

2024 年赤峰市初中毕业、升学统一考试试卷数学

温馨提示：

1. 本试卷卷面分值 150 分，共 8 页，考试时间 120 分钟.
2. 答题前，考生务必将姓名、座位号、考生号填写在答题卡的相应位置上，并仔细阅读答题卡上的“注意事项”.
3. 答题时，请将答案填涂在答题卡上，写在本试卷上无效.
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题（每小题给出的选项中只有一个符合题意，请将符合题意的选项序号，在答题卡的对应位置上按要求涂黑. 每小题 3 分，共 42 分）

1. 在以下绿色食品、回收、节能、节水四个标志中，是轴对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念求解. 如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴.

- 【详解】A. 是轴对称图形，故 A 符合题意；
 B. 不是轴对称图形，故 B 不符合题意；
 C. 不是轴对称图形，故 C 不符合题意；
 D. 不是轴对称图形，故 D 不符合题意.

故选：A.

【点睛】本题主要考查轴对称图形的知识点. 确定轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

2. 央视新闻 2024 年 5 月 31 日报道，世界最大清洁能源走廊今年一季度累计发电超 52000000000 度，为我国经济社会绿色发展提供了强劲动能. 将数据 52000000000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 5.2×10^9 B. 0.52×10^{11} C. 52×10^9 D. 5.2×10^{10}

【答案】D

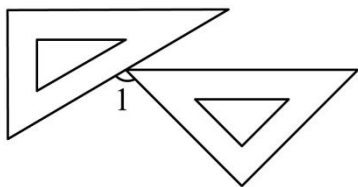
【解析】

【分析】本题考查了科学记数法，根据科学记数法： $a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$, n 为正整数)，先确定 a 的值，再根据小数点移动的数位确定 n 的值即可解答，根据科学记数法确定 a 和 n 的值是解题的关键。

【详解】解： $52000000000 = 5.2 \times 10^{10}$ ，

故选：D.

3. 将一副三角尺如图摆放，使有刻度的两条边互相平行，则 $\angle 1$ 的大小为 ()



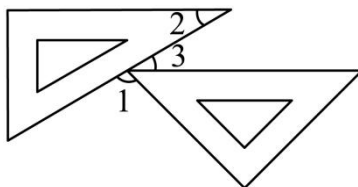
- A. 100° B. 105° C. 115° D. 120°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了三角板中角度计算问题，由题意得 $\angle 3 = \angle 2 = 30^\circ$ ，根据 $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3 - 45^\circ$ 即可求解。

【详解】解：如图所示：



由题意得： $\angle 3 = \angle 2 = 30^\circ$

$\therefore \angle 1 = 180^\circ - \angle 3 - 45^\circ = 105^\circ$

故选：B.

4. 下列计算正确的是 ()

- A. $a^2 + a^3 = a^5$ B. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ C. $a^6 \div a^3 = a^2$ D. $(a^3)^2 = a^6$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了同底数幂的除法，完全平方公式，合并同类项，幂的乘方。根据同底数幂的除法法则，完全平方公式，合并同类项，幂的乘方的运算法则，可得答案。

【详解】解：A、 a^2 与 a^3 不是同类项，不能合并，故此选项不符合题意；

B、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$ ，故此选项不符合题意；

C、 $a^6 \div a^3 = a^3 \neq a^2$ ，故此选项不符合题意；

D、 $(a^3)^2 = a^6$ ，故此选项符合题意.

故选：D.

5. 在数据收集、整理、描述的过程中，下列说法错误的是（ ）

A. 为了解 1000 只灯泡的使用寿命，从中抽取 50 只进行检测，此次抽样的样本容量是 50

B. 了解某校一个班级学生的身高情况，适合全面调查

C. 了解商场的平均日营业额，选在周末进行调查，这种调查不具有代表性

D. 甲、乙二人 10 次测试的平均分都是 96 分，且方差 $S_{\text{甲}}^2 = 2.5$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 2.3$ ，则发挥稳定的是甲

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了全面调查与抽样调查、判断事件发生的可能性、根据方差判断稳定性，根据全面调查与抽样调查的定义、方差的意义逐项判断即可得出答案.

【详解】解：A、为了解 1000 只灯泡的使用寿命，从中抽取 50 只进行检测，此次抽样的样本容量是 50，说法正确，本选项不符合题意；

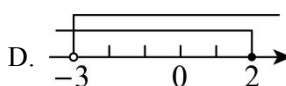
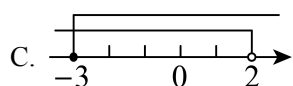
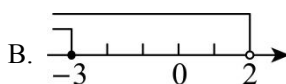
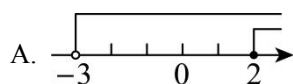
B、了解某校一个班级学生的身高情况，适合全面调查，说法正确，本选项不符合题意；

C、了解商场的平均日营业额，选在周末进行调查，这种调查不具有代表性，说法正确，本选项不符合题意；

D、甲、乙二人 10 次测试的平均分都是 96 分，且方差 $S_{\text{甲}}^2 = 2.5$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 2.3$ ，则发挥稳定的是乙，故原说法错误，符合题意；

故选：D.

6. 解不等式组 $\begin{cases} 3x-2 < 2x & \text{①} \\ 2(x+1) \geq x-1 & \text{②} \end{cases}$ 时，不等式①和不等式②的解集在数轴上表示正确的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解一元一次不等式组和在数轴上表示不等式组的解集，先求出不等式组的解集，再在数轴上表示出不等式组的解集即可.

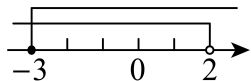
【详解】解：
$$\begin{cases} 3x-2 < 2x & \text{①} \\ 2(x+1) \geq x-1 & \text{②} \end{cases}$$

解不等式①得， $x < 2$ ，

解不等式②得， $x \geq -3$ ，

所以，不等式组的解集为： $-3 \leq x < 2$ ，

在数轴上表示为：



故选：C.

7. 如图，是正 n 边形纸片的一部分，其中 l ， m 是正 n 边形两条边的一部分，若 l ， m 所在的直线相交形成的锐角为 60° ，则 n 的值是（ ）



A. 5

B. 6

C. 8

D. 10

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了正多边形，求出正多边形的每个外角度数，再用外角和 360° 除以外角度数即可求解，掌握正多边形的性质是解题的关键.

【详解】解：如图，直线 l 、 m 相交于点 A，则 $\angle A = 60^\circ$ ，

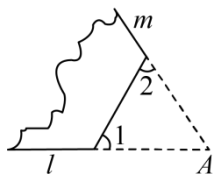
$\therefore$ 正多边形的每个内角相等，

$\therefore$ 正多边形的每个外角也相等，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ,$$

$$\therefore n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6,$$

故选：B.



8. 某市为了解初中学生的视力情况，随机抽取 200 名初中学生进行调查，整理样本数据如下表. 根据抽样调查结果，估计该市 16000 名初中学生中，视力不低于 4.8 的人数是（ ）

视力	4.7 以下	4.7	4.8	4.9	4.9 以上
人数	39	41	33	40	47

- A. 120 B. 200 C. 6960 D. 9600

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是统计表，用样本估计总体，求出不低于 4.8 的人数所占的百分比是解决此题的关键. 求出不低于 4.8 的人数所占的百分比再乘 16000 即可求出结论.

【详解】解： $16000 \times \frac{33+40+47}{200} = 9600$ ，

$\therefore$ 视力不低于 4.8 的人数是 9600，

故选：D.

9. 等腰三角形的两边长分别是方程 $x^2 - 10x + 21 = 0$ 的两个根，则这个三角形的周长为 ()

- A. 17 或 13 B. 13 或 21 C. 17 D. 13

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程，等腰三角形的定义，三角形的三边关系及周长，由方程可得 $x_1 = 3$ ， $x_2 = 7$ ，根据三角形的三边关系可得等腰三角形的底边长为 3，腰长为 7，进而即可求出三角形的周长，掌握等腰三角形的定义及三角形的三边关系是解题的关键.

【详解】解：由方程 $x^2 - 10x + 21 = 0$ 得， $x_1 = 3$ ， $x_2 = 7$ ，

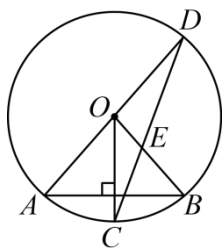
$\therefore 3+3 < 7$ ，

$\therefore$ 等腰三角形的底边长为 3，腰长为 7，

$\therefore$ 这个三角形的周长为 $3+7+7=17$ ，

故选：C.

10. 如图，AD 是 $\odot O$ 的直径，AB 是 $\odot O$ 的弦，半径 $OC \perp AB$ ，连接 CD，交 OB 于点 E， $\angle BOC = 42^\circ$ ，则 $\angle OED$ 的度数是 ()

A. 61° B. 63° C. 65° D. 67°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了垂径定理，圆周角定理以及三角形的外角性质．先根据垂径定理，求得 $\angle AOC = \angle BOC = 42^\circ$ ，利用圆周角定理求得 $\angle D = \frac{1}{2} \angle AOC = 21^\circ$ ，再利用三角形的外角性质即可求解．

【详解】解： $\because$ 半径 $OC \perp AB$ ，

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = 42^\circ, \quad \angle AOB = 84^\circ,$$

$$\because \widehat{AC} = \widehat{AC},$$

$$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle AOC = 21^\circ,$$

$$\therefore \angle OED = \angle AOB - \angle D = 63^\circ,$$

故选：B.

11. 用 1 块 A 型钢板可制成 3 块 C 型钢板和 4 块 D 型钢板；用 1 块 B 型钢板可制成 5 块 C 型钢板和 2 块 D 型钢板．现在需要 58 块 C 型钢板、40 块 D 型钢板，问恰好用 A 型钢板、B 型钢板各多少块？如果设用 A 型钢板 x 块，用 B 型钢板 y 块，则可列方程组为（ ）

A. $\begin{cases} 3x + 2y = 40 \\ 4x + 5y = 58 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 3x + 5y = 40 \\ 4x + 2y = 58 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 3x + 5y = 58 \\ 4x + 2y = 40 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 3x + 4y = 58 \\ 5x + 2y = 40 \end{cases}$

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查了二元一次方程组的应用．根据题意设用 A 型钢板 x 块，用 B 型钢板 y 块，再利用现需要 58 块 C 型钢板、40 块 D 型钢板分别得出方程组即可．

【详解】解：设用 A 型钢板 x 块，用 B 型钢板 y 块，

由题意得： $\begin{cases} 3x + 5y = 58 \\ 4x + 2y = 40 \end{cases}$

故选：C.

$$\textcircled{3} \because \angle DC'B = 180^\circ - 2 \times 72^\circ = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle DC'B = \angle ABC = 36^\circ,$$

$\therefore BD = C'D$; $\textcircled{3}$ 说法正确;

$$\textcircled{4} \because \angle BB'D = \angle ABC = 36^\circ, \angle B'BD = \angle BAC = 72^\circ,$$

$$\therefore \triangle B'BD \sim \triangle BAC,$$

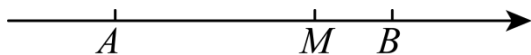
$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{B'B}{BD}. \textcircled{4}\text{说法正确};$$

综上, $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}$ 都是正确的,

故选: A.

13. 如图, 数轴上点 A, M, B 分别表示数 $a, a+b, b$, 若 $AM > BM$, 则下列运算结果一定是正数的是

()



A. $a+b$

B. $a-b$

C. ab

D. $|a|-b$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了列代数式、数轴、正数和负数、绝对值等知识点, 得到 $a < 0$, $b > 0$ 且 $|a| < |b|$ 是解题的关键.

数轴上点 A, M, B 分别表示数 $a, a+b, b$, 则 $AM = a+b-a = b$ 、 $BM = b-(a+b) = -a$, 由 $AM > BM$

可得原点在 A, M 之间, 由它们的位置可得 $a < 0$, $a+b > 0$, $b > 0$ 且 $|a| < |b|$, 再根据整式的加减乘法运算的计算法则逐项判断即可.

【详解】 解: 数轴上点 A, M, B 分别表示数 $a, a+b, b$,

$$\therefore AM = a+b-a = b, \quad BM = b-(a+b) = -a,$$

$$\because AM > BM,$$

$$\therefore \text{原点在 } A, M \text{ 之间, 由它们的位置可得 } a < 0, \quad b > 0 \text{ 且 } |a| < |b|,$$

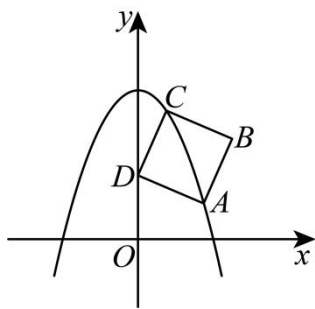
$$\therefore a+b > 0, \quad a-b < 0, \quad ab < 0, \quad |a|-b < 0,$$

故运算结果一定是正数的是 $a+b$.

故选: A.

14. 如图, 正方形 $ABCD$ 的顶点 A, C 在抛物线 $y = -x^2 + 4$ 上, 点 D 在 y 轴上. 若 A, C 两点的横坐标分

别为 m, n ($m > n > 0$), 下列结论正确的是 ()



A. $m + n = 1$

B. $m - n = 1$

C. $mn = 1$

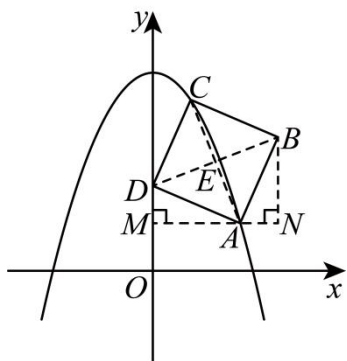
D. $\frac{m}{n} = 1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的图象与性质、正方形的性质、全等三角形的判定与性质，解题时要熟练掌握并能灵活运用是关键。依据题意，连接 AC 、 BD 交于点 E ，过点 A 作 $MN \perp y$ 轴于点 M ，过点 B 作 $BN \perp MN$ 于点 N ，先证明 $\triangle ANB \cong \triangle DMA$ (AAS)，可得 $AM = NB$ ， $DM = AN$ 。点 A 、 C 的横坐标分别为 m 、 n ，可得 $A(m, -m^2 + 4)$ ， $C(n, -n^2 + 4)$ ， $E(\frac{m+n}{2}, \frac{-m^2 - n^2 + 8}{2})$ ， $M(0, -m^2 + 4)$ ，设 $D(0, b)$ ，则 $B(m+n, -m^2 - n^2 + 8 - b)$ ， $N(m+n, -m^2 + 4)$ ， $BN = -n^2 + 4 - b$ ， $AM = m$ ， $AN = n$ ， $DM = m^2 - 4 + b$ 。再由 $AM = NB$ ， $DM = AN$ 进而可以求解判断即可。

【详解】解：如图，连接 AC 、 BD 交于点 E ，过点 A 作 $MN \perp y$ 轴于点 M ，过点 B 作 $BN \perp MN$ 于点 N ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC$ 、 BD 互相平分， $AB = AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAN + \angle DAM = 90^\circ$ ， $\angle DAM + \angle ADM = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAN = \angle ADM$ 。

$\because \angle BNA = \angle AMD = 90^\circ$ ， $BA = AD$ ，

$\therefore \triangle ANB \cong \triangle DMA$ (AAS)。

$\therefore AM = NB$ ， $DM = AN$ 。

∵ 点 A、C 的横坐标分别为 m 、 n ，

$$\therefore A(m, -m^2 + 4), \quad C(n, -n^2 + 4).$$

$$\therefore E\left(\frac{m+n}{2}, \frac{-m^2-n^2+8}{2}\right), \quad M(0, -m^2 + 4),$$

$$\text{设 } D(0, b), \text{ 则 } B(m+n, -m^2-n^2+8-b), \quad N(m+n, -m^2+4),$$

$$\therefore BN = -n^2 + 4 - b, \quad AM = m, \quad AN = n, \quad DM = m^2 - 4 + b.$$

$$\text{又 } AM = NB, \quad DM = AN,$$

$$\therefore -n^2 + 4 - b = m, \quad n = m^2 - 4 + b.$$

$$\therefore b = -n^2 - m + 4.$$

$$\therefore n = m^2 - 4 - n^2 - m + 4.$$

$$\therefore (m+n)(m-n) = m+n.$$

∵ 点 A、C 在 y 轴的同侧，且点 A 在点 C 的右侧，

$$\therefore m+n \neq 0.$$

$$\therefore m-n=1.$$

故选：B.

二、填空题（请把答案填写在答题卡对应的横线上。每小题 3 分，共 12 分）

15. 请写出一个比 $\sqrt{5}$ 小的整数_____

【答案】1（或 2）

【解析】

【详解】试题分析：先估算出 $\sqrt{5}$ 在哪两个整数之间，即可得到结果.

$$\because 2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3,$$

∴ 满足条件的数为小于或等于 2 的整数均可.

考点：本题考查的是无理数的估算

点评：解答本题的关键是熟知用“夹逼法”估算无理数是常用的估算无理数的方法.

16. 因式分解： $3am^2 - 3a =$ _____.

【答案】 $3a(m+1)(m-1)$

【解析】

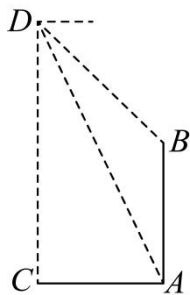
【分析】先提取公因式 $3a$ ，再利用平方差公式分解因式.

【详解】解： $3am^2 - 3a = 3a(m^2 - 1) = 3a(m+1)(m-1),$

故答案为： $3a(m+1)(m-1)$.

【点睛】此题考查了综合利用提公因式法和公式法分解因式，正确掌握因式分解的方法：提公因式法和公式法（平方差公式和完全平方公式）是解题的关键.

17. 综合实践课上，航模小组用无人机测量古树 AB 的高度. 如图，点 C 处与古树底部 A 处在同一水平面上，且 $AC = 10$ 米，无人机从 C 处竖直上升到达 D 处，测得古树顶部 B 的俯角为 45° ，古树底部 A 的俯角为 65° ，则古树 AB 的高度约为_____米(结果精确到 0.1 米；参考数据： $\sin 65^\circ \approx 0.906$ ， $\cos 65^\circ \approx 0.423$ ， $\tan 65^\circ \approx 2.145$).

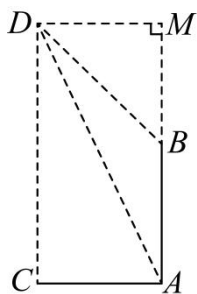


【答案】 11.5

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用. 过点 D 作 $DM \perp AB$ ，由题意知： $DM = AC = 10$ 米， $\angle BDM = 45^\circ$ ， $\angle ADM = 65^\circ$ ，推出 $\triangle BDM$ 是等腰直角三角形，在 $\text{Rt}\triangle ADM$ 中，利用正切函数求出 AM 的值，根据 $AB = AM - BM$ 计算求解可得 AB 的值.

【详解】解：如图，过点 D 作 $DM \perp AB$ ，交 AB 的延长线于点 M ，



$\therefore$ 四边形 $ACDM$ 是矩形，

$\therefore DM = AC = 10$ 米，

$\therefore \angle BDM = 45^\circ$ ， $\angle ADM = 65^\circ$ ， $\angle M = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle BDM$ 是等腰直角三角形，

$\therefore BM = DM = 10$ 米，

在 $\text{Rt}\triangle ADM$ 中， $AM = DM \cdot \tan \angle ADM = 10 \cdot \tan 65^\circ \approx 10 \times 2.145 \approx 21.45$ (米)，

$\therefore AB = AM - BM = 21.45 - 10 = 11.45 \approx 11.5$ (米)，

∴ 古树 AB 的高度约为 11.5 米.

故答案为：11.5.

18. 编号为 A, B, C, D, E 的五台收割机, 若同时启动其中两台收割机, 收割面积相同的田地所需时间如下表:

收割机编号	A, B	B, C	C, D	D, E	A, E
所需时间 (小时)	23	19	20	22	18

则收割最快的一台收割机编号是_____.

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查推理能力. 利用同时启动其中的两台收割机, 收割面积相同的田地所需时间分析对比, 能求出结果.

【详解】 解: 同时启动 A, B 两台收割机, 所需的时间为 23 小时,

同时启动 B, C 两台收割机, 所需的时间为 19 小时,

得到 C 比 A 快;

同时启动 B, C 两台收割机, 所需的时间为 19 小时,

同时启动 C, D 两台收割机, 所需的时间为 20 小时,

得到 B 比 D 快;

同时启动 A, B 两台收割机, 所需的时间为 23 小时,

同时启动 A, E 两台收割机, 所需的时间为 18 小时,

得到 E 比 B 快;

同时启动 C, D 两台收割机, 所需的时间为 20 小时,

同时启动 D, E 两台收割机, 所需的时间为 22 小时,

得到 C 比 E 快.

综上, 收割最快的一台收割机编号是 C.

故答案为: C.

三、解答题 (在答题卡上解答, 答在本试卷上无效, 解答时要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 共 8 题, 满分 96 分)

19 (1) 计算: $\sqrt{9} + (\pi + 1)^0 + 2\sin 60^\circ + |2 - \sqrt{3}|$;

(2) 已知 $a^2 - a - 3 = 0$, 求代数式 $(a - 2)^2 + (a - 1)(a + 3)$ 的值.

【答案】(1) 6; (2) 7.

【解析】

【分析】(1) 利用算术平方根、零指数幂、特殊角的三角函数值、绝对值的性质分别运算，再合并即可求解；

(2) 由 $a^2 - a - 3 = 0$ 得 $a^2 - a = 3$ ，化简代数式可得 $(a-2)^2 + (a-1)(a+3) = 2(a^2 - a) + 1$ ，代入计算即可求解；

本题考查了实数的混合运算，代数式化简求值，掌握实数和整式的运算法则是解题的关键.

【详解】解：(1) 原式 $= 3 + 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - \sqrt{3}$

$$= 4 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3},$$

$$= 6;$$

$$(2) \because a^2 - a - 3 = 0,$$

$$\therefore a^2 - a = 3,$$

$$\therefore (a-2)^2 + (a-1)(a+3)$$

$$= a^2 - 4a + 4 + a^2 + 2a - 3,$$

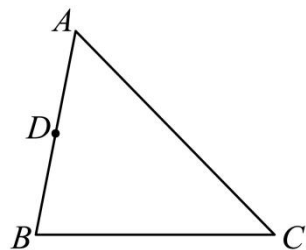
$$= 2a^2 - 2a + 1,$$

$$= 2(a^2 - a) + 1,$$

$$= 2 \times 3 + 1,$$

$$= 7.$$

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 中点.



(1) 求作： AC 的垂直平分线 l (要求：尺规作图，不写作法，保留作图痕迹)；

(2) 若 l 交 AC 于点 E ，连接 DE 并延长至点 F ，使 $EF = 2DE$ ，连接 BE ， CF 。补全图形，并证明四边形 $BCFE$ 是平行四边形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

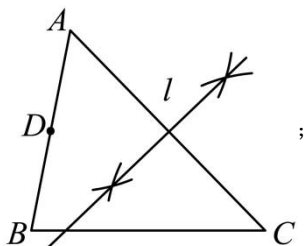
【分析】 本题考查了尺规作图，中位线的性质，平行四边形的判定.

(1) 利用尺规作图作出线段 AC 的垂直平分线 l 即可；

(2) 由 D, E 分别为 AB, AC 的中点, 根据中位线的性质, 得到 $DE \parallel BC$, $DE = \frac{1}{2}BC$, 结合 $EF = 2DE$, 得到 $EF = BC$, 即可证明结论成立.

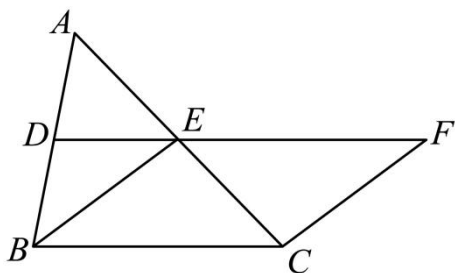
【小问 1 详解】

解: 直线 l 如图所示,



【小问 2 详解】

证明: 补全图形, 如图,



由 (1) 作图知, E 为 AC 的中点,

$\because D, E$ 分别为 AB, AC 的中点,

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because EF = 2DE, \text{ 即: } DE = \frac{1}{2}EF,$$

$$\therefore EF = BC,$$

$$\because EF \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCFE$ 是平行四边形.

21. 某校田径队为了调动队员体育训练的积极性, 计划根据成绩情况对队员进行奖励. 为确定一个适当的成績目标, 进行了体育成绩测试, 统计了每个队员的成绩, 数据如下:

收集数据	77	78	76	72	84	75	91	85	78	79
------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

	82	78	76	79	91	91	76	74	75	85
	75	91	80	77	75	75	87	85	76	77

整理、描述数据

成绩/分	72	74	75	76	77	78	79	80	82	84	85	87	91
人数/人	1	1	a	4	3	3	b	1	1	1	3	1	4

分析数据样本数据的平均数、众数、中位数如下表：

平均数	众数	中位数
80	c	78

解决问题

- (1) 表格中的 $a = \underline{\quad}$ ； $b = \underline{\quad}$ ； $c = \underline{\quad}$ ；
- (2) 分析平均数、众数、中位数这三个数据，如果想让一半左右的队员都能达到成绩目标，你认为成绩目标应定为 $\underline{\quad}$ 分，如果想确定一个较高的成绩目标，这个成绩目标应定为 $\underline{\quad}$ 分；
- (3) 学校要从 91 分的 A, B, C, D 四名队员中，随机抽取两名队员去市里参加系统培训。请利用画树状图法或列表法，求 A, B 两名队员恰好同时被选中的概率。

【答案】(1) 5；2；75

(2) 78；80 (3) A, B 两名队员恰好同时被选中的概率为 $\frac{1}{6}$ 。

【解析】

【分析】本题主要考查画树状图或列表法求随机事件的概率，统计表，众数和中位数的意义。

- (1) 根据统计表直接写出 a 和 b 的值，根据众数的意义可求解 c 的值；
- (2) 根据中位数和平均数的意义即可求解；
- (3) 画树状图或列表法把所有等可能结果表示出来，再运用概率公式即可求解。

【小问 1 详解】

解：根据收集的数据知 $a = 5$ ； $b = 2$ ；

出现最多的是 75 分，有 5 人，众数为 75 分，则 $c = 75$ ；

故答案为：5；2；75；

【小问 2 详解】

解：∵由统计图可知中位数为 78 分，

∴如果想让一半左右的队员都能达到成绩目标，成绩目标应定为 78 分，

如果想确定一个较高的目标，成绩目标应定为 80 分，

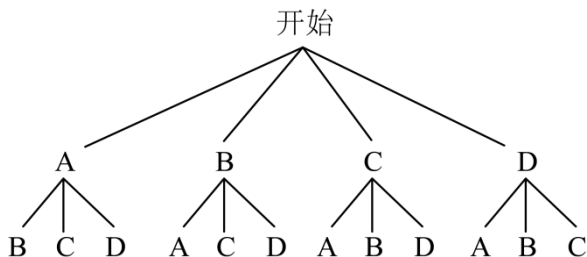
因为在样本的众数，中位数和平均数中，平均数最大，

可以估计，如果成绩目标定为 80 分，努力一下都能达到成绩目标.

故答案为：78；80；

【小问 3 详解】

解：画树状图表示所有等可能结果如图所示，



共有 12 种等可能结果， A, B 两名队员恰好同时被选中的情况有 2 种，

$\therefore A, B$ 两名队员恰好同时被选中的概率为 $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$,

答： A, B 两名队员恰好同时被选中的概率为 $\frac{1}{6}$.

22. 一段高速公路需要修复，现有甲、乙两个工程队参与施工，已知乙队平均每天修复公路比甲队平均每天修复公路多 3 千米，且甲队单独修复 60 千米公路所需要的时间与乙队单独修复 90 千米公路所需要的时间相等.

(1) 求甲、乙两队平均每天修复公路分别是多少千米；

(2) 为了保证交通安全，两队不能同时施工，要求甲队的工作时间不少于乙队工作时间的 2 倍，那么 15 天的工期，两队最多能修复公路多少千米？

【答案】 (1) 甲队平均每天修复公路 6 千米，则乙队平均每天修复公路 9 千米；

(2) 15 天的工期，两队最多能修复公路 105 千米.

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用，一元一次不等式的应用，一次函数的应用.

(1) 设甲队平均每天修复公路 x 千米，则乙队平均每天修复公路 $(x+3)$ 千米，根据“甲队单独修复 60 千米公路所需要的时间与乙队单独修复 90 千米公路所需要的时间相等”列分式方程求解即可；

(2) 设甲队的工作时间为 m 天，则乙队的工作时间为 $(15-m)$ 天，15 天的工期，两队能修复公路 w 千米，求得 w 关于 m 的一次函数，再利用“甲队的工作时间不少于乙队工作时间的 2 倍”求得 m 的范围，利用一次函数的性质求解即可.

【小问 1 详解】

解：设甲队平均每天修复公路 x 千米，则乙队平均每天修复公路 $(x+3)$ 千米，

$$\text{由题意得 } \frac{60}{x} = \frac{90}{x+3},$$

解得 $x=6$,

经检验， $x=6$ 是原方程的解，且符合题意，

$$x+3=9,$$

答：甲队平均每天修复公路 6 千米，则乙队平均每天修复公路 9 千米；

【小问 2 详解】

解：设甲队的工作时间为 m 天，则乙队的工作时间为 $(15-m)$ 天，15 天的工期，两队能修复公路 w 千米，

$$\text{由题意得 } w = 6m + 9(15-m) = -3m + 135,$$

$$m \geq 2(15-m),$$

解得 $m \geq 10$,

$$\therefore -3 < 0,$$

$\therefore w$ 随 m 的增加而减少，

$$\therefore \text{当 } m=10 \text{ 时，} w \text{ 有最大值，最大值为 } w = -3 \times 10 + 135 = 105,$$

答：15 天的工期，两队最多能修复公路 105 千米。

23. 在平面直角坐标系中，对于点 $M(x_1, y_1)$ ，给出如下定义：当点 $N(x_2, y_2)$ ，满足 $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ 时，称点 N 是点 M 的等和点。

(1) 已知点 $M(1, 3)$ ，在 $N_1(4, 2)$ ， $N_2(3, -1)$ ， $N_3(0, -2)$ 中，是点 M 等和点的有_____；

(2) 若点 $M(3, -2)$ 的等和点 N 在直线 $y = x + b$ 上，求 b 的值；

(3) 已知，双曲线 $y_1 = \frac{k}{x}$ 和直线 $y_2 = x - 2$ ，满足 $y_1 < y_2$ 的 x 取值范围是 $x > 4$ 或 $-2 < x < 0$ 。若点 P 在双曲线 $y_1 = \frac{k}{x}$ 上，点 P 的等和点 Q 在直线 $y_2 = x - 2$ 上，求点 P 的坐标。

【答案】(1) $N_1(4, 2)$ 和 $N_3(0, -2)$ ；

(2) $b = 5$ ；

(3) $(-4, -2)$ 或 $(2, 4)$ 。

【解析】

【分析】(1) 根据等和点的定义判断即可求解；

(2) 设点 N 的横坐标为 a ，根据等和点的定义得点 N 的纵坐标为 $3+a-(-2)=a+5$ ，即可得点 N 的坐标为 $(a, a+5)$ ，把点 N 的坐标代入 $y=x+b$ 即可求解；

(3) 由题意可得， $k>0$ ，双曲线分布在一、三象限内，设直线与双曲线的交点分别为点 A, B ，如图，由 $y_1 < y_2$ 时 x 的取值范围是 $x > 4$ 或 $-2 < x < 0$ ，可得点 A 的横坐标为 4 ，点 B 的横坐标为 -2 ，即得 $A(4, 2)$ ，得到反比例函数解析式为 $y_1 = \frac{8}{x}$ ，设 $P\left(m, \frac{8}{m}\right)$ ，点 Q 的横坐标为 n ，根据等和点的定义得 $Q\left(n, m+n-\frac{8}{m}\right)$ ，

代入 $y_2 = x-2$ 得 $m - \frac{8}{m} + 2 = 0$ ，解方程得 $m_1 = -4$ ， $m_2 = 2$ ，据此即可求解；

本题考查了点的坐标新定义运算，一次函数点的坐标特征，一次函数与反比例函数的交点问题，理解等和点的定义是解题的关键。

【小问 1 详解】

解：由 $M(1, 3)$ ， $N_1(4, 2)$ 得， $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 5$ ，

$\therefore$ 点 $N_1(4, 2)$ 是点 M 的等和点；

由 $M(1, 3)$ ， $N_2(3, -1)$ 得， $x_1 + x_2 = 4$ ， $y_1 + y_2 = 2$ ，

$\therefore x_1 + x_2 \neq y_1 + y_2$ ，

$\therefore N_2(3, -1)$ 不是点 M 的等和点；

由 $M(1, 3)$ ， $N_3(0, -2)$ 得， $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 1$ ，

$\therefore N_3(0, -2)$ 是点 M 的等和点；

故答案为： $N_1(4, 2)$ 和 $N_3(0, -2)$ ；

【小问 2 详解】

解：设点 N 的横坐标为 a ，

$\therefore$ 点 N 是点 $M(3, -2)$ 的等和点，

$\therefore$ 点 N 的纵坐标为 $3+a-(-2)=a+5$ ，

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(a, a+5)$ ，

$\therefore$ 点 N 在直线 $y=x+b$ 上，

$\therefore a+5=a+b$ ，

$$\therefore b = 5;$$

【小问3详解】

解：由题意可得， $k > 0$ ，双曲线分布在一、三象限内，设直线与双曲线的交点分别为点 A, B ，如图，由 $y_1 < y_2$

时 x 的取值范围是 $x > 4$ 或 $-2 < x < 0$ ，可得点 A 的横坐标为 4，点 B 的横坐标为 -2，

把 $x = 4$ 代入 $y = x - 2$ 得， $y = 4 - 2 = 2$ ，

$$\therefore A(4, 2),$$

把 $A(4, 2)$ 代入 $y_1 = \frac{k}{x}$ 得， $2 = \frac{k}{4}$ ，

$$\therefore k = 8,$$

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y_1 = \frac{8}{x}$ ，

设 $P\left(m, \frac{8}{m}\right)$ ，点 Q 的横坐标为 n ，

$\because$ 点 Q 是点 P 的等和点，

$\therefore$ 点 Q 的纵坐标为 $m + n - \frac{8}{m}$ ，

$$\therefore Q\left(n, m + n - \frac{8}{m}\right),$$

$\because$ 点 Q 在直线 $y_2 = x - 2$ 上，

$$\therefore m + n - \frac{8}{m} = n - 2,$$

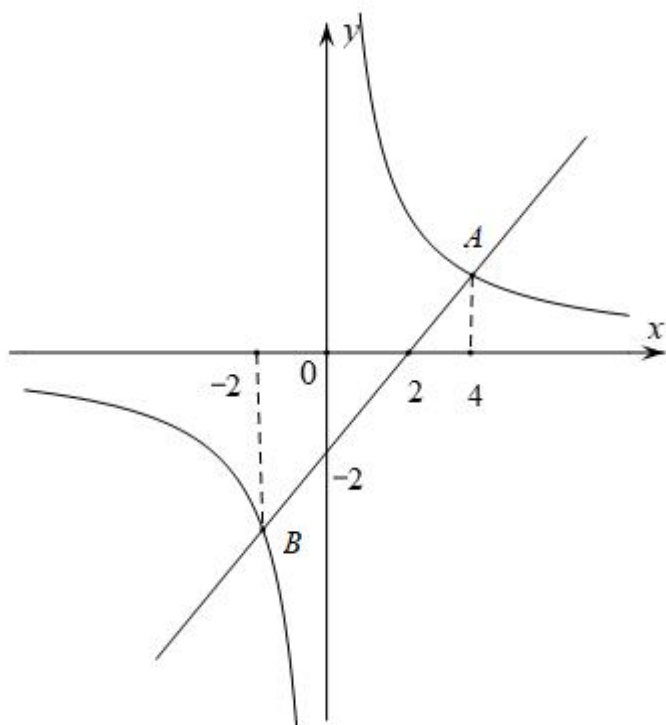
整理得， $m - \frac{8}{m} + 2 = 0$ ，

去分母得， $m^2 + 2m - 8 = 0$ ，

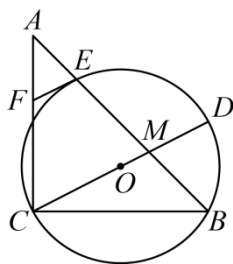
解得 $m_1 = -4$ ， $m_2 = 2$ ，

经检验， $m = -4, m = 2$ 是原方程的解，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-4, -2)$ 或 $(2, 4)$ 。



24. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, $\odot O$ 经过 B, C 两点, 与斜边 AB 交于点 E , 连接 CO 并延长交 AB 于点 M , 交 $\odot O$ 于点 D , 过点 E 作 $EF \parallel CD$, 交 AC 于点 F .



(1) 求证: EF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $BM = 4\sqrt{2}$, $\tan \angle BCD = \frac{1}{2}$, 求 OM 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $OM = \sqrt{5}$

【解析】

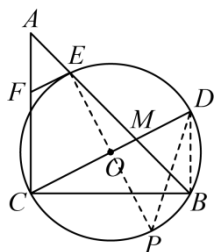
【分析】(1) 连接 OE , 延长 EO , 交 $\odot O$ 于点 P , 连接 PD, BD , 根据直径所对的圆周角是直角求出 $\angle DBE = 45^\circ$, 得 $\angle DPE = 45^\circ$, $\angle DOE = 90^\circ$, 由 $EF \parallel CD$ 可得 $\angle FED = \angle DOE = 90^\circ$, 从而可证明 EF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 由 $\tan \angle BCD = \frac{1}{2}$ 得 $\frac{DB}{BC} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{DB}{AC} = \frac{1}{2}$, 证明 $\triangle DBM \sim \triangle ACM$, 得 $\frac{BM}{AM} = \frac{DM}{CM} = \frac{DB}{AC} = \frac{1}{2}$, 由 $BM = 4\sqrt{2}$ 得 $AM = 8\sqrt{2}$, 故可得 $AB = 12\sqrt{2}$, 由勾股定理求出 $AC = BC = 12$, 得 $DB = 6$, 由勾股

定理 求出 $CD = 6\sqrt{5}$, $CO = DO = 3\sqrt{5}$, 根据 $\frac{DM}{CM} = \frac{1}{2}$ 求出 $DM = 2\sqrt{5}$, 进一步求出 $OM = OD - DM = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

【小问 1 详解】

证明: 连接 OE , 延长 EO , 交 $\odot O$ 于点 P , 连接 PD, BD , 如图,


$$\therefore AB = BC, \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle CBD = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle DBE = \angle CBD - \angle ABC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$
$$\therefore \angle EPD = \angle DBE = 45^\circ,$$
$$\therefore \angle DOE = 2\angle DPE = 2 \times 45^\circ = 90^\circ,$$
$$\therefore EF \parallel CD,$$
$$\therefore \angle FEO = \angle DOE = 90^\circ, \text{即 } OE \perp EF,$$

$\therefore OE$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle DBC = 90^\circ$, $\tan \angle BCD = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \frac{DB}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BC = AC,$$

$$\therefore \frac{DB}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle DMB = \angle CMA, \angle A = \angle DBM,$$

$$\therefore \triangle DBM \sim \triangle ACM,$$

$$\therefore \frac{BM}{AM} = \frac{DM}{CM} = \frac{DB}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BM = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore AM = 2BM = 8\sqrt{2},$$

$$\therefore AB = AM + BM = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2},$$

在等腰直角三角形 ABC 中, $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$$\therefore AC^2 + AC^2 = AB^2 = (12\sqrt{2})^2,$$

解得, $AC = 12$,

$$\therefore AC = BC = 12,$$

$$\therefore DB = \frac{1}{2}BC = 6,$$

在 $Rt\triangle BDC$ 中, $CD = \sqrt{BC^2 + DB^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$,

$$\therefore CO = DO = 3\sqrt{5},$$

$$\text{又 } \frac{DM}{CM} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CM = 2DM,$$

$$\therefore 2DM + DM = CD = 6\sqrt{5},$$

$$\therefore DM = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore OM = OD - DM = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

【点睛】 本题主要考查平行线的性质, 等腰直角三角形的判定与性质, 切线的判定, 圆周角定理, 勾股定理以及相似三角形的判定与性质, 正确作出辅助线构造圆周角是解答本题的关键.

25. 如图, 是某公园的一种水上娱乐项目. 数学兴趣小组对该项目中的数学问题进行了深入研究. 下面是该小组绘制的水滑道截面图, 如图 1, 人从点 A 处沿水滑道下滑至点 B 处腾空飞出后落入水池. 以地面所在的水平线为 x 轴, 过腾空点 B 与 x 轴垂直的直线为 y 轴, O 为坐标原点, 建立平面直角坐标系. 他们把水滑道和人腾空飞出后经过的路径都近似看作是抛物线的一部分. 根据测量和调查得到的数据和信息, 设计了以下三个问题, 请你解决.

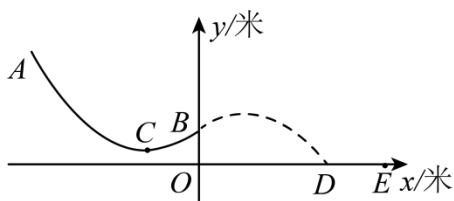


图1

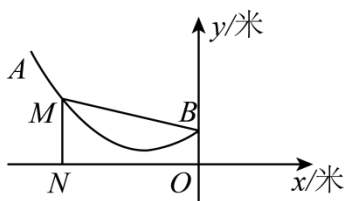


图2

(1) 如图 1, 点 B 与地面的距离为 2 米, 水滑道最低点 C 与地面的距离为 $\frac{7}{8}$ 米, 点 C 到点 B 的水平距离为 3 米, 则水滑道 ACB 所在抛物线的解析式为_____;

(2) 如图 1, 腾空点 B 与对面水池边缘的水平距离 $OE = 12$ 米, 人腾空后的落点 D 与水池边缘的安全距离 DE 不少于 3 米. 若某人腾空后的路径形成的抛物线 BD 恰好与抛物线 ACB 关于点 B 成中心对称.

①请直接写出此人腾空后的最大高度和抛物线 BD 的解析式;

②此人腾空飞出后的落点 D 是否在安全范围内? 请说明理由 (水面与地面之间的高度差忽略不计);

(3) 为消除安全隐患, 公园计划对水滑道进行加固. 如图 2, 水滑道已经有两条加固钢架, 一条是水滑道距地面 4 米的点 M 处竖直支撑的钢架 MN , 另一条是点 M 与点 B 之间连接支撑的钢架 BM . 现在需要在水滑道下方加固一条支撑钢架, 为了美观, 要求这条钢架与 BM 平行, 且与水滑道有唯一公共点, 一端固定在钢架 MN 上, 另一端固定在地面上. 请你计算出这条钢架的长度 (结果保留根号).

【答案】(1) $y = \frac{1}{8}(x+3)^2 + \frac{7}{8}$

(2) ①此人腾空后的最大高度是 $\frac{25}{8}$ 米, 解析式为 $y = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + \frac{25}{8}$; ②此人腾空飞出后的落点 D 在安全范围内, 理由见解析

(3) 这条钢架的长度为 $2\sqrt{17}$ 米

【解析】

【分析】(1) 根据题意得到水滑道 ACB 所在抛物线的顶点坐标为 $C\left(-3, \frac{7}{8}\right)$, 且过点 $B(0, 2)$, 设水滑道 ACB

所在抛物线的解析式为 $y = a(x+3)^2 + \frac{7}{8}$, 将 $B(0, 2)$ 代入, 计算求出 a 的值即可;

(2) ①根据题意可设人腾空后的路径形成的抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{8}(x+b)^2 + c$ ，由抛物线的顶点为 $\left(3, \frac{25}{8}\right)$ ，即可得出结果；②由①知人腾空后的路径形成的抛物线 BD 的解析式为： $y = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + \frac{25}{8}$ ，

令 $y=0$ ，求出 x 的值，即点 D 的坐标，即可得出结论；

(3) 根据题意可得 M 点的纵坐标为 4，令 $y = \frac{1}{8}(x+3)^2 + \frac{7}{8}$ 中 $y=4$ ，求出符合实际的 x 值，得到点 M 的坐标，求出 BM 所在直线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x + 2$ ，设这条钢架为 GH ，与 MN 交于点 G ，与地面交于 H ，根据这条钢架与 BM 平行，设该钢架所在直线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x + n$ ，由该钢架与水滑道有唯一公共点，

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + n \\ y = \frac{1}{8}(x+3)^2 + \frac{7}{8} \end{cases}, \text{根据方程组有唯一解, 求出 } n=0, \text{ 即该钢架所在直线的解析式为 } y = -\frac{1}{4}x,$$

点 H 与点 O 重合，根据 $GN = -\frac{1}{4} \times (-8) = 2$ ， $NO = 8$ ， $\angle GNO = 90^\circ$ ，利用勾股定理即可求解。

【小问 1 详解】

解：根据题意得到水滑道 ACB 所在抛物线的顶点坐标为 $C\left(-3, \frac{7}{8}\right)$ ，且过点 $B(0, 2)$ ，

设水滑道 ACB 所在抛物线的解析式为 $y = a(x+3)^2 + \frac{7}{8}$ ，

将 $B(0, 2)$ 代入，得： $2 = a(0+3)^2 + \frac{7}{8}$ ，即 $9a = \frac{9}{8}$ ，

$$\therefore a = \frac{1}{8},$$

$\therefore$ 水滑道 ACB 所在抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{8}(x+3)^2 + \frac{7}{8}$ ；

【小问 2 详解】

解：① $\because$ 人腾空后的路径形成的抛物线 BD 恰好与抛物线 ACB 关于点 B 成中心对称，

则设人腾空后的路径形成的抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{8}(x+b)^2 + c$ ，

$\therefore$ 人腾空后的路径形成的抛物线 BD 的顶点坐标与抛物线 ACB 的顶点坐标 $C\left(-3, \frac{7}{8}\right)$ 关于点 $B(0, 2)$ 成中心对称，

$$\therefore 0 \times 2 - (-3) = 3, 2 \times 2 - \frac{7}{8} = \frac{25}{8},$$

$\therefore$ 人腾空后的路径形成的抛物线 BD 的顶点坐标为 $\left(3, \frac{25}{8}\right)$ ，即 $b=3, c=\frac{25}{8}$ ，

$\therefore$ 此人腾空后的最大高度是 $\frac{25}{8}$ 米，人腾空后的路径形成的抛物线 BD 的解析式为： $y = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + \frac{25}{8}$ ；

由①知人腾空后的路径形成的抛物线 BD 的解析式为： $y = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + \frac{25}{8}$ ，

令 $y = 0$ ，则 $-\frac{1}{8}(x-3)^2 + \frac{25}{8} = 0$ ，即 $(x-3)^2 = 25$

$\therefore x = 8$ 或 $x = -2$ （舍去，不符合题意），

$\therefore$ 点 $D(8, 0)$ ，

$\therefore OD = 8$ ，

$\therefore OE = 12$ ，

$\therefore DE = OE - OD = 4 > 3$ ，

$\therefore$ 此人腾空飞出后的落点 D 在安全范围内；

【小问3详解】

解：根据题意可得 M 点的纵坐标为 4，

令 $y = \frac{1}{8}(x+3)^2 + \frac{7}{8} = 4$ ，即 $(x+3)^2 = 25$ ，

$\therefore x = 2$ （舍去，不符合题意）或 $x = -8$ ，

$\therefore M(-8, 4)$ ，

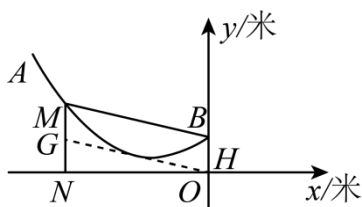
设 BM 所在直线的解析式为 $y = kx + b'$ ，

将 $M(-8, 4), B(0, 2)$ 代入得：
$$\begin{cases} 2 = b' \\ 4 = -8k + b' \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} b' = 2 \\ k = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\therefore BM$ 所在直线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x + 2$ ，

如图，设这条钢架为 GH ，与 MN 交于点 G ，与地面交于 H ，



$\therefore$ 这条钢架与 BM 平行，

$\therefore$ 设该钢架 GH 所在直线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x + n$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + n \\ y = \frac{1}{8}(x+3)^2 + \frac{7}{8} \end{cases}, \text{ 即 } -\frac{1}{4}x + n = \frac{1}{8}(x+3)^2 + \frac{7}{8},$$

整理得: $x^2 + 8x + 16 - 8n = 0$,

$\therefore$ 该钢架 GH 与水滑道有唯一公共点,

$$\therefore \Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times (16 - 8n) = 0,$$

$$\therefore n = 0 \text{ 即该钢架所在直线的解析式为 } y = -\frac{1}{4}x,$$

$\therefore$ 点 H 与点 O 重合,

$$\therefore GN = -\frac{1}{4} \times (-8) = 2, \quad NO = 8, \quad \angle GNO = 90^\circ,$$

$$\therefore GH = \sqrt{GN^2 + NO^2} = 2\sqrt{17},$$

$\therefore$ 这条钢架的长度为 $2\sqrt{17}$ 米.

【点睛】本题主要考查了二次函数的综合应用, 其中涉及点的坐标的求法, 二次函数的实际应用, 一次函数与二次函数交点问题, 勾股定理, 借助二次函数解决实际问题, 体现了数学建模思想.

26. 数学课上, 老师给出以下条件, 请同学们经过小组讨论, 提出探究问题. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 是 AC 上的一个动点, 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E , 延长 ED 交 BA 延长线于点 F .

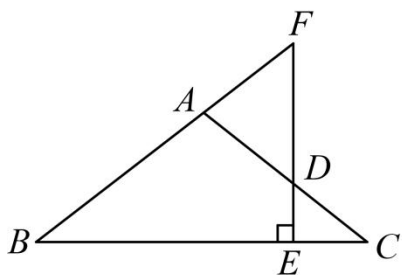


图 1

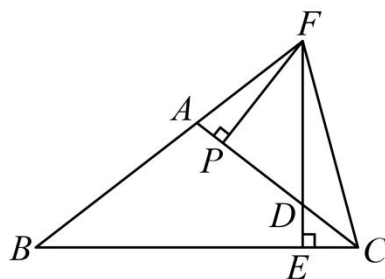


图 2

请你解决下面各组提出的问题:

(1) 求证: $AD = AF$;

(2) 探究 $\frac{DF}{DE}$ 与 $\frac{AD}{DC}$ 的关系;

某小组探究发现, 当 $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{3}$ 时, $\frac{DF}{DE} = \frac{2}{3}$; 当 $\frac{AD}{DC} = \frac{4}{5}$ 时, $\frac{DF}{DE} = \frac{8}{5}$.

请你继续探究:

①当 $\frac{AD}{DC} = \frac{7}{6}$ 时，直接写出 $\frac{DF}{DE}$ 的值；

②当 $\frac{AD}{DC} = \frac{m}{n}$ 时，猜想 $\frac{DF}{DE}$ 的值（用含 m, n 的式子表示），并证明；

(3) 拓展应用：在图 1 中，过点 F 作 $FP \perp AC$ ，垂足为点 P ，连接 CF ，得到图 2，当点 D 运动到使 $\angle ACF = \angle ACB$ 时，若 $\frac{AD}{DC} = \frac{m}{n}$ ，直接写出 $\frac{AP}{AD}$ 的值（用含 m, n 的式子表示）。

【答案】(1) 见解析 (2) ① $\frac{DF}{DE} = \frac{7}{3}$ ② $\frac{DF}{DE} = \frac{2m}{n}$ ，证明见解析

(3) $\frac{AP}{AD} = \frac{n}{2m}$

【解析】

【分析】(1) 等边对等角，得到 $\angle B = \angle C$ ，等角的余角的相等，结合对顶角相等，得到 $\angle F = \angle ADF$ ，即可得出结论；

(2) ①根据给定的信息，得到 $\frac{DF}{DE}$ 是 $\frac{AD}{DC}$ 的 2 倍，即可得出结果；

②猜想 $\frac{DF}{DE} = \frac{2m}{n}$ ，作 $AG \perp EF$ 于点 G ，证明 $\triangle AGD \sim \triangle CED$ ，得到 $\frac{GD}{DE} = \frac{AD}{DC} = \frac{m}{n}$ ，三线合一得到 $DF = 2DG$ ，即可得出结论；

(3) 过点 D 作 $DG \perp CF$ ，角平分线的性质，得到 $DG = DE$ ，推出 $\frac{DG}{DF} = \frac{n}{2m}$ ，等角的余角相等，得到 $\angle AFP = \angle DFG$ ，进而得到 $\sin \angle AFP = \sin \angle DFG$ ，得到 $\frac{AP}{AF} = \frac{DG}{DF} = \frac{n}{2m}$ ，根据 $AD = AF$ ，即可得出结果。

【小问 1 详解】

证明：∵ $AB = AC$ ，

∴ $\angle B = \angle C$ ，

∵ $DE \perp BC$ ，

∴ $\angle BEF = \angle CED = 90^\circ$ ，

∴ $\angle F = 90^\circ - \angle B$ ， $\angle CDE = 90^\circ - \angle C$ ，且 $\angle CDE = \angle ADF$ ，

∴ $\angle F = \angle ADF$ ，

∴ $AD = AF$ ；

【小问 2 详解】

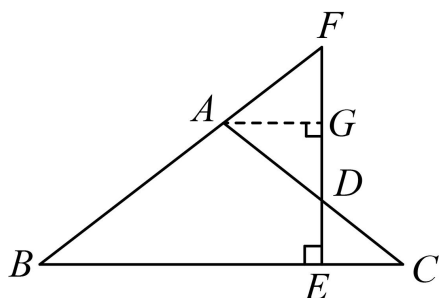
解：①当 $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{3}$ 时， $\frac{DF}{DE} = \frac{2}{3}$ ；当 $\frac{AD}{DC} = \frac{4}{5}$ 时， $\frac{DF}{DE} = \frac{8}{5}$ ，

∴ 总结规律得： $\frac{DF}{DE}$ 是 $\frac{AD}{DC}$ 的 2 倍，

$$\therefore \text{当 } \frac{AD}{DC} = \frac{7}{6} \text{ 时, } \frac{DF}{DE} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{AD}{DC} = \frac{m}{n} \text{ 时, 猜想 } \frac{DF}{DE} = \frac{2m}{n},$$

证明：作 $AG \perp EF$ 于点 G ，



$$\because DE \perp BC,$$

$$\therefore AG \parallel CE,$$

$$\therefore \triangle AGD \sim \triangle CED,$$

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{m}{n},$$

$$\therefore \frac{GD}{DE} = \frac{AD}{DC} = \frac{m}{n},$$

由 (1) 知 $AD = AF$ ，又 $AG \perp EF$ ，

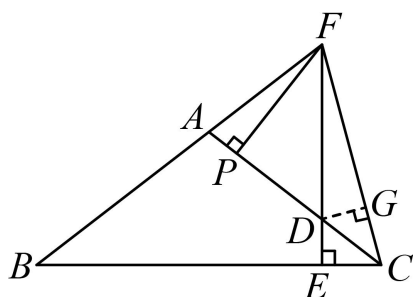
$$\therefore DG = FG, \text{ 即 } DF = 2DG,$$

$$\therefore \frac{DF}{DE} = \frac{2GD}{DE} = \frac{2m}{n};$$

【小问 3 详解】

$$\frac{AP}{AD} = \frac{n}{2m}, \text{ 理由如下:}$$

过点 D 作 $DG \perp CF$ ，



$$\because \angle ACF = \angle ACB, \quad DE \perp CE,$$

$$\therefore DG = DE,$$

$$\text{由 (2) 知, 当 } \frac{AD}{DC} = \frac{m}{n} \text{ 时, } \frac{DF}{DE} = \frac{2m}{n},$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{n}{2m},$$

$$\therefore \frac{DG}{DF} = \frac{n}{2m},$$

$$\therefore PF \perp AC,$$

$$\therefore \angle ACF + \angle CFP = 90^\circ,$$

$$\therefore FE \perp BC,$$

$$\therefore \angle B + \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle B,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACF,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle CFP,$$

$$\therefore \angle AFD - \angle PFD = \angle CFP - \angle PFD,$$

$$\therefore \angle AFP = \angle DFG,$$

$$\therefore \sin \angle AFP = \sin \angle DFG,$$

$$\therefore \frac{AP}{AF} = \frac{DG}{DF} = \frac{n}{2m},$$

由 (1) 知 $AD = AF$,

$$\therefore \frac{AP}{AD} = \frac{AP}{AF} = \frac{n}{2m}.$$

【点睛】 本题考查等腰三角形的判定和性质，角平分线的性质，相似三角形的判定和性质，解直角三角形等知识点，熟练掌握相关知识点，添加辅助线构造特殊图形和相似三角形，是解题的关键.