

## 2023 年四川省成都市数学中考真题

### A 卷 (共 100 分)

#### 第 I 卷 (选择题, 共 32 分)

一、选择题 (本大题共 8 个小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 每小题均有四个选项, 其中只有一项符合题目要求)

1. 在  $3$ ,  $-7$ ,  $0$ ,  $\frac{1}{9}$  四个数中, 最大的数是 ( )

- A. 3                      B.  $-7$                       C. 0                      D.  $\frac{1}{9}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据有理数大小比较的法则：①正数都大于 0；②负数都小于 0；③正数大于一切负数；④两个负数，绝对值大的其值反而小，据此判断即可.

【详解】解：根据有理数比较大小的方法，可得

$$-7 < 0 < \frac{1}{9} < 3,$$

$\therefore$  最大的数是：3；

故选：A.

【点睛】此题主要考查了有理数大小比较的方法，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①正数都大于 0；②负数都小于 0；③正数大于一切负数；④两个负数，绝对值大的其值反而小.

2. 2023 年 5 月 17 日 10 时 49 分，我国在西昌卫星发射中心成功发射第五十六颗北斗导航卫星. 北斗系统作为国家重要基础设施，深刻改变着人们的生产生活方式. 目前，某地图软件调用的北斗卫星日定位量超 3000 亿次. 将数据 3000 亿用科学记数法表示为 ( )

- A.  $3 \times 10^8$                       B.  $3 \times 10^9$                       C.  $3 \times 10^{10}$                       D.  $3 \times 10^{11}$

【答案】D

【解析】

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为  $a \times 10^n$ ，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数.

【详解】解：3000 亿 = 300000000000 =  $3 \times 10^{11}$ .

故选：D.

【点睛】本题考查了科学记数法，科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数. 确定  $n$  的值时，要看把原来的数，变成  $a$  时，小数点移动了多少位， $n$  的绝对值与小数点移动的位数相同. 当

原数绝对值 $\geq 10$ 时， $n$ 是正数；当原数的绝对值 $< 1$ 时， $n$ 是负数，确定 $a$ 与 $n$ 的值是解题的关键.

3. 下列计算正确的是 ( )

A.  $(-3x)^2 = -9x^2$

B.  $7x + 5x = 12x^2$

C.  $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

D.  $(x-2y)(x+2y) = x^2 + 4y^2$

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据积的乘方、合并同类项、乘法公式逐项求解判断即可.

【详解】解：A、 $(-3x)^2 = 9x^2$ ，故原计算错误，不符合题意；

B、 $7x + 5x = 12x$ ，故原计算错误，不符合题意；

C、 $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ ，故原计算正确，符合题意；

D、 $(x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2$ ，故原计算错误，不符合题意，

故选：C.

【点睛】本题考查积的乘方、合并同类项、乘法公式，熟记完全平方公式和平方差公式，正确判断是解答的关键.

4. 近年来，随着环境治理的不断深入，成都已构建起“青山绿道蓝网”生态格局. 如今空气质量越来越好，杜甫那句“窗含西岭千秋雪”已成为市民阳台外一道靓丽的风景. 下面是成都市今年三月份某五天的空气质量指数 (AQI)：33，27，34，40，26，则这组数据的中位数是 ( )

A. 26

B. 27

C. 33

D. 34

【答案】C

【解析】

【分析】将这组数据从小到大重新排列，再根据中位数的定义求解即可.

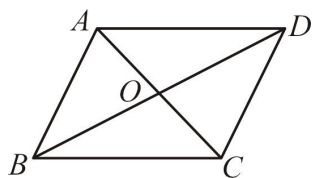
【详解】将这组数据从小到大重新排列为26，27，33，34，40

$\therefore$ 这组数据的中位数为33，

故选：C.

【点睛】本题主要考查中位数，将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

5. 如图，在  $ABCD$  中，对角线  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ ，则下列结论一定正确的是 ( )



- A.  $AC = BD$                       B.  $OA = OC$                       C.  $AC \perp BD$                       D.  $\angle ADC = \angle BCD$

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质逐项分析判断即可求解.

【详解】 $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，对角线  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ ,

- A.  $AC = BD$ ，不一定成立，故该选项不正确，不符合题意；  
B.  $OA = OC$ ，故该选项正确，符合题意；  
C.  $AC \perp BD$ ，不一定成立，故该选项不正确，不符合题意；  
D.  $\angle ADC = \angle BCD$ ，不一定成立，故该选项不正确，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键.

6. 为贯彻教育部《大中小学劳动教育指导纲要（试行）》文件精神，某学校积极开设种植类劳动教育课. 某班决定每位学生随机抽取一张卡片来确定自己的种植项目，老师提供 6 张背面完全相同的卡片，其中蔬菜类有 4 张，正面分别印有白菜、辣椒、豇豆、茄子图案；水果类有 2 张，正面分别印有草莓、西瓜图案，每个图案对应该种植项目. 把这 6 张卡片背面朝上洗匀，小明随机抽取一张，他恰好抽中水果类卡片的概率是（     ）

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据概率公式求解即可.

【详解】解：由题意，随机抽取一张，共有 6 种等可能的结果，其中恰好抽中水果类卡片的有 2 种，

$\therefore$  小明随机抽取一张，他恰好抽中水果类卡片的概率是  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ,

故选：B.

【点睛】本题考查求简单事件的概率，关键是熟知求概率公式：所求情况数与总情况数之比.

7. 《孙子算经》是中国古代重要的数学著作，是《算经十书》之一. 书中记载了这样一个题目：今有木，不知长短. 引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺. 木长几何？其大意是：用一根绳子去量一根长木，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再量长木，长木还剩余 1 尺. 问木长多少尺？设木长  $x$  尺，则可列方

程为 ( )

A.  $\frac{1}{2}(x+4.5)=x-1$

B.  $\frac{1}{2}(x+4.5)=x+1$

C.  $\frac{1}{2}(x+1)=x-4.5$

D.  $\frac{1}{2}(x-1)=x+4.5$

【答案】A

【解析】

【分析】设木长  $x$  尺，根据题意“用一根绳子去量一根长木，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再量长木，长木还剩余 1 尺”，列出一元一次方程即可求解.

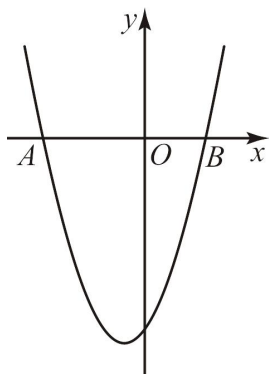
【详解】解：设木长  $x$  尺，根据题意得，

$$\frac{1}{2}(x+4.5)=x-1,$$

故选：A

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用，根据题意列出方程是解题的关键.

8. 如图，二次函数  $y=ax^2+x-6$  的图象与  $x$  轴交于  $A(-3,0)$ ， $B$  两点，下列说法正确的是 ( )



A. 抛物线的对称轴为直线  $x=1$

B. 抛物线的顶点坐标为  $\left(-\frac{1}{2}, -6\right)$

C.  $A$ ， $B$  两点之间的距离为 5

D. 当  $x < -1$  时， $y$  的值随  $x$  值的增大而增大

【答案】C

【解析】

【分析】待定系数法求得二次函数解析式，进而逐项分析判断即可求解.

【详解】解： $\because$  二次函数  $y=ax^2+x-6$  的图象与  $x$  轴交于  $A(-3,0)$ ， $B$  两点，

$$\therefore 0=9a-3-6$$

$$\therefore a=1$$

$$\therefore \text{二次函数解析式为 } y=x^2+x-6=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}, \text{ 对称轴为直线 } x=-\frac{1}{2}, \text{ 顶点坐标为 } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right),$$

故 A, B 选项不正确, 不符合题意;

$\because a=1>0$ , 抛物线开口向上, 当  $x<-1$  时,  $y$  的值随  $x$  值的增大而减小, 故 D 选项不正确, 不符合题意;

当  $y=0$  时,  $x^2+x-6=0$

即  $x_1=-3, x_2=2$

$\therefore B(2,0)$ ,

$\therefore AB=5$ , 故 C 选项正确, 符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查了二次函数的性质, 待定系数法求二次函数解析式, 抛物线与坐标轴的交点, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

## 第 II 卷 (非选择题, 共 68 分)

### 二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

9. 因式分解:  $m^2-3m=$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $m(m-3)$

【解析】

【分析】题中二项式中各项都含有公因式  $m$ , 利用提公因式法因式分解即可得到答案.

【详解】解:  $m^2-3m=m(m-3)$ ,

故答案为:  $m(m-3)$ .

【点睛】本题考查整式运算中的因式分解, 熟练掌握因式分解的方法技巧是解决问题的关键.

10. 若点  $A(-3, y_1), B(-1, y_2)$  都在反比例函数  $y=\frac{6}{x}$  的图象上, 则  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$  (填 “ $>$ ” 或 “ $<$ ”).

【答案】  $>$

【解析】

【分析】根据题意求得  $y_1, y_2$ , 进而即可求解.

【详解】解:  $\because$  点  $A(-3, y_1), B(-1, y_2)$  都在反比例函数  $y=\frac{6}{x}$  的图象上,

$\therefore y_1=\frac{6}{-3}=-2, y_2=\frac{6}{-1}=-6,$

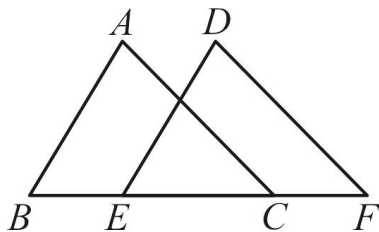
$\therefore -2>-6,$

$\therefore y_1>y_2,$

故答案为：>.

【点睛】本题考查了比较反比例函数值，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键.

11. 如图，已知  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，点  $B, E, C, F$  依次在同一条直线上. 若  $BC = 8$ ， $CE = 5$ ，则  $CF$  的长为\_\_\_\_\_.



【答案】3

【解析】

【分析】利用平移性质求解即可.

【详解】解：由平移性质得： $EF = BC = 8$ ，

$\therefore CF = EF - CE = 8 - 5 = 3$ ，

故答案为：3.

【点睛】本题考查平移性质，熟练掌握平移性质是解答的关键.

12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，点  $P(5, -1)$  关于  $y$  轴对称的点的坐标是\_\_\_\_\_.

【答案】 $(-5, -1)$

【解析】

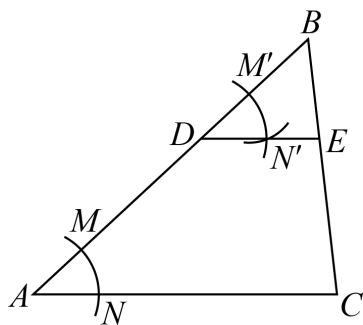
【分析】根据关于  $y$  轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反进行求解即可.

【详解】解：在平面直角坐标系  $xOy$  中，点  $P(5, -1)$  关于  $y$  轴对称的点的坐标是  $(-5, -1)$ ，

故答案为： $(-5, -1)$ .

【点睛】本题主要考查了坐标与图形变化—轴对称，解决本题的关键是掌握关于  $y$  轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数.

13. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $D$  是边  $AB$  上一点，按以下步骤作图：①以点  $A$  为圆心，以适当长为半径作弧，分别交  $AB$ ， $AC$  于点  $M$ ， $N$ ；②以点  $D$  为圆心，以  $AM$  长为半径作弧，交  $DB$  于点  $M'$ ；③以点  $M'$  为圆心，以  $MN$  长为半径作弧，在  $\angle BAC$  内部交前面的弧于点  $N'$ ；④过点  $N'$  作射线  $DN'$  交  $BC$  于点  $E$ . 若  $\triangle BDE$  与四边形  $ACED$  的面积比为  $4:21$ ，则  $\frac{BE}{CE}$  的值为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据作图可得  $\angle BDE = \angle A$ ，然后得出  $DE \parallel AC$ ，可证明  $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ ，进而根据相似三角形的性质即可求解.

【详解】解：根据作图可得  $\angle BDE = \angle A$ ，

$$\therefore DE \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC,$$

$\therefore \triangle BDE$  与四边形  $ACED$  的面积比为  $4:21$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{4}{21+4} = \left(\frac{BE}{BC}\right)^2$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{2}{3},$$

故答案为：  $\frac{2}{3}$  .

【点睛】本题考查了作一个角等于已知角，相似三角形的性质与判定，熟练掌握基本作图与相似三角形的性质与判定是解题的关键.

### 三、解答题（本大题共 5 个小题，共 48 分）

14. (1) 计算：  $\sqrt{4} + 2\sin 45^\circ - (\pi - 3)^0 + |\sqrt{2} - 2|$ .

$$(2) \text{ 解不等式组: } \begin{cases} 2(x+2) - x \leq 5 & \text{①} \\ \frac{4x+1}{3} > x-1 & \text{②} \end{cases}$$

【答案】 (1) 3; (2)  $-4 < x \leq 1$

【解析】

【分析】(1) 先计算算术平方根、特殊角的三角函数值、零指数幂和绝对值，再加减运算即可求解；

(2) 先求得每个不等式的解集，再求得它们的公共部分即可求解；

【详解】解：(1)  $\sqrt{4} + 2\sin 45^\circ - (\pi - 3)^0 + |\sqrt{2} - 2|$

$$= 2 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 2 - \sqrt{2}$$

$$= 3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$= 3;$$

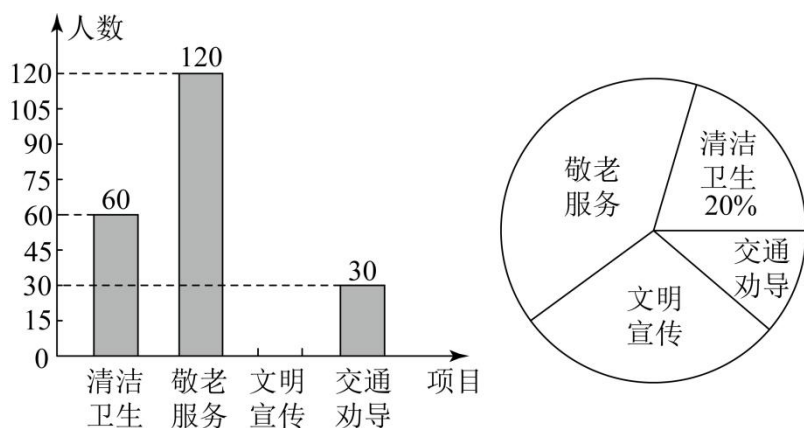
(2) 解不等式①，得  $x \leq 1$ ，

解不等式②，得  $x > -4$ ，

$\therefore$  不等式组的解集为  $-4 < x \leq 1$ 。

【点睛】本题主要考查实数的混合运算和解一元一次不等式组，涉及到特殊角的三角函数值、零指数幂、绝对值、二次根式的加减等知识，熟练掌握相关运算法则并正确求解是解答的关键。

15. 文明是一座城市的名片，更是一座城市的底蕴。成都市某学校于细微处着眼，于贴心处落地，积极组织师生参加“创建全国文明典范城市志愿者服务”活动，其服务项目有“清洁卫生”“敬老服务”“文明宣传”“交通劝导”，每名参加志愿者服务的师生只参加其中一项。为了解各项目参与情况，该校随机调查了参加志愿者服务的部分师生，将调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图。



根据统计图信息，解答下列问题：

- (1) 本次调查的师生共有\_\_\_\_\_人，请补全条形统计图；
- (2) 在扇形统计图中，求“敬老服务”对应的圆心角度数；
- (3) 该校共有 1500 名师生，若有 80% 的师生参加志愿者服务，请你估计参加“文明宣传”项目的师生人数。

【答案】(1) 300，图见解析；

(2)  $144^\circ$ ；

(3) 360 人；

【解析】

【分析】(1) 根据“清洁卫生”的人数除以占比即可得出样本的容量，进而求“文明宣传”的人数，补全统计图；

(2) 根据“敬老服务”的占比乘以 $360^\circ$ 即可求解；

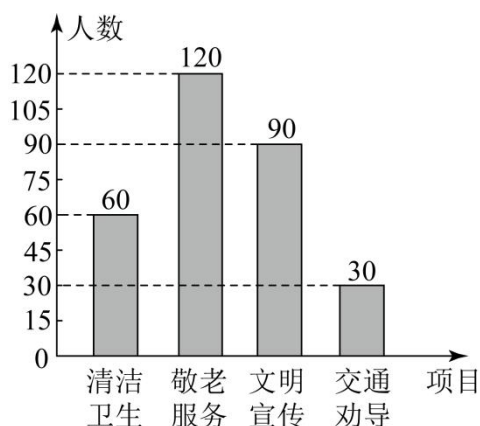
(3) 用样本估计总体，用1500乘以80%再乘以“文明宣传”的比即可求解.

【小问1详解】

解：依题意，本次调查的师生共有  $60 \div 20\% = 300$  人，

$\therefore$  “文明宣传”的人数为  $300 - 60 - 120 - 30 = 90$  (人)

补全统计图，如图所示，



故答案为：300.

【小问2详解】

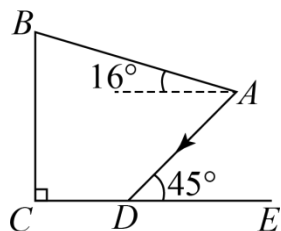
在扇形统计图中，求“敬老服务”对应的圆心角度数为  $\frac{120}{300} \times 360^\circ = 144^\circ$ ，

【小问3详解】

估计参加“文明宣传”项目的师生人数为  $1500 \times 80\% \times \frac{90}{300} = 360$  (人).

【点睛】本题主要考查了条形统计图和扇形统计图的综合运用，样本估计总体，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

16. 为建设美好公园社区，增强民众生活幸福感，某社区服务中心在文化活动室墙外安装遮阳篷，便于社区居民休憩. 如图，在侧面示意图中，遮阳篷  $AB$  长为5米，与水平面的夹角为 $16^\circ$ ，且靠墙端离地高  $BC$  为4米，当太阳光线  $AD$  与地面  $CE$  的夹角为 $45^\circ$ 时，求阴影  $CD$  的长. (结果精确到0.1米；参考数据： $\sin 16^\circ \approx 0.28, \cos 16^\circ \approx 0.96, \tan 16^\circ \approx 0.29$ )

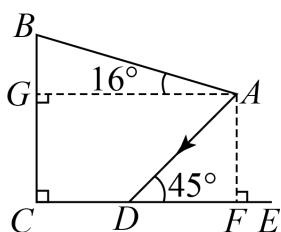


【答案】 2.2 米

【解析】

【分析】 过点  $A$  作  $AG \perp BC$  于点  $G$ ， $AF \perp CE$  于点  $F$ ，则四边形  $AFCG$  是矩形，在  $\text{Rt}\triangle ABG$  中，求得  $BG, AG$ ，进而求得  $CG, AF, DF$ ，根据  $CD = CF - DF$ ，即可求解。

【详解】 解：如图所示，过点  $A$  作  $AG \perp BC$  于点  $G$ ， $AF \perp CE$  于点  $F$ ，则四边形  $AFCG$  是矩形，



依题意， $\angle BAG = 16^\circ$ ， $AB = 5$ （米）

在  $\text{Rt}\triangle ABG$  中， $GB = AB \times \sin \angle BAG = 5 \times \sin 16^\circ \approx 5 \times 0.28 = 1.4$ （米），

$AG = AB \times \cos 16^\circ \approx 5 \times 0.96 = 4.8$ （米），则  $CF = AG = 4.8$ （米）

$\therefore BC = 4$ （米）

$\therefore AF = CG = BC - BG = 4 - 1.4 = 2.6$ （米）

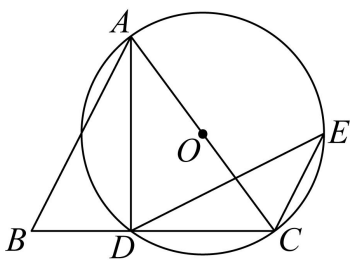
$\therefore \angle ADF = 45^\circ$ ，

$\therefore DF = AF = 2.6$ （米）

$\therefore CD = CF - DF = 4.8 - 2.6 = 2.2$ （米）。

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，添加辅助线构造直角三角形是解题的关键。

17. 如图，以  $\triangle ABC$  的边  $AC$  为直径作  $\odot O$ ，交  $BC$  边于点  $D$ ，过点  $C$  作  $CE \parallel AB$  交  $\odot O$  于点  $E$ ，连接  $AD$ ， $DE$ ， $\angle B = \angle ADE$ 。



(1) 求证：  $AC = BC$ ；

(2) 若  $\tan B = 2$ ， $CD = 3$ ，求  $AB$  和  $DE$  的长。

【答案】(1) 见解析 (2)  $AB = 2\sqrt{5}$ ,  $DE = 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据  $CE \parallel AB$ , 得到  $\angle ACE = \angle BAC$ , 再根据同弦所对的圆周角相等, 得到  $\angle ACE = \angle ADE = \angle B$ , 可证明  $\triangle ABC$  是等腰三角形, 即可解答;

(2) 根据直径所对的圆周角为直角, 得到  $\tan B = 2 = \frac{AD}{BD}$ , 设  $BD = x$ , 根据勾股定理列方程, 解得  $x$  的值, 即可求出  $AB$ ; 过点  $E$  作  $DC$  的垂线段, 交  $DC$  的延长线于点  $F$ , 证明  $\angle B = \angle ECF$ , 求出  $EF, DF$  的长, 根据勾股定理即可解出  $DE$  的长.

【小问 1 详解】

证明:  $\because CE \parallel AB$ ,

$$\therefore \angle BAC = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACE = \angle ADE,$$

$$\therefore \widehat{CB} = \widehat{ADE},$$

$$\therefore \angle B = \angle BAC,$$

$$\therefore AC = BC;$$

【小问 2 详解】

解: 设  $BD = x$ ,

$\because AC$  是  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle ADC = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \tan B = 2,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = 2, \text{ 即 } AD = 2x,$$

根据 (1) 中的结论, 可得  $AC = BC = BD + DC = x + 3$ ,

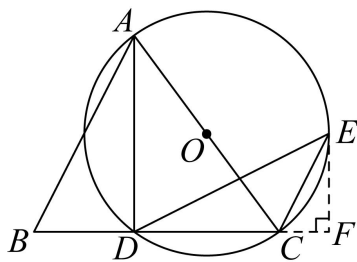
根据勾股定理, 可得  $AD^2 + DC^2 = AC^2$ , 即  $(2x)^2 + 3^2 = (x + 3)^2$ ,

解得  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 0$  (舍去),

$$\therefore BD = 2, AD = 4,$$

根据勾股定理, 可得  $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 2\sqrt{5}$ ;

如图, 过点  $E$  作  $DC$  的垂线段, 交  $DC$  的延长线于点  $F$ ,



$$\because CB = CA,$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 2\angle B,$$

(1) 中已证明  $\angle B = \angle ACE$ ,

$$\therefore \angle ECF = 180^\circ - \angle ACB - \angle ACE = \angle B,$$

$$\because EF \perp CF,$$

$$\therefore \tan \angle ECF = \tan \angle B = 2, \text{ 即 } \frac{EF}{CF} = 2,$$

$$\because \angle B + \angle BAD = 90^\circ, \angle ADE + \angle EDF = 90^\circ, \angle B = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EDF,$$

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ - \angle EDF = 90^\circ - \angle BAD = \angle B,$$

$$\therefore \frac{DF}{EF} = 2,$$

设  $CF = a$ , 则  $DF = DC + CF = a + 3$ ,

$$\therefore EF = 2a,$$

可得方程  $\frac{a+3}{2a} = 2$ , 解得  $a = 1$ ,

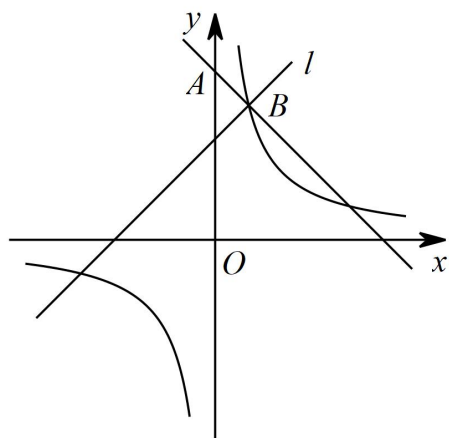
$$\therefore EF = 2, DF = 4,$$

根据勾股定理, 可得  $DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = 2\sqrt{5}$ .

**【点睛】** 本题考查了圆周角定理, 等腰三角形的判定和性质, 平行线的性质, 勾股定理, 正切的概念, 利用等量代换证明相关角相等是解题的关键.

18. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $y = -x + 5$  与  $y$  轴交于点  $A$ , 与反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象的一个

交点为  $B(a, 4)$ , 过点  $B$  作  $AB$  的垂线  $l$ .



- (1) 求点  $A$  的坐标及反比例函数的表达式；
- (2) 若点  $C$  在直线  $l$  上，且  $\triangle ABC$  的面积为 5，求点  $C$  的坐标；
- (3)  $P$  是直线  $l$  上一点，连接  $PA$ ，以  $P$  为位似中心画  $\triangle PDE$ ，使它与  $\triangle PAB$  位似，相似比为  $m$ 。若点  $D$ ， $E$  恰好都落在反比例函数图象上，求点  $P$  的坐标及  $m$  的值。

【答案】(1) 点  $A$  的坐标为  $(0, 5)$ ，反比例函数的表达式为  $y = \frac{4}{x}$ ；

(2) 点  $C$  的坐标为  $(6, 9)$  或  $(-4, -1)$

(3) 点  $P$  的坐标为  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$ ； $m$  的值为 3

【解析】

【分析】(1) 利用直线  $y = -x + 5$  解析式可得的点  $C$  的坐标，将点  $B(a, 4)$  代入  $y = -x + 5$  可得  $a$  的值，再将点  $B$  代入反比例函数解析式可得  $k$  的值，从而得解；

(2) 设直线  $l$  于  $y$  轴交于点  $M$ ，由点  $B$  的坐标和直线  $l$  是  $AB$  的垂线先求出点  $M$  的坐标，再用待定系数法求直线  $l$  的解析式  $y = x + 3$ ， $C$  点坐标为  $(t, t + 3)$ ，根据  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AM \cdot |x_B - x_C| = 5$  ( $x_B, x_C$  分别代表点  $B$  与点  $C$  的横坐标)可得点  $C$  的横坐标，从而得解；

(3) 位似图形的对应点与位似中心三点共线可知点  $B$  的对应点也在直线  $l$  上，不妨设为点  $E$ ，则点  $A$  的对应点是点  $D$ ，直线  $l$  与双曲线的解析式联立方程组得到  $E(-4, -1)$ ，由  $\triangle PAB \sim \triangle PDE$  得到  $AB \parallel DE$ ，继而得到直线  $AB$  与直线  $DE$  的解析式中的一次项系数相等，设直线  $DE$  的解析式是：  $y = -x + b_2$ ，将  $E(-4, -1)$  代入  $y = -x + b_2$  求得  $DE$  的解析式是：  $y = -x - 5$ ，再将直线  $DE$  与双曲线的解析式联立求得  $D(-1, -4)$ ，再用待定系数法求出  $AD$  的解析式是  $y = 9x + 5$ ，利用直线  $AD$  的解析式与直线  $l$  的解析式联

立求得点  $P$  的坐标为  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$ ，再用两点间的距离公式得到  $BP = \frac{5}{4}\sqrt{2}$ ， $EP = \frac{15}{4}\sqrt{2}$  从而求得

$$m = \frac{EP}{BP} = 3.$$

【小问 1 详解】

解：令  $x = 0$ ，则  $y = -x + 5 = 5$

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(0, 5)$ ，

将点  $B(a, 4)$  代入  $y = -x + 5$  得：  $4 = -a + 5$

解得：  $a = 1$

$\therefore B(1, 4)$

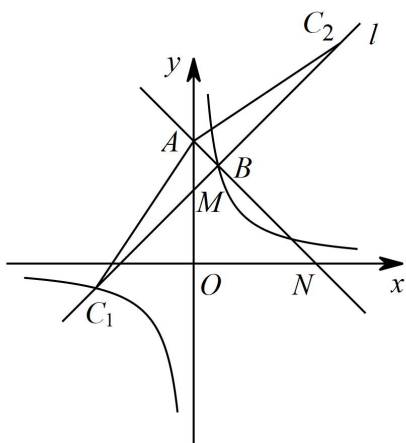
将点  $B(1, 4)$  代入  $y = \frac{k}{x}$  得：  $4 = \frac{k}{1}$

解得：  $k = 4$

$\therefore$  反比例函数的表达式为  $y = \frac{4}{x}$ ；

【小问 2 详解】

解：设直线  $l$  于  $y$  轴交于点  $M$ ，直线  $y = -x + 5$  与  $x$  轴得交点为  $N$ ，



令  $y = -x + 5 = 0$  解得：  $x = 5$

$\therefore N(5, 0)$ ，

$\therefore OA = ON = 5$ ，

又  $\because \angle AON = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle OAN = 45^\circ$$

$$\therefore A(0,5), B(1,4)$$

$$\therefore AB = \sqrt{(1-0)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{2}$$

又 $\because$ 直线  $l$  是  $AB$  的垂线即  $\angle ABM = 90^\circ$ ,  $\angle OAN = 45^\circ$ ,

$$\therefore AB = BM = \sqrt{2}, AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = 2$$

$$\therefore M(0,3)$$

设直线  $l$  得解析式是:  $y = k_1x + b_1$ ,

$$\text{将点 } M(0,3), \text{ 点 } B(1,4) \text{ 代入 } y = k_1x + b_1 \text{ 得: } \begin{cases} k_1 + b_1 = 4 \\ b_1 = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = 4 \\ b_1 = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的解析式是: } y = x + 3,$$

设点  $C$  的坐标是  $(t, t+3)$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot |x_B - x_C| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |1 - t| = 5, \quad (x_B, x_C \text{ 分别代表点 } B \text{ 与点 } C \text{ 的横坐标})$$

解得:  $t = -4$  或  $6$ ,

当  $t = -4$  时,  $t + 3 = -1$ ;

当  $t = 6$  时,  $t + 3 = 9$ ,

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(6,9)$  或  $(-4,-1)$

### 【小问 3 详解】

$\because$  位似图形的对应点与位似中心三点共线,

$\therefore$  点  $B$  的对应点也在直线  $l$  上, 不妨设为点  $E$ , 则点  $A$  的对应点是点  $D$ ,

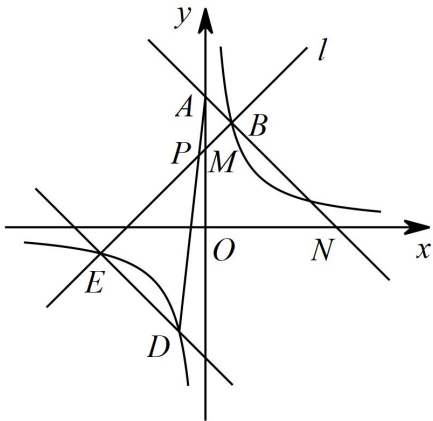
$\therefore$  点  $E$  是直线  $l$  与双曲线  $y = \frac{4}{x}$  的另一个交点,

$$\text{将直线 } l \text{ 与双曲线的解析式联立得: } \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\therefore E(-4, -1)$$

画出图形如下：



$$\text{又} \because \triangle PAB \sim \triangle PDE$$

$$\therefore \angle PAB = \angle PDE$$

$$\therefore AB \parallel DE$$

$\therefore$  直线  $AB$  与直线  $DE$  的解析式中的一次项系数相等，

设直线  $DE$  的解析式是：  $y = -x + b_2$

将点  $E(-4, -1)$  代入  $y = -x + b_2$  得：  $-1 = -(-4) + b_2$

$$\text{解得： } b_2 = -5$$

$$\therefore \text{直线 } DE \text{ 的解析式是： } y = -x - 5$$

$\therefore$  点  $D$  也在双曲线  $y = \frac{4}{x}$  上，

$\therefore$  点  $D$  是直线  $DE$  与双曲线  $y = \frac{4}{x}$  的另一个交点，

$$\text{将直线 } DE \text{ 与双曲线的解析式联立得： } \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = -x - 5 \end{cases}$$

$$\text{解得： } \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\therefore D(-1, -4)$$

设直线  $AD$  的解析式是：  $y = k_3x + b_3$

将点  $A(0, 5)$ ,  $D(-1, -4)$  代入  $y = k_3x + b_3$  得: 
$$\begin{cases} -k_3 + b_3 = -4 \\ b_3 = 5 \end{cases}$$

解得: 
$$\begin{cases} k_1 = 9 \\ b_1 = 5 \end{cases}$$

$\therefore$  直线  $AD$  的解析式是:  $y = 9x + 5$ ,

又将直线  $AD$  的解析式与直线  $l$  的解析式联立得: 
$$\begin{cases} y = 9x + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

解得: 
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{11}{4} \end{cases}$$

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$

$$\therefore BP = \sqrt{\left(-\frac{1}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{11}{4} - 4\right)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$$

$$EP = \sqrt{\left[-\frac{1}{4} - (-4)\right]^2 + \left[\frac{11}{4} - (-1)\right]^2} = \frac{15}{4}\sqrt{2}$$

$$\therefore m = \frac{EP}{BP} = 3$$

【点睛】 本题考查直线与坐标轴的交点，求反比例函数解析式，反比例函数的图象与性质，反比例函数综合-几何问题，三角形的面积公式，位似的性质等知识，综合性大，利用联立方程组求交点和掌握位似的性质是解题的关键.

## B 卷 (共 50 分)

### 一、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

19. 若  $3ab - 3b^2 - 2 = 0$ , 则代数式  $\left(1 - \frac{2ab - b^2}{a^2}\right) \div \frac{a-b}{a^2b}$ , 的值为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 根据分式的化简法则，将代数式化简可得  $ab - b^2$ ，再将  $3ab - 3b^2 - 2 = 0$  变形，即可得到答案.

【详解】 解:  $\left(1 - \frac{2ab - b^2}{a^2}\right) \div \frac{a-b}{a^2b},$

$$= \left( \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2} \right) \times \frac{a^2 b}{a - b},$$

$$= \frac{(a - b)^2}{a^2} \times \frac{a^2 b}{a - b},$$

$$= ab - b^2,$$

$$\because 3ab - 3b^2 - 2 = 0,$$

$$\therefore 3ab - 3b^2 = 2,$$

$$\therefore ab - b^2 = \frac{2}{3},$$

故原式的值为  $\frac{2}{3}$ ,

故答案为:  $\frac{2}{3}$ .

【点睛】本题考查了分式的化简法则，整式的整体代入，熟练对代数式进行化简是解题的关键.

20. 一个几何体由几个大小相同的小立方块搭成，它的主视图和俯视图如图所示，则搭成这个几何体的小立方块最多有\_\_\_\_\_个.

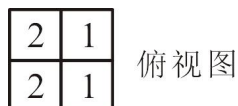


【答案】 6

【解析】

【分析】根据主视图和俯视图可得第一列最多 2 个，第二列最多 1 个小正方形，即可求解.

【详解】解：根据主视图和俯视图可得第一列最多 2 个，第二列最多 1 个小正方形，如图所示，



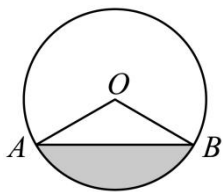
$\therefore$  搭成这个几何体的小立方块最多有  $2 + 2 + 1 + 1 = 6$ ,

故答案为: 6.

【点睛】本题考查了三视图，熟练掌握三视图的定义是解题的关键.

21. 为传承非遗文化，讲好中国故事，某地准备在一个场馆进行川剧演出. 该场馆底面为一个圆形，如图所示，其半径是 10 米，从 A 到 B 有一笔直的栏杆，圆心 O 到栏杆 AB 的距离是 5 米，观众在阴影区域里观看演出，如果每平方米可以坐 3 名观众，那么最多可容纳\_\_\_\_\_名观众同时观看演出. ( $\pi$  取 3.14,  $\sqrt{3}$

取 1.73)

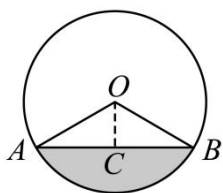


【答案】 184

【解析】

【分析】 过点  $O$  作  $AB$  的垂线段，交  $AB$  于点  $C$ ，根据直角三角形的边长关系求出  $\angle AOB$  的角度，阴影面积即为扇形  $AOB$  的面积减去三角形  $AOB$  的面积，随机可以求出容纳观众的数量.

【详解】 解：如图，过点  $O$  作  $AB$  的垂线段，交  $AB$  于点  $C$ ，



$\because$  圆心  $O$  到栏杆  $AB$  的距离是 5 米，

$\therefore OC = 5$  米，

$\because OC \perp AB$ ，

$\therefore \sin \angle OBC = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{2}$ ，  $AB = 2BC = 2AC = \sqrt{OB^2 - OC^2} = 10\sqrt{3}$  米，

$\therefore \angle OBC = 30^\circ$ ，

$\because OA = OB$ ，

$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 2\angle OAB = 120^\circ$ ，

$\therefore$  可容纳的观众 = 阴影部分面积

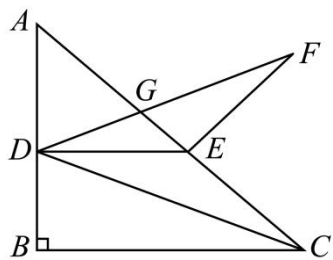
$$\times 3 = 3 \times \left( S_{\text{扇形}AOB} - S_{\triangle AOB} \right) = 3 \times \left( \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 10^2 - \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 5 \right) \approx 184.25 \text{ (人)},$$

$\therefore$  最多可容纳 184 名观众同时观看演出，

故答案为：184.

【点睛】 本题考查了弓形的面积，根据特殊角三角函数值求角的度数，熟知扇形面积公式是解题的关键.

22. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $CD$  平分  $\angle ACB$  交  $AB$  于点  $D$ ，过  $D$  作  $DE \parallel BC$  交  $AC$  于点  $E$ ，将  $\triangle DEC$  沿  $DE$  折叠得到  $\triangle DEF$ ， $DF$  交  $AC$  于点  $G$ 。若  $\frac{AG}{GE} = \frac{7}{3}$ ，则  $\tan A =$  \_\_\_\_\_.

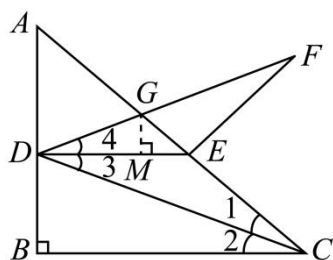


【答案】  $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

【解析】

【分析】过点  $G$  作  $GM \perp DE$  于  $M$ ，证明  $\triangle DGE \sim \triangle CGD$ ，得出  $DG^2 = GE \times GC$ ，根据  $AD \parallel GM$ ，得  $\frac{AG}{GE} = \frac{7}{3} = \frac{DM}{ME}$ ，设  $GE = 3, AG = 7$ ， $EM = 3n$ ，则  $DM = 7n$ ，则  $EC = DE = 10n$ ，在  $\text{Rt} \triangle DGM$  中， $GM^2 = DG^2 - DM^2$ ，在  $\text{Rt} \triangle GME$  中， $GM^2 = GE^2 - EM^2$ ，则  $DG^2 - DM^2 = GE^2 - EM^2$ ，解方程求得  $n = \frac{3}{4}$ ，则  $EM = \frac{9}{4}$ ， $GE = 3$ ，勾股定理求得  $GM$ ，根据正切的定义，即可求解。

【详解】解：如图所示，过点  $G$  作  $GM \perp DE$  于  $M$ ，



$\because CD$  平分  $\angle ACB$  交  $AB$  于点  $D$ ， $DE \parallel BC$

$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 2 = \angle 3$

$\therefore \angle 1 = \angle 3$

$\therefore ED = EC$

$\because$  折叠，

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 4$ ，

又  $\because \angle DGE = \angle CGD$

$\therefore \triangle DGE \sim \triangle CGD$

$\therefore \frac{DG}{CG} = \frac{GE}{DG}$

$$\therefore DG^2 = GE \times GC$$

$\because \angle ABC = 90^\circ$ ,  $DE \parallel BC$ , 则  $AD \perp DE$ ,

$$\therefore AD \parallel GM$$

$$\therefore \frac{AG}{GE} = \frac{DM}{ME}, \quad \angle MGE = \angle A,$$

$$\therefore \frac{AG}{GE} = \frac{7}{3} = \frac{DM}{ME}$$

设  $GE = 3$ ,  $AG = 7$ ,  $EM = 3n$ , 则  $DM = 7n$ , 则  $EC = DE = 10n$ ,

$$\therefore DG^2 = GE \times GC$$

$$\therefore DG^2 = 3 \times (3 + 10n) = 9 + 30n$$

在  $\text{Rt}\triangle DGM$  中,  $GM^2 = DG^2 - DM^2$

在  $\text{Rt}\triangle GME$  中,  $GM^2 = GE^2 - EM^2$

$$\therefore DG^2 - DM^2 = GE^2 - EM^2$$

$$\text{即 } 9 + 30n - (7n)^2 = 3^2 - (3n)^2$$

$$\text{解得: } n = \frac{3}{4}$$

$$\therefore EM = \frac{9}{4}, \quad GE = 3$$

$$\text{则 } GM = \sqrt{GE^2 - ME^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \tan A = \tan \angle EGM = \frac{ME}{MG} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3\sqrt{7}}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{故答案为: } \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

【点睛】 本题考查了求正切, 折叠的性质, 勾股定理, 平行线分线段成比例, 相似三角形的性质与判定, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

23. 定义: 如果一个正整数能表示为两个正整数  $m$ ,  $n$  的平方差, 且  $m - n > 1$ , 则称这个正整数为“智慧优数”. 例如,  $16 = 5^2 - 3^2$ , 16 就是一个智慧优数, 可以利用  $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$  进行研究. 若将

智慧优数从小到大排列，则第3个智慧优数是\_\_\_\_\_；第23个智慧优数是\_\_\_\_\_.

【答案】 ①. 15 ②. 57

【解析】

【分析】根据新定义，列举出前几个智慧优数，找到规律，进而即可求解.

【详解】解：依题意，当  $m=3$ ， $n=1$ ，则第1个智慧优数为  $3^2-1^2=8$

当  $m=4$ ， $n=2$ ，则第2个智慧优数为  $4^2-2^2=14$

当  $m=4$ ， $n=1$ ，则第3个智慧优数为  $4^2-1^2=15$ ，

当  $m=5$ ， $n=3$ ，则第5个智慧优数为  $5^2-3^2=16$

当  $m=5$ ， $n=2$ ，则第6个智慧优数为  $5^2-2^2=21$

当  $m=5$ ， $n=1$ ，则第7个智慧优数为  $5^2-3^2=24$

.....

$m=6$ 时有4个智慧优数，同理  $m=7$ 时有5个， $m=8$ 时有6个，

$$1+2+3+4+5+6=21$$

第22个智慧优数，当  $m=9$ 时， $n=7$ ，第22个智慧优数为  $9^2-7^2=81-49=32$ ，

第23个智慧优数为  $m=9, n=6$ 时， $9^2-6^2=81-36=57$ ，

故答案为：15，57.

【点睛】本题考查了新定义，平方差公式的应用，找到规律是解题的关键.

## 二、解答题（本大题共3个小题，共30分）

24. 2023年7月28日至8月8日，第31届世界大学生运动会将在成都举行。“当好东道主，热情迎嘉宾”，成都某知名小吃店计划购买A，B两种食材制作小吃. 已知购买1千克A种食材和1千克B种食材共需68元，购买5千克A种食材和3千克B种食材共需280元.

(1) 求A，B两种食材的单价；

(2) 该小吃店计划购买两种食材共36千克，其中购买A种食材千克数不少于B种食材千克数的2倍，当A，B两种食材分别购买多少千克时，总费用最少？并求出最少总费用.

【答案】(1) A种食材单价是每千克38元，B种食材单价是每千克30元

(2) A种食材购买24千克，B种食材购买12千克时，总费用最少，为1272元

【解析】

【分析】(1) 设A种食材的单价为 $a$ 元，B种食材的单价为 $b$ 元，根据题意列出二元一次方程组，解方程组

即可求解；

(2) 设 A 种食材购买  $x$  千克，则 B 种食材购买  $(36-x)$  千克，根据题意列出不等式，得出  $x \leq 24$ ，进而设总费用为  $y$  元，根据题意， $y = 38x + 30(36-x) = 8x + 1080$ ，根据一次函数的性质即可求解。

【小问 1 详解】

解：设 A 种食材的单价为  $a$  元，B 种食材的单价为  $b$  元，根据题意得，

$$\begin{cases} a+b=68 \\ 5a+3b=280 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a=38 \\ b=30 \end{cases},$$

答：A 种食材的单价为 38 元，B 种食材的单价为 30 元；

【小问 2 详解】

解：设 A 种食材购买  $x$  千克，则 B 种食材购买  $(36-x)$  千克，根据题意，

$$x \leq 2(36-x)$$

解得：  $x \leq 24$ ，

设总费用为  $y$  元，根据题意， $y = 38x + 30(36-x) = 8x + 1080$

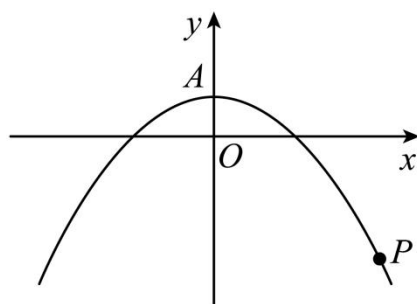
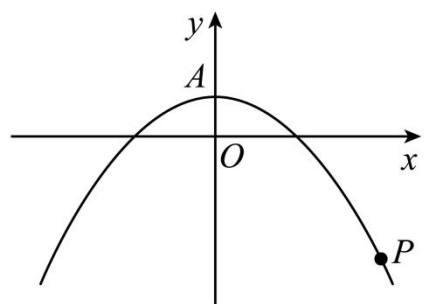
$\because 8 > 0$ ， $y$  随  $x$  的增大而增大，

$\therefore$  当  $x = 24$  时， $y$  最小，

$\therefore$  最少总费用为  $8 \times 24 + 1080 = 1272$  (元)

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的应用，一元一次不等式的应用，一次函数的应用，根据题意列出方程组，不等式以及一次函数关系式是解题的关键。

25. 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，已知抛物线  $y = ax^2 + c$  经过点  $P(4, -3)$ ，与  $y$  轴交于点  $A(0, 1)$ ，直线  $y = kx (k \neq 0)$  与抛物线交于  $B, C$  两点。



备用图

(1) 求抛物线的函数表达式；

(2) 若  $\triangle ABP$  是以  $AB$  为腰的等腰三角形，求点  $B$  的坐标；

(3) 过点  $M(0, m)$  作  $y$  轴的垂线，交直线  $AB$  于点  $D$ ，交直线  $AC$  于点  $E$ 。试探究：是否存在常数  $m$ ，使得  $OD \perp OE$  始终成立？若存在，求出  $m$  的值；若不存在，请说明理由。

【答案】(1)  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

(2) 点  $B$  的坐标为  $(-4, -3)$  或  $(-2 - 2\sqrt{5}, -5 - 2\sqrt{5})$  或  $(-2 + 2\sqrt{5}, -5 + 2\sqrt{5})$

(3) 存在， $m$  的值为 2 或  $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可；

(2) 设  $B\left(t, -\frac{1}{4}t^2 + 1\right)$ ，分  $AB = AP$  和  $AB = BP$  两种情况，分别根据等腰三角形性质和两点坐标距离公式列方程求解即可；

(3) 先根据题意画出图形，设抛物线  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$  与直线  $y = kx (k \neq 0)$  的交点坐标为  $B(a, ka)$ ， $C(b, kb)$ ，联立抛物线和直线解析式，根据根与系数关系得到  $a + b = -4k$ ， $ab = -4$ ，利用待定系数法分别求得直线  $AB$ 、 $AC$  的表达式为得到  $D\left(\frac{a(m-1)}{ka-1}, m\right)$ ， $E\left(\frac{b(m-1)}{kb-1}, m\right)$ ，过  $E$  作  $EQ \perp x$  轴于  $Q$ ，过  $D$  作  $DN \perp x$  轴于  $N$ ，证明  $\triangle EQO \sim \triangle OND$  得到  $\frac{m}{\frac{a(m-1)}{ka-1}} = \frac{-\frac{b(m-1)}{kb-1}}{m}$ ，整理可得到  $m^2 = 4(m-1)^2$ ，进而求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because$  抛物线  $y = ax^2 + c$  经过点  $P(4, -3)$ ，与  $y$  轴交于点  $A(0, 1)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 16a + c = -3 \\ c = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ c = 1 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的函数表达式为  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ ；

【小问 2 详解】

解：设  $B\left(t, -\frac{1}{4}t^2 + 1\right)$ ，



$$\text{由 } y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 = kx \text{ 得 } x^2 + 4kx - 4 = 0,$$

$$\therefore a + b = -4k, \quad ab = -4;$$

设直线  $AB$  的表达式为  $y = px + q$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} ap + q = ka \\ q = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} p = \frac{ka-1}{a} \\ q = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的表达式为 } y = \frac{ka-1}{a}x + 1,$$

$$\text{令 } y = m, \text{ 由 } y = \frac{ka-1}{a}x + 1 = m \text{ 得 } x = \frac{a(m-1)}{ka-1},$$

$$\therefore D\left(\frac{a(m-1)}{ka-1}, m\right),$$

$$\text{同理, 可得直线 } AC \text{ 的表达式为 } y = \frac{kb-1}{b}x + 1, \text{ 则 } E\left(\frac{b(m-1)}{kb-1}, m\right),$$

过  $E$  作  $EQ \perp x$  轴于  $Q$ , 过  $D$  作  $DN \perp x$  轴于  $N$ ,

$$\text{则 } \angle EQO = \angle OND = 90^\circ, \quad EQ = ND = m, \quad QO = -\frac{b(m-1)}{kb-1}, \quad ON = \frac{a(m-1)}{ka-1},$$

若  $OD \perp OE$ , 则  $\angle EOD = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle QEO + \angle QOE = \angle DON + \angle QOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QEO = \angle DON,$$

$$\therefore \triangle EQO \sim \triangle OND,$$

$$\therefore \frac{EQ}{ON} = \frac{QO}{ND},$$

$$\text{则 } \frac{m}{\frac{a(m-1)}{ka-1}} = \frac{-\frac{b(m-1)}{kb-1}}{m},$$

$$\text{整理, 得 } m^2(ka-1)(kb-1) = -ab(m-1)^2,$$

$$\text{即 } m^2[abk^2 - k(a+b) + 1] = -ab(m-1)^2,$$

将  $a+b=-4k$ ,  $ab=-4$  代入, 得  $m^2(-4k^2+4k^2+1)=4(m-1)^2$ ,

即  $m^2=4(m-1)^2$ , 则  $m=2(m-1)$  或  $m=-2(m-1)$ ,

解得  $m_1=2$ ,  $m_2=\frac{2}{3}$ ,

综上, 存在常数  $m$ , 使得  $OD \perp OE$ ,  $m$  的值为 2 或  $\frac{2}{3}$ .

【点睛】本题是二次函数的综合题, 主要考查了待定系数法求函数的解析式、等腰三角形的性质、一元二次方程根与系数关系、相似三角形的判定与性质、解一元二次方程、坐标与图形等知识, 综合性强, 难度较大, 熟练掌握相关知识的联系与运用, 添加辅助线构造相似三角形, 并利用数形结合和分类讨论思想解决问题是解答的关键.

26. 探究式学习是新课程倡导的重要学习方式, 某兴趣小组拟做以下探究.

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C=90^\circ$ ,  $AC=BC$ ,  $D$  是  $AB$  边上一点, 且  $\frac{AD}{BD}=\frac{1}{n}$  ( $n$  为正整数),  $E$  是  $AC$  边上的动点, 过点  $D$  作  $DE$  的垂线交直线  $BC$  于点  $F$ .

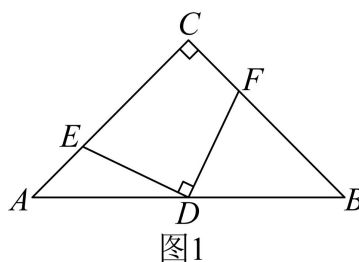


图1

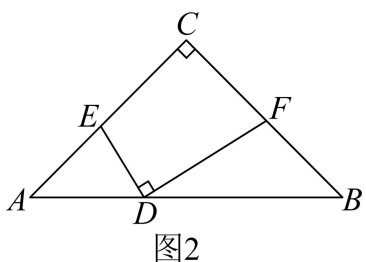


图2

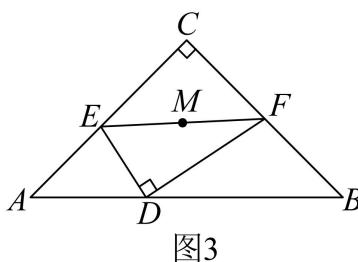


图3

### 【初步感知】

(1) 如图 1, 当  $n=1$  时, 兴趣小组探究得出结论:  $AE+BF=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$ , 请写出证明过程.

### 【深入探究】

(2) ①如图 2, 当  $n=2$ , 且点  $F$  在线段  $BC$  上时, 试探究线段  $AE$ ,  $BF$ ,  $AB$  之间的数量关系, 请写出结论并证明;

②请通过类比、归纳、猜想, 探究出线段  $AE$ ,  $BF$ ,  $AB$  之间数量关系的一般结论 (直接写出结论, 不必证明)

### 【拓展运用】

(3) 如图 3, 连接  $EF$ , 设  $EF$  的中点为  $M$ . 若  $AB=2\sqrt{2}$ , 求点  $E$  从点  $A$  运动到点  $C$  的过程中, 点  $M$  运动的路径长 (用含  $n$  的代数式表示).

【答案】(1) 见解析 (2) ①  $AE+\frac{1}{2}BF=\frac{\sqrt{2}}{3}AB$ , 证明过程略; ②当点  $F$  在射线  $BC$  上时,

$$AE + \frac{1}{n}BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB, \text{ 当点 } F \text{ 在 } CB \text{ 延长线上时, } AE - \frac{1}{n}BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB$$

$$(3) \sqrt{n^2+1}$$

【解析】

【分析】(1) 连接  $CD$ ，当  $n=1$  时， $\frac{AD}{BD}=1$ ，即  $AD=BD$ ，证明  $AD=CD$ ，从而得到  $\triangle ADE \cong \triangle CDF$

即可解答；

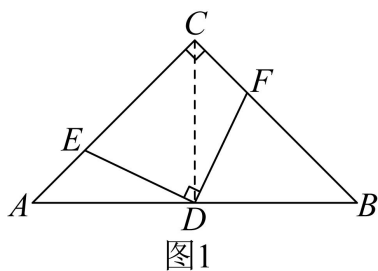
(2) ①过  $BD$  的中点  $G$  作  $BC$  的平行线，交  $DF$  于点  $J$ ，交  $AC$  于点  $H$ ，当  $n=2$  时， $AD=DG$ ，根据  $GH \parallel BC$ ，可得  $\triangle AHG$  是等腰直角三角形， $JG = \frac{1}{2}FB$ ，根据 (1) 中结论可得  $AE + JG = \frac{\sqrt{2}}{2}AG$ ，

再根据  $JG = \frac{1}{2}FB$ ， $AG = \frac{2}{3}AB$ ，即可得到  $AE + \frac{1}{2}BF = \frac{\sqrt{2}}{3}AB$ ；

②分类讨论，即当点  $F$  在射线  $BC$  上时；当点  $F$  在  $CB$  延长线上时，画出图形，根据①中的原理即可解答；

(3) 如图，当  $E_1$  与  $A$  重合时，取  $E_1F_1$  的中点  $M_1$ ，当  $E_2$  与  $C$  重合时，取  $E_2F_2$  的中点  $M_2$ ，可得  $M$  的轨迹长度即为  $M_1M_2$  的长度，可利用建系的方法表示出  $E_1, F_1, E_2, F_2$  的坐标，再利用中点公式求出  $M_1, M_2$ ，最后利用勾股定理即可求出  $M_1M_2$  的长度。

【小问 1 详解】

证明：如图，连接  $CD$ ，

当  $n=1$  时， $\frac{AD}{BD}=1$ ，即  $AD=BD$ ，

$\because \angle C = 90^\circ, AC = BC$ ，

$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ, CD \perp AB, \angle FCD = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ$ ，

$\therefore CD = AD, AB = \sqrt{2}BC$ ，即  $BC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$ ，

$$\because DE \perp FD,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle EDC = \angle FDC + \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\angle ADE = \angle CDF$$

在  $\triangle ADE$  与  $\triangle CDF$  中,

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle CDF \\ DA = DC \\ \angle DAE = \angle DCF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF (\text{ASA}),$$

$$\therefore AE = CF,$$

$$\therefore BC = CF + BF = AE + BF = \frac{\sqrt{2}}{2} AB;$$

【小问 2 详解】

$$\textcircled{1} AE + \frac{1}{2} BF = \frac{\sqrt{2}}{3} AB$$

证明：如图，过  $BD$  的中点  $G$  作  $BC$  的平行线，交  $DF$  于点  $J$ ，交  $AC$  于点  $H$ ，

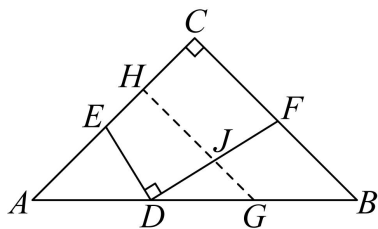


图2

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } \frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } 2AD = DB,$$

$\because G$  是  $DB$  的中点,

$$\therefore AD = DG, \quad AG = \frac{2}{3} AB,$$

$\because HG \parallel BC,$

$$\therefore \angle AHG = \angle C = 90^\circ, \quad \angle HGA = \angle B = 45^\circ,$$

$\because \angle A = 45^\circ,$

$\therefore \triangle AHG$  是等腰直角三角形, 且  $\triangle DJG \sim \triangle DBF$ ,

$$\therefore \frac{JG}{FB} = \frac{DG}{DB} = \frac{1}{2},$$

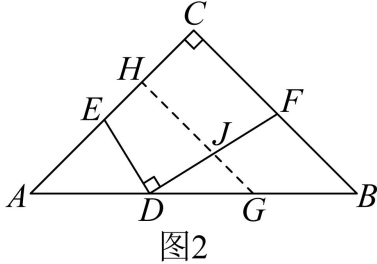
$$\text{根据 (1) 中的结论可得 } AE + JG = \frac{\sqrt{2}}{2} AG,$$

$$\therefore AE + JG = AE + \frac{1}{2}FB = \frac{\sqrt{2}}{2}AG = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{3}AB;$$

故线段  $AE$ ,  $BF$ ,  $AB$  之间的数量关系为  $AE + \frac{1}{2}BF = \frac{\sqrt{2}}{3}AB$ ;

②解：当点  $F$  在射线  $BC$  上时，

如图，在  $DB$  上取一点  $G$  使得  $AD = DG$ ，过  $G$  作  $BC$  的平行线，交  $DF$  于点  $J$ ，交  $AC$  于点  $H$ ，



同①，可得  $AE + JG = \frac{\sqrt{2}}{2}AG$ ，

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{1}{n}, \quad AD = DG,$$

$$\therefore \frac{DG}{BD} = \frac{1}{n}, \quad AG = \frac{2}{n+1}AB,$$

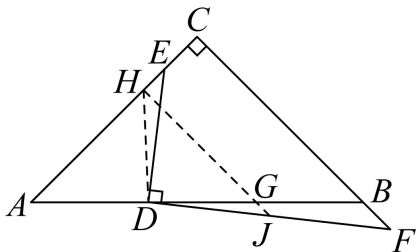
$$\text{同①可得 } \frac{JG}{FB} = \frac{DG}{DB} = \frac{1}{n},$$

$$\therefore AE + JG = AE + \frac{1}{n}FB = \frac{\sqrt{2}}{2}AG = \frac{2}{n+1} \times \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB,$$

即线段  $AE$ ,  $BF$ ,  $AB$  之间数量关系为  $AE + \frac{1}{n}BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB$ ;

当点  $F$  在  $CB$  延长线上时，

如图，在  $DB$  上取一点  $G$  使得  $AD = DG$ ，过  $G$  作  $BC$  的平行线，交  $DF$  于点  $J$ ，交  $AC$  于点  $H$ ，连接  $HD$



同 (1) 中原理，可证明  $\triangle DHE \cong \triangle DGJ$  (ASA)，

$$\text{可得 } AE - GJ = \frac{\sqrt{2}}{2} AG,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{1}{n}, \quad AD = DG,$$

$$\therefore \frac{DG}{BD} = \frac{1}{n}, \quad AG = \frac{2}{n+1} AB,$$

$$\text{同①可得 } \frac{JG}{FB} = \frac{DG}{DB} = \frac{1}{n},$$

$$\therefore AE - JG = AE - \frac{1}{n} FB = \frac{\sqrt{2}}{2} AG = \frac{2}{n+1} \times \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{n+1} AB$$

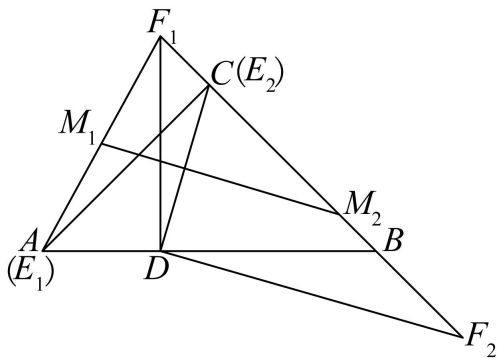
$$\text{即线段 } AE, BF, AB \text{ 之间数量关系为 } AE - \frac{1}{n} BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1} AB,$$

综上所述，当点  $F$  在射线  $BC$  上时， $AE + \frac{1}{n} BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1} AB$ ；当点  $F$  在  $CB$  延长线上时，

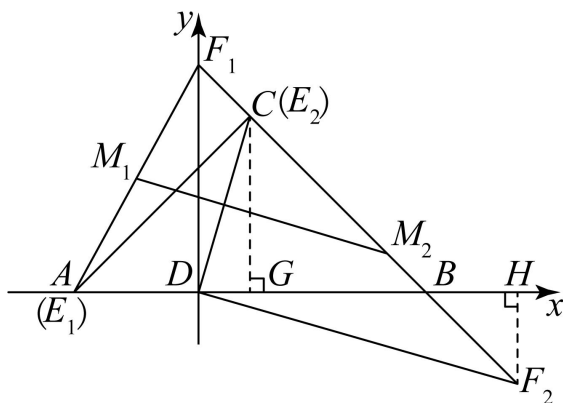
$$AE - \frac{1}{n} BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1} AB;$$

### 【小问3 详解】

解：如图，当  $E_1$  与  $A$  重合时，取  $E_1F_1$  的中点  $M_1$ ，当  $E_2$  与  $C$  重合时，取  $E_2F_2$  的中点  $M_2$ ，可得  $M$  的轨迹长度即为  $M_1M_2$  的长度，



如图，以点  $D$  为原点， $DF_1$  为  $y$  轴， $DB$  为  $x$  轴建立平面直角坐标系，过点  $E_2$  作  $AB$  的垂线段，交  $AB$  于点  $G$ ，过点  $F_2$  作  $AB$  的垂线段，交  $AB$  于点  $H$ ，



$$\because AB = 2\sqrt{2}, \frac{AD}{DB} = \frac{1}{n},$$

$$\therefore AD = \frac{2\sqrt{2}}{n+1}, \quad DB = \frac{2\sqrt{2}n}{n+1},$$

$$\therefore E_1 \left( -\frac{2\sqrt{2}}{n+1}, 0 \right),$$

$$\because \angle F_1BD = 45^\circ,$$

$$\therefore F_1D = BD,$$

$$\therefore F_1 \left( 0, \frac{2\sqrt{2}n}{n+1} \right),$$

$$\because M_1 \text{ 是 } E_1F_1 \text{ 的中点},$$

$$\therefore M_1 \left( -\frac{\sqrt{2}}{n+1}, \frac{\sqrt{2}n}{n+1} \right),$$

$$\because GB = GC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2},$$

$$\therefore DG = DB - BG = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}n}{n+1},$$

$$\therefore E_2 \left( \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}n}{n+1}, \sqrt{2} \right),$$

根据 (2) 中的结论  $AE_2 - \frac{1}{n}BF_2 = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB$ ,

$$\therefore BF_2 = n \left( AE_2 - \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB \right) = \frac{2n^2 - 2n}{n+1},$$

$$\therefore BH = F_2H = \frac{\sqrt{2}}{2} BF_2 = \frac{\sqrt{2}n^2 - \sqrt{2}n}{n+1},$$

$$\therefore DH = DB + BH = \sqrt{2}n,$$

$$\therefore F_2 \left( \sqrt{2}n, -\frac{\sqrt{2}n^2 - \sqrt{2}n}{n+1} \right),$$

$$\therefore M_2 \left( \frac{\sqrt{2}n^2 + 2\sqrt{2}n - \sqrt{2}}{2n+2}, \frac{-\sqrt{2}n^2 + 2\sqrt{2}n + \sqrt{2}}{2n+2} \right),$$

$$\therefore M_1M_2 = \sqrt{n^2 + 1}.$$

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质，全等三角形的判定及性质，相似三角形的判定及性质，平行线的性质，正确地画出图形，作出辅助线，找对边之间的关系是解题的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】