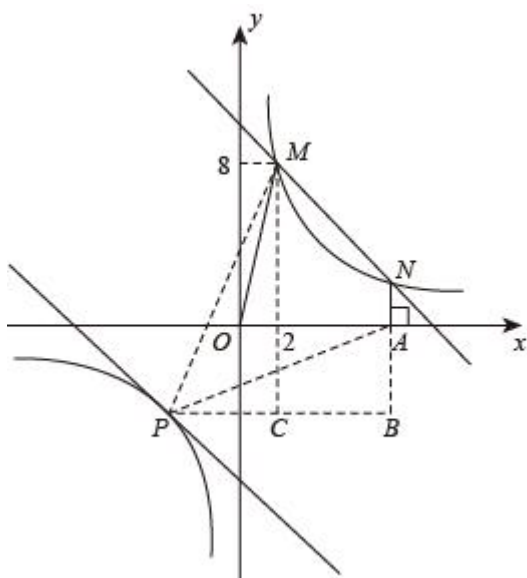
$\therefore \Delta = a^2 - 4 \times 1 \times 16 = 0$, 解得: $a = -8$ 或 $a = 8$ (舍去),

将 $a = -8$ 代入 $x^2 - ax + 16 = 0$ 得: $x^2 - 8x + 16 = 0$, 解得: $x = -4$

经检验: $x = -4$ 是分式方程 $-x + a = \frac{16}{x}$ 的根,

$\therefore P(-4, -4)$,

连接 PM , PN , 过点 P 作 $PB \perp NA$ 的延长线交于点 B , 作 $MC \perp PB$ 交于点 C ,



则: $S_{\triangle PMN} = S_{\triangle PMC} + S_{\text{四边形}MCBN} - S_{\triangle PNB}$,

$$\therefore P(-4, -4), N(8, 2), M(2, 8),$$

$$\therefore S_{\triangle PMC} = \frac{1}{2} \times (4+2) \times (8+4) = 36,$$

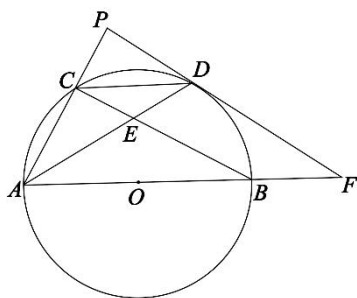
$$S_{\text{四边形}MCBN} = \frac{1}{2} \times (6+12) \times 6 = 54,$$

$$S_{\triangle PNB} = \frac{1}{2} \times (2+4) \times (8+4) = 36,$$

$$\therefore S_{\triangle PMN} = S_{\triangle PMC} + S_{\text{四边形}MCBN} - S_{\triangle PNB} = 36 + 54 - 36 = 54.$$

【点睛】本题考查一次函数和反比例函数的综合，难度较大，解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式，掌握平行线之间的距离，解分式方程，解一元二次方程知识点。

23. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C 为圆上的一点， D 为劣弧 $\widehat{BC}$ 的中点，过点 D 作 $\odot O$ 的切线与 AC 的延长线交于点 P ，与 AB 的延长线交于点 F ， AD 与 BC 交于点 E 。



(1) 求证: $BC \parallel PF$;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{5}$ ， $DE = 1$ ，求 AE 的长度;

(3) 在 (2) 的条件下，求 $\triangle DCP$ 的面积.

$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{BD},$$

$$\therefore CD = BD, \angle DCE = \angle DAC,$$

$$\text{又} \because \angle CDE = \angle ADC,$$

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{CD}{AD},$$

$$\therefore CD^2 = DE \cdot AD = 1 \times (x+1) = x+1,$$

$$BD^2 = CD^2 = x+1,$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

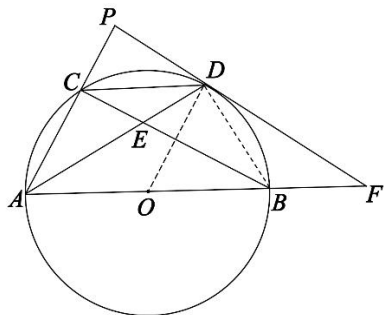
又 $\because \odot O$ 的半径为 $\sqrt{5}$,

$$\therefore AB = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \text{由 } AD^2 + BD^2 = AB^2 \text{ 得 } (x+1)^2 + (x+1) = (2\sqrt{5})^2,$$

解得 $x = 3$ 或 $x = -6$ (舍),

$$\therefore AE = 3;$$



【小问 3 详解】

解: 如图, 设 OD 与 BC 交于点 H ,

由 (2) 知 $AE = 3$,

$$\therefore AD = 3+1 = 4, \quad BD = \sqrt{3+1} = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中,

$$\cos \angle DAB = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$\because OA = OD$,

$$\therefore \angle EDH = \angle DAB,$$

$$\therefore \cos \angle EDH = \cos \angle DAB = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

又 $\because DE = 1$,

$$\therefore DH = DE \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore OH = OD - DH = \sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

 $\therefore OH \perp BC,$

$$\therefore CH = BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

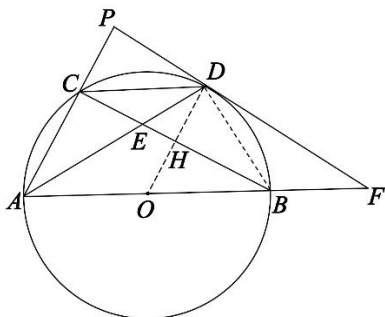
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

由 (1) 可知 $OD \perp PD$, $OH \perp BC$,

$\therefore$ 四边形 $HDPC$ 为矩形,

$$\therefore CP = DH = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad DP = CH = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle DCP} = \frac{1}{2} S_{\text{矩形} HDPC} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}.$$



【点睛】本题考查了圆的有关性质，圆周角定理，垂径定理及其推论，勾股定理，相似三角形的判定与性质，圆的切线的判定与性质，矩形的判定与性质，平行线的判定与性质，熟练掌握这些性质并能灵活运用是解题的关键.

24. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于 $A(-1, 0)$, B 两点, 交 y 轴于点 $C(0, 3)$, 顶点 D 的横坐标为 1.

设抛物线的解析式为: $y=a(x+1)(x-3)$,

把 $C(0, 3)$ 代入抛物线的解析式得:

$-3a=3$, 解得 $a=-1$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$;

【小问 2 详解】

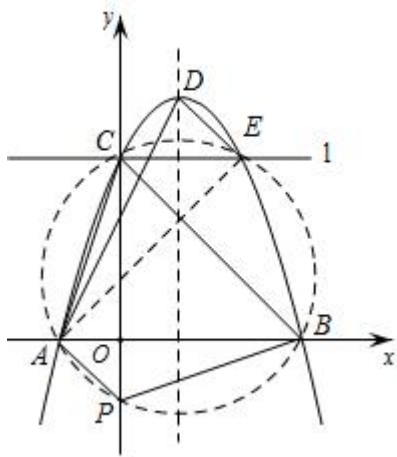
存在, $P(0, -1)$, 理由如下:

$\because \angle APB + \angle ACB = 180^\circ$,

$\therefore \angle CAP + \angle CBP = 180^\circ$,

$\therefore$ 点 A, C, B, P 四点共圆,

如图所示,



$\because$ 点 $A(0, -1), B(3, 0), C(0, 3)$,

$\therefore OB=OC=3$,

$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ$,

$\therefore \angle APC = \angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore \triangle AOP$ 是等腰直角三角形,

$\therefore OP=OA=1$,

$\therefore P(0, -1)$;

【小问 3 详解】

解: 存在, 理由如下:

$\because y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,

$\therefore D(1, 4)$,

由抛物线的对称性得: $E(2, 3)$,

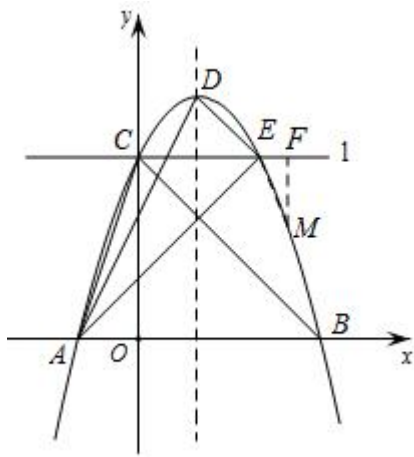
$\therefore A(-1, 0)$,

$$\therefore AD = 2\sqrt{5}, DE = \sqrt{2}, AE = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AD^2 = DE^2 + AE^2,$$

$\therefore \triangle ADE$ 是直角三角形, 且 $\angle AED = 90^\circ$, $DE : AE = 1 : 3$,

$\therefore$ 点 M 在直线 l 下方的抛物线上,



设 $M(t, -t^2 + 2t + 3)$, 则 $t > 2$ 或 $t < 0$,

$\therefore MF \perp l$,

$\therefore$ 点 $F(t, 3)$,

$$\therefore EF = |t - 2|, MF = 3 - (-t^2 + 2t + 3) = t^2 - 2t,$$

$\therefore$ 以 M, F, E 三点为顶点的三角形与 $\triangle ADE$ 相似,

$$\therefore EF : MF = DE : AE = 1 : 3 \text{ 或 } MF : EF = DE : AE = 1 : 3,$$

$$\therefore |t - 2| : (t^2 - 2t) = 1 : 3 \text{ 或 } (t^2 - 2t) : |t - 2| = 1 : 3,$$

解得 $t = 2$ (舍去) 或 $t = 3$ 或 $t = -3$ 或 $t = \frac{1}{3}$ (舍去) 或 $t = -\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(3, 0)$ 或 $(-3, -12)$ 或 $(-\frac{1}{3}, \frac{20}{9})$,

综上所述, 存在点 M , 使以 M, F, E 三点为顶点的三角形与 $\triangle ADE$ 相似, 此时点 M 的坐标为 $(3, 0)$ 或 $(-3,$

$-12)$ 或 $(-\frac{1}{3}, \frac{20}{9})$.

【点睛】 本题属于二次函数综合题, 主要考查待定系数法求函数解析式, 圆内四边形的性质, 相似三角形的性质与判定, 分类讨论思想等, 第 (2) 问得出四点共圆是解题关键; 第 (3) 问得出 $\triangle ADE$ 是直角三角形并得出 $AD : AE$ 的值是解题关键.

25. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $DB = 2\sqrt{3}$, $AB = 4$, $AD = 2$, 动点 E, F 同时从 A 点出发, 点 E 沿着 $A \rightarrow D \rightarrow B$

的路线匀速运动, 点 F 沿着 $A \rightarrow B \rightarrow D$ 的路线匀速运动, 当点 E, F 相遇时停止运动.

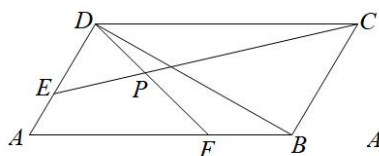


图1

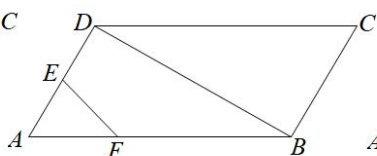


图2

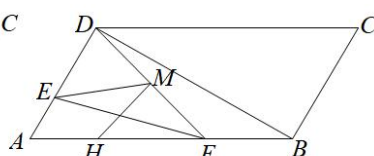


图3

(1) 如图 1, 设点 E 的速度为 1 个单位每秒, 点 F 的速度为 4 个单位每秒, 当运动时间为 $\frac{2}{3}$ 秒时, 设 CE 与 DF 交于点 P , 求线段 EP 与 CP 长度的比值;

(2) 如图 2, 设点 E 的速度为 1 个单位每秒, 点 F 的速度为 $\sqrt{3}$ 个单位每秒, 运动时间为 x 秒, $\triangle AEF$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并指出当 x 为何值时, y 的值最大, 最大值为多少?

(3) 如图 3, H 在线段 AB 上且 $AH = \frac{1}{3}HB$, M 为 DF 的中点, 当点 E, F 分别在线段 AD, AB 上运动时, 探究点 E, F 在什么位置能使 $EM = HM$. 并说明理由.

【答案】(1) $\frac{EP}{PC} = \frac{4}{9}$;

(2) y 关于 x 的函数解析式为 $y = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2 & (0 \leq x \leq 2) \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}x \left(2 \leq x \leq \frac{4\sqrt{3}}{3} \right) \\ 6 + 2\sqrt{3} - x - \sqrt{3}x \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \right) \end{cases}$; 当 $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, y 的最大值为

$2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$;

(3) 当 $EF \parallel BD$ 时, 能使 $EM = HM$. 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 延长 DF 交 CB 的延长线于点 G , 先证得 $\triangle AFD \sim \triangle BFG$, 可得 $\frac{AF}{FB} = \frac{AD}{BG}$, 根据题意可得 $AF = \frac{8}{3}$, $AE = \frac{2}{3}$, 可得到 $CG = 3$, 再证明 $\triangle PDE \sim \triangle PGC$, 即可求解;

(2) 分三种情况讨论: 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, E 点在 AD 上, F 点在 AB 上; 当 $2 \leq x \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, E 点在 BD 上, F 点在 AB 上; 当 $\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}$ 时, 点 E, F 均在 BD 上, 即可求解;

(3) 当 $EF \parallel BD$ 时, 能使 $EM = HM$. 理由: 连接 DH , 根据直角三角形的性质, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图, 延长 DF 交 CB 的延长线于点 G ,

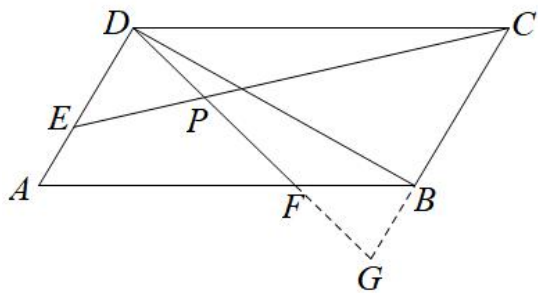


图1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore CG \parallel AD$,

$\therefore \triangle AFD \sim \triangle BFG$,

$$\therefore \frac{AF}{FB} = \frac{AD}{BG},$$

$\because$ 点 E 的速度为 1 个单位每秒, 点 F 的速度为 4 个单位每秒, 运动时间为 $\frac{2}{3}$ 秒,

$$\therefore AF = \frac{8}{3}, \quad AE = \frac{2}{3},$$

$\because AB=4, \quad AD=2,$

$$\therefore BF = \frac{4}{3}, \quad ED = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{BG},$$

$$\therefore BG=1,$$

$$\therefore CG=3,$$

$\therefore CG \parallel AD$,

$\therefore \triangle PDE \sim \triangle PGC$,

$$\therefore \frac{EP}{PC} = \frac{ED}{GC},$$

$$\therefore \frac{EP}{PC} = \frac{4}{9};$$

【小问 2 详解】

解: 根据题意得: 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, E 点在 AD 上, F 点在 AB 上, 此时 $AE=x, \quad AF = \sqrt{3}x$,

$$\because DB = 2\sqrt{3}, \quad AB=4, \quad AD=2,$$

$$\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2,$$

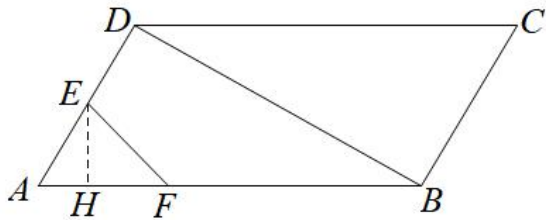
$\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

如图, 过点 E 作 $EH \perp AB$ 交于 H ,



$$\therefore EH = AE \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

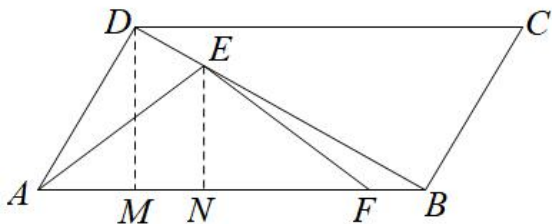
$$\therefore y = \frac{1}{2} \times AF \times EH = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{3}{4}x^2;$$

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大,

此时当 $x=2$ 时, y 有最大值 3;

当 $2 \leq x \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, E 点在 BD 上, F 点在 AB 上,

如图, 过点 E 作 $EN \perp AB$ 交于 N , 过点 D 作 $DM \perp AB$ 交于 M , 则 $EN \parallel DM$,



根据题意得: $DE = x - 2$,

$$\therefore BE = 2\sqrt{3} + 2 - x,$$

在 $Rt\triangle ABD$ 中, $DM = AD \cdot \sin A = \sqrt{3}$, $AM = 1$,

$$\therefore EN \parallel DM,$$

$$\therefore \triangle BEN \sim \triangle BDM,$$

$$\therefore \frac{EN}{DM} = \frac{BE}{BD},$$

$$\therefore \frac{EN}{\sqrt{3}} = \frac{2+2\sqrt{3}-x}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore EN = 1 + \sqrt{3} - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times AF \times EN = \frac{1}{2} \times (\sqrt{3}x) \times (1 + \sqrt{3} - \frac{1}{2}x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3+\sqrt{3}}{2}x,$$

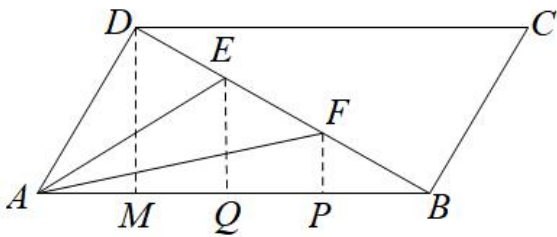
此时该函数图象的对称轴为直线 $x = -\sqrt{3} - 1$,

$\therefore$ 当 $x > -\sqrt{3} - 1$ 时, y 随 x 的增大而减小,

此时当 $x=2$ 时, y 有最大值 3;

当 $\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}$ 时, 点 E 、 F 均在 BD 上,

过点 E 作 $EQ \perp AB$ 交于 Q , 过点 F 作 $FP \perp AB$ 交于 P , 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M ,



$$\therefore AB + BF = \sqrt{3}x, \quad DA + DE = x,$$

$$\therefore AB=4, \quad AD=2,$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{3} - x + 2, \quad DF = 4 + \sqrt{3},$$

$$\therefore PF \parallel DM,$$

$$\therefore \triangle BFP \sim \triangle BDM,$$

$$\therefore \frac{BF}{BD} = \frac{PF}{DM}, \quad \text{即} \quad \frac{\sqrt{3}x - 4}{2\sqrt{3}} = \frac{PF}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore PF = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 2,$$

$$\therefore EQ \parallel DM,$$

$$\therefore \triangle BEQ \sim \triangle BDM,$$

$$\therefore \frac{BE}{BD} = \frac{EQ}{DM}, \quad \text{即} \quad \frac{2\sqrt{3} + 2 - x}{2\sqrt{3}} = \frac{EQ}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore EQ = \sqrt{3} + 1 - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times AB \times (EQ - PF) = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(\sqrt{3} + 1 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \right) = 6 + 2\sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})x,$$

此时 y 随 x 的增大而减小,

$$\text{此时当 } x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } y \text{ 有最大值 } 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3};$$

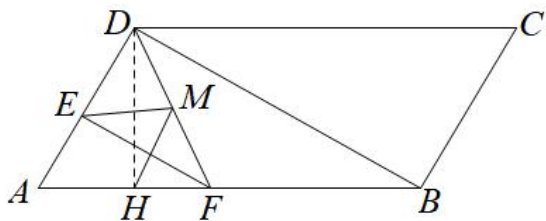
$$\text{综上所述: } y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2 (0 \leq x \leq 2) \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}x \left(2 \leq x \leq \frac{4\sqrt{3}}{3} \right) \\ 6 + 2\sqrt{3} - x - \sqrt{3}x \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \right) \end{cases}$$

$$\text{当 } x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } y \text{ 最大值为 } 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3};$$

【小问3详解】

解: 当 $EF \parallel BD$ 时, 能使 $EM = HM$. 理由如下:

连接 DH , 如图,



$$\because AH = \frac{1}{3}HB, AB=4,$$

$$\therefore AH=1,$$

由 (2) 得: 此时 $AH \perp AB$,

$\because M$ 是 DF 的中点,

$$\therefore HM = DM = MF,$$

$\because EF \parallel BD, BD \perp AD$,

$$\therefore EF \perp AD,$$

$$\therefore EM = DM = FM,$$

$$\therefore EM = HM.$$

【点睛】本题是四边形的综合题, 熟练掌握平行四边形的性质, 平行线的性质, 直角三角形的性质, 分类

讨论，数形结合是解题的关键.

