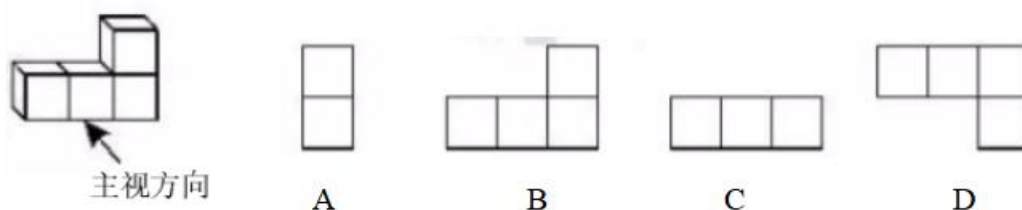


2019 年广东省初中学业水平考试数学

- 说明: 1. 全卷共 4 页, 满分为 120 分, 考试用时为 100 分钟.
2. 答卷前, 考生务必用黑色字迹的签字笔或钢笔在答题卡填写自己的准考证号、姓名、考场号、座位号. 用 2B 铅笔把对应该号码的标号涂黑.
3. 选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 答案不能答在试题上.
4. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.
5. 考生务必保持答题卡的整洁. 考试结束时, 将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题 (本大题 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分) 在每小题列出的四个选项中, 只有一个正确的, 请把答题卡上对应题目所选的选项涂黑.

1. -2 的绝对值是
- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. ± 2
2. 某网店 2019 年母亲节这天的营业额为 221 000 元, 将数 221 000 用科学记数法表示为
- A. 2.21×10^6 B. 2.21×10^5 C. 221×10^3 D. 0.221×10^6
3. 如图, 由 4 个相同正方体组合而成的几何体, 它的左视图是



4. 下列计算正确的是

- A. $b^6 \div b^3 = b^2$ B. $b^3 \cdot b^3 = b^9$ C. $a^2 + a^2 = 2a^2$ D. $(a^3)^3 = a^6$

5. 下列四个银行标志中，既是中心对称图形，又是轴对称图形的是

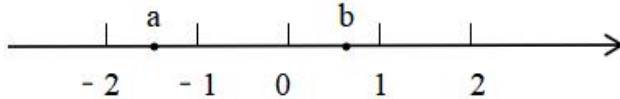


6. 数据 3、3、5、8、11 的中位数是

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

7. 实数 a 、 b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列式子成立的是

- A. $a > b$ B. $|a| < |b|$ C. $a + b > 0$ D. $\frac{a}{b} < 0$



8. 化简 $\sqrt{4^2}$ 的结果是

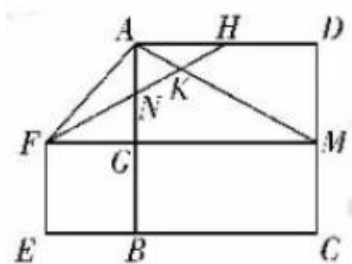
- A. -4 B. 4 C. ± 4 D. 2

9. 已知 x_1 、 x_2 是一元二次方程 $x^2 - 2x = 0$ 的两个实数根，下列结论错误的是

- A. $x_1 \neq x_2$ B. $x_1^2 - 2x_1 = 0$ C. $x_1 + x_2 = 2$ D. $x_1 \cdot x_2 = 2$

10. 如图，正方形 ABCD 的边长为 4，延长 CB 至 E 使 EB=2，以 EB 为边在上方作正方形 EFGB，延长 FG 交 DC 于 M，连接 AM、AF，H 为 AD 的中点，连接 FH 分别与 AB、AM 交于点 N、K。则下列结论：① $\triangle ANH \cong \triangle GNF$ ；② $\angle AFN = \angle HFG$ ；③ $FN = 2NK$ ；④ $S_{\triangle AFN} : S_{\triangle ADM} = 1:4$ 。其中正确的结论有

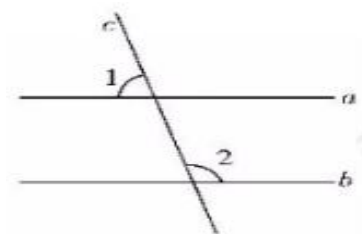
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



二、填空题（本大题 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）请将下列各题的正确答案填写在答题卡相应的位置上.

11. 计算 $2019^0 + (\frac{1}{3})^{-1} =$ _____.

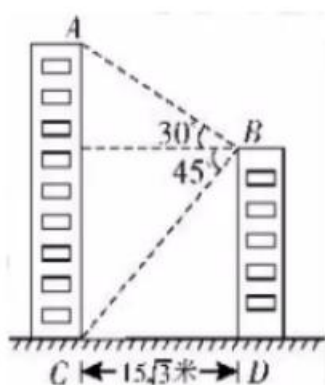
12. 如图，已知 $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 75^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ _____.



13. 一个多边形的内角和是 1080° ，这个多边形的边数是_____.

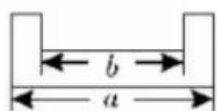
14. 已知 $x = 2y + 3$ ，则代数式 $4x - 8y + 9$ 的值是_____.

15. 如图，某校教学楼 AC 与实验楼 BD 的水平间距 $CD = 15\sqrt{3}$ 米，在实验楼的顶部 B 点测得教学楼顶部 A 点的仰角是 30° ，底部 C 点的俯角是 45° ，则教学楼 AC 的高度是_____米（结果保留根号）.

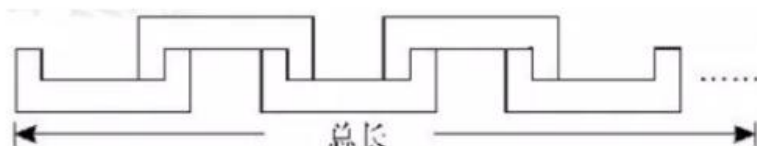


16. 如题 16-1 图所示的图形是一个轴对称图形，且每个角都是直角，长度如图所示，小明

按题 16-2 图所示方法玩拼图游戏，两两相扣，相互间不留空隙，那么小明用 9 个这样的图形（题 16-1 图）拼出来的图形的总长度是_____（结果用含 a、b 代数式表示）。



题 16-1 图



题 16-2 图

三、解答题（一）（本大题 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

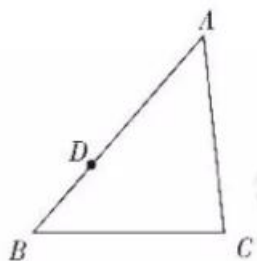
17. 解不等式组：
$$\begin{cases} x - 1 > 2 & \text{①} \\ 2(x + 1) > 4 & \text{②} \end{cases}$$

18. 先化简，再求值： $\left(\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x-2} \right) \div \frac{x^2 - x}{x^2 - 4}$ ，其中 $x = \sqrt{2}$ 。

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 AB 边上的一点。

(1) 请用尺规作图法，在 $\triangle ABC$ 内，求作 $\angle ADE$ ，使 $\angle ADE = \angle B$ ，DE 交 AC 于 E；（不要求写作法，保留作图痕迹）

(2) 在 (1) 的条件下，若 $\frac{AD}{DB} = 2$ ，求 $\frac{AE}{EC}$ 的值。



四、解答题（二）（本大题 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

20. 为了解某校九年级全体男生 1000 米跑步的成绩，随机抽取了部分男生进行测试，并将

测试成绩分为 A、B、C、D 四个等级，绘制如下不完整的统计图表，如题 20 图表所示，根据图表信息解答下列问题：



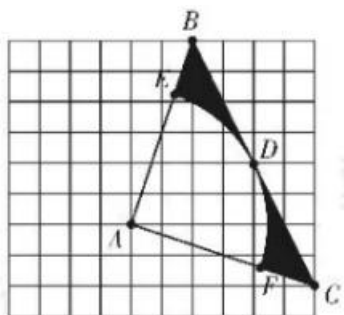
题 20 图表

- (1) $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$, 扇形图中表示 C 的圆心角的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 度;

(2) 甲、乙、丙是 A 等级中的三名学生，学校决定从这三名学生中随机抽取两名介绍体育锻炼经验，用列表法或画树状图法，求同时抽到甲、乙两名学生的概率.
21. 某校为了开展“阳光体育运动”，计划购买篮球、足球共 60 个，已知每个篮球的价格为 70 元，每个足球的价格为 80 元.
- (1) 若购买这两类球的总金额为 4600 元，篮球、足球各买了多少个？

(2) 若购买篮球的总金额不超过购买足球的总金额，最多可购买多少个篮球？
22. 在如图所示的网格中，每个正方形的边长为 1，每个小正方形的顶点叫格点， $\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上，以点 A 为圆心的 $\widehat{EF}$ 与 BC 相切于点 D，分别交 AB、AC 于点 E、F.
- (1) 求 $\triangle ABC$ 三边的长;

(2) 求图中由线段 EB、BC、CF 及 $\widehat{FE}$ 所围成的阴影部分的面积.



五、解答题 (三) (本大题 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

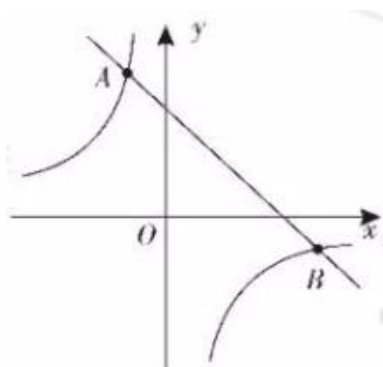
23. 如图, 一次函数 $y=k_1x+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 A、B 两点, 其中点

A 的坐标为 $(-1, 4)$, 点 B 的坐标为 $(4, n)$.

(1) 根据函数图象, 直接写出满足 $k_1x+b > \frac{k_2}{x}$ 的 x 的取值范围;

(2) 求这两个函数的表达式;

(3) 点 P 在线段 AB 上, 且 $S_{\triangle AOP} : S_{\triangle BOP} = 1 : 2$, 求点 P 的坐标.

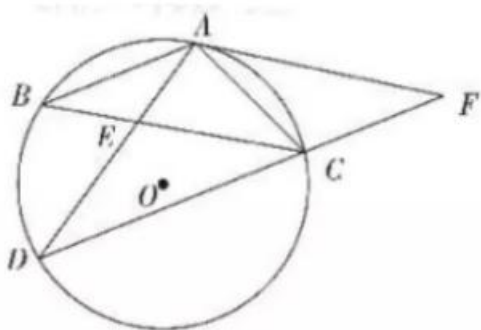


24. 如题 24-1 图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 过点 C 作 $\angle BCD = \angle ACB$ 交 $\odot O$ 于点 D, 连接 AD 交 BC 于点 E, 延长 DC 至点 F, 使 $CF=AC$, 连接 AF.

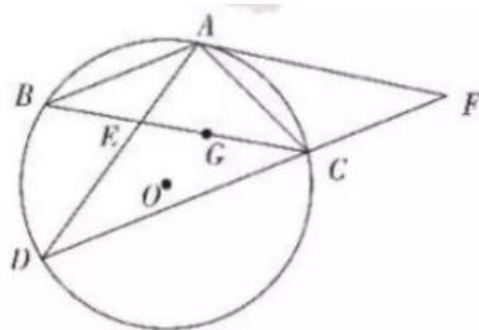
(1) 求证: $ED=EC$;

(2) 求证: AF 是 $\odot O$ 的切线;

(3) 如题 24-2 图, 若点 G 是 $\triangle ACD$ 的内心, $BC \cdot BE=25$, 求 BG 的长.



题 24-1 图



题 24-2 图

25. 如题 25-1 图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}x - \frac{7\sqrt{3}}{8}$ 与 x 轴交于点 A、B (点 A 在点 B 右侧), 点 D 为抛物线的顶点. 点 C 在 y 轴的正半轴上, CD 交 x 轴于点 F, $\triangle CAD$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle CFE$, 点 A 恰好旋转到点 F, 连接 BE.

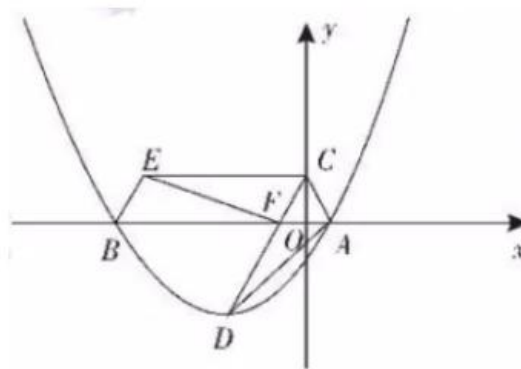
(1) 求点 A、B、D 的坐标;

(2) 求证: 四边形 BFCE 是平行四边形;

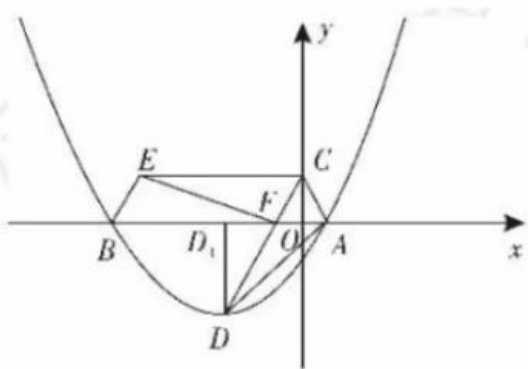
(3) 如题 25-2 图, 过顶点 D 作 $DD_1 \perp x$ 轴于点 D_1 , 点 P 是抛物线上一动点, 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴, 点 M 为垂足, 使得 $\triangle PAM$ 与 $\triangle DD_1A$ 相似 (不含全等).

① 求出一个满足以上条件的点 P 的横坐标;

② 直接回答这样的点 P 共有几个?



题 25-1 图



题 25-2 图

解析卷

1. -2 的绝对值是

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. ± 2

【答案】A

【解析】正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数， 0 的绝对值是 0 .

【考点】绝对值

2. 某网店 2019 年母亲节这天的营业额为 221 000 元，将数 221 000 用科学记数法表示为

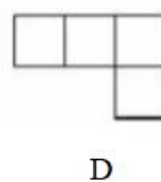
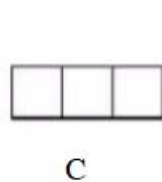
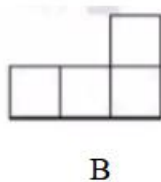
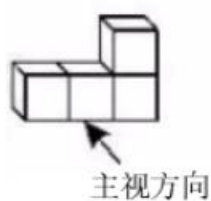
- A. 2.21×10^6 B. 2.21×10^5 C. 221×10^3 D. 0.221×10^6

【答案】B

【解析】 $a \times 10^n$ 形式，其中 $0 \leq |a| < 10$.

【考点】科学记数法

3. 如图，由 4 个相同正方体组合而成的几何体，它的左视图是



【答案】A

【解析】从左边看，得出左视图.

【考点】简单组合体的三视图

4. 下列计算正确的是

A. $b^6 \div b^3 = b^2$

B. $b^3 \cdot b^3 = b^9$

C. $a^2 + a^2 = 2a^2$

D. $(a^3)^3 = a^6$

【答案】C

【解析】合并同类项：字母部分不变，系数相加减.

【考点】同底数幂的乘除，合并同类项，幂的乘方

5. 下列四个银行标志中，既是中心对称图形，又是轴对称图形的是



【答案】C

【解析】轴对称与中心对称的概念.

【考点】轴对称与中心对称

6. 数据 3、3、5、8、11 的中位数是

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

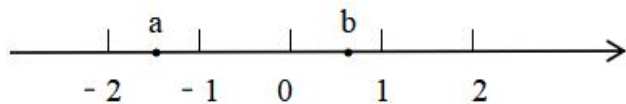
【答案】C

【解析】按顺序排列，中间的数或者中间两个数的平均数.

【考点】中位数的概念

7. 实数 a 、 b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列式子成立的是

- A. $a > b$ B. $|a| < |b|$ C. $a + b > 0$ D. $\frac{a}{b} < 0$



【答案】D

【解析】 a 是负数， b 是正数，异号两数相乘或相除都得负.

【考点】数与代数式的大小比较，数轴的认识

8. 化简 $\sqrt{4^2}$ 的结果是

- A. -4 B. 4 C. ± 4 D. 2

【答案】B

【解析】公式 $\sqrt{a^2} = |a|$.

【考点】二次根式

9. 已知 x_1 、 x_2 是一元二次方程 $x^2 - 2x = 0$ 的两个实数根，下列结论错误的是

- A. $x_1 \neq x_2$ B. $x_1^2 - 2x_1 = 0$ C. $x_1 + x_2 = 2$ D. $x_1 \cdot x_2 = 2$

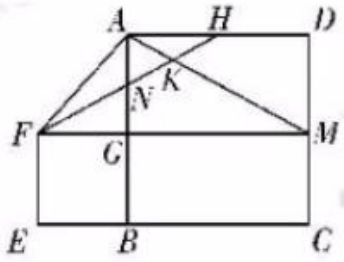
【答案】D

【解析】因式分解 $x(x-2) = 0$ ，解得两个根分别为 0 和 2，代入选项排除法.

【考点】一元二次方程的解的概念和计算

10. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，延长 CB 至 E 使 $EB=2$ ，以 EB 为边在上方作正方形 $EFGB$ ，延长 FG 交 DC 于 M ，连接 AM 、 AF ， H 为 AD 的中点，连接 FH 分别与 AB 、 AM 交于点 N 、 K 。则下列结论：① $\triangle ANH \cong \triangle GNF$ ；② $\angle AFN = \angle HFG$ ；③ $FN = 2NK$ ；④ $S_{\triangle AFN} : S_{\triangle ADM} = 1:4$ 。其中正确的结论有

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个



【答案】C

【解析】 $AH=GF=2$ ， $\angle ANH=\angle GNF$ ， $\angle AHN=\angle GFN$ ， $\triangle ANH\cong\triangle GNF$ (AAS)，①正确；
由①得 $AN=GN=1$ ， $\therefore NG\perp FG$ ， NA 不垂直于 AF ， $\therefore FN$ 不是 $\angle AFG$ 的角平分线， $\therefore \angle AFN\neq\angle HFG$ ，②错误；由 $\triangle AKH\sim\triangle MKF$ ，且 $AH:MF=1:3$ ， $\therefore KH:KF=1:3$ ，又 $\therefore FN=HN$ ，
 $\therefore K$ 为 NH 的中点，即 $FN=2NK$ ，③正确； $S_{\triangle AFN}=\frac{1}{2}AN\cdot FG=1$ ， $S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}DM\cdot AD=4$ ，
 $\therefore S_{\triangle AFN}:S_{\triangle ADM}=1:4$ ，④正确.

【考点】正方形的性质，平行线的应用，角平分线的性质，全等三角形，相似三角形，三角形的面积

二、填空题（本大题 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）请将下列各题的正确答案填写在答题卡相应的位置上.

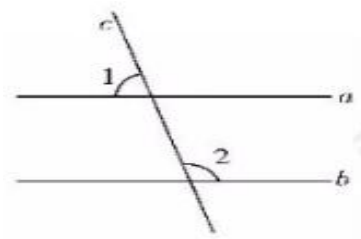
11. 计算 $2019^0+(\frac{1}{3})^{-1}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】4

【解析】 $1+3=4$

【考点】零指数幂和负指数幂的运算

12. 如图，已知 $a\parallel b$ ， $\angle 1=75^\circ$ ，则 $\angle 2=\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 105°

【解析】 $180^{\circ} - 75^{\circ} = 105^{\circ}$.

【考点】 平行线的性质

13. 一个多边形的内角和是 1080° ，这个多边形的边数是_____.

【答案】 8

【解析】 $(n-2) \times 180^{\circ} = 1080^{\circ}$ ，解得 $n=8$.

【考点】 n 边形的内角和 $= (n-2) \times 180^{\circ}$

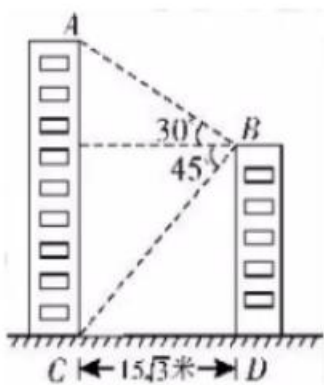
14. 已知 $x=2y+3$ ，则代数式 $4x-8y+9$ 的值是_____.

【答案】 21

【解析】 由已知条件得 $x-2y=3$ ，原式 $= 4(x-2y) + 9 = 12 + 9 = 21$.

【考点】 代数式的整体思想

15. 如图，某校教学楼 AC 与实验楼 BD 的水平间距 $CD=15\sqrt{3}$ 米，在实验楼的顶部 B 点测得教学楼顶部 A 点的仰角是 30° ，底部 C 点的俯角是 45° ，则教学楼 AC 的高度是_____米（结果保留根号）.

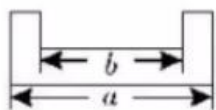


【答案】 $15+15\sqrt{3}$

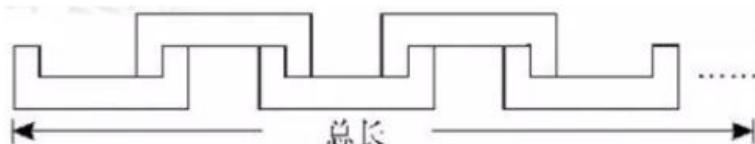
【解析】 $AC=CD \cdot \tan 30^\circ + CD \cdot \tan 45^\circ = 15+15\sqrt{3}$.

【考点】 解直角三角形，特殊三角函数值

16. 如题 16-1 图所示的图形是一个轴对称图形，且每个角都是直角，长度如图所示，小明按题 16-2 图所示方法玩拼图游戏，两两相扣，相互间不留空隙，那么小明用 9 个这样的图形（题 16-1 图）拼出来的图形的总长度是_____（结果用含 a、b 代数式表示）.



题 16-1 图



题 16-2 图

【答案】 $a+8b$

【解析】 每个接触部分的相扣长度为 $(a-b)$ ，则下方空余部分的长度为 $a-2(a-b)=2b-a$ ，3 个拼出来的图形有 1 段空余长度，总长度 $=2a+(2b-a)=a+2b$ ；5 个拼出来的图形有 2 段空余长度，总长度 $=3a+2(2b-a)=a+4b$ ；7 个拼出来的图形有 3 段空余长度，总长度 $=4a+3(2b-a)=a+6b$ ；9 个拼出来的图形有 4 段空余长度，总长度 $=5a+4(2b-a)=a+8b$.

【考点】 规律探究题型

三、解答题（一）（本大题 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

17. 解不等式组:
$$\begin{cases} x-1 > 2 & \text{①} \\ 2(x+1) > 4 & \text{②} \end{cases}$$

【答案】

解: 由①得 $x > 3$, 由②得 $x > 1$,

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $x > 3$.

【考点】解一元一次不等式组

18. 先化简, 再求值: $\left(\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x-2}\right) \div \frac{x^2-x}{x^2-4}$, 其中 $x=\sqrt{2}$.

【答案】

解: 原式 $= \frac{x-1}{x-2} \div \frac{x^2-x}{x^2-4}$

$$= \frac{x-1}{x-2} \times \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x+2}{x}$$

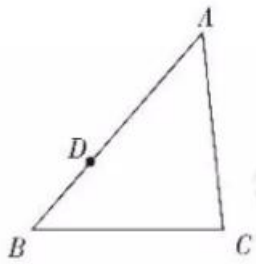
当 $x=\sqrt{2}$, 原式 $= \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$.

【考点】分式的化简求值, 包括通分、约分、因式分解、二次根式计算

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AB 边上的一点.

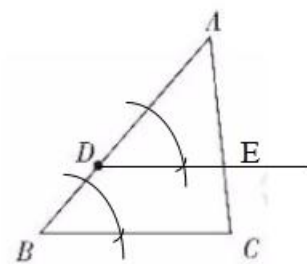
(1) 请用尺规作图法, 在 $\triangle ABC$ 内, 求作 $\angle ADE$. 使 $\angle ADE = \angle B$, DE 交 AC 于 E; (**不要**求写作法, 保留作图痕迹)

(2) 在 (1) 的条件下, 若 $\frac{AD}{DB} = 2$, 求 $\frac{AE}{EC}$ 的值.



【答案】

解：（1）如图所示， $\angle ADE$ 为所求.



(2) $\because \angle ADE = \angle B$

$\therefore DE \parallel BC$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

$$\because \frac{AD}{DB} = 2$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = 2$$

【考点】尺规作图之作一个角等于已知角，平行线分线段成比例

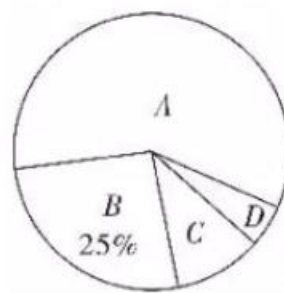
四、解答题（二）（本大题 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

20. 为了解某校九年级全体男生 1000 米跑步的成绩，随机抽取了部分男生进行测试，并将测试成绩分为 A、B、C、D 四个等级，绘制如下不完整的统计图表，如题 20 图表所示，根据图表信息解答下列问题：

成绩等级频数分布表

成绩等级	频数
A	24
B	10
C	x
D	2
合计	y

成绩等级频扇形统计图



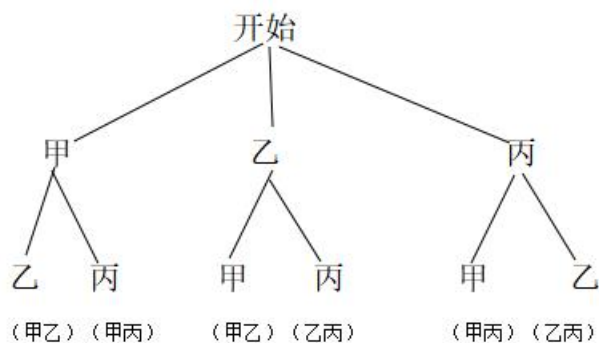
题 20 图表

- (1) $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$, 扇形图中表示 C 的圆心角的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 度;
- (2) 甲、乙、丙是 A 等级中的三名学生, 学校决定从这三名学生中随机抽取两名介绍体育锻炼经验, 用列表法或画树状图法, 求同时抽到甲、乙两名学生的概率.

【答案】

解: (1) $y = 10 \div 25\% = 40$, $x = 40 - 24 - 10 - 2 = 4$, C 的圆心角 $= 360^\circ \times \frac{4}{40} = 36^\circ$

(2) 画树状图如下:



一共有 6 种可能结果, 每种结果出现的可能性相同, 其中同时抽到甲、乙的结果有 2 种

$$\therefore P_{(\text{甲乙})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

答: 同时抽到甲、乙两名学生的概率为 $\frac{1}{3}$.

【考点】 数据收集与分析, 概率的计算

21. 某校为了开展“阳光体育运动”，计划购买篮球、足球共 60 个，已知每个篮球的价格为 70 元，每个足球的价格为 80 元.

(1) 若购买这两类球的总金额为 4600 元，篮球、足球各买了多少个？

(2) 若购买篮球的总金额不超过购买足球的总金额，最多可购买多少个篮球？

【答案】

解： (1) 设购买篮球 x 个，则足球 $(60-x)$ 个.

由题意得 $70x+80(60-x)=4600$ ，解得 $x=20$

则 $60-x=60-20=40$.

答：篮球买了 20 个，足球买了 40 个.

(2) 设购买了篮球 y 个.

由题意得 $70y \leq 80(60-x)$ ，解得 $y \leq 32$

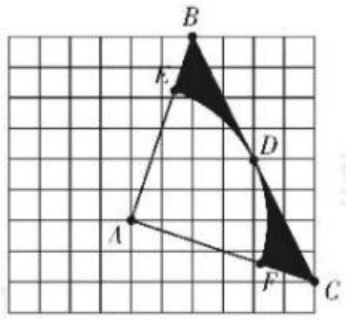
答：最多可购买篮球 32 个.

【考点】一元一次方程的应用，一元一次不等式的应用

22. 在如图所示的网格中，每个正方形的边长为 1，每个小正方形的顶点叫格点， $\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上，以点 A 为圆心的 $\widehat{EF}$ 与 BC 相切于点 D，分别交 AB、AC 于点 E、F.

(1) 求 $\triangle ABC$ 三边的长；

(2) 求图中由线段 EB、BC、CF 及 $\widehat{FE}$ 所围成的阴影部分的面积.



【答案】

解：（1）由题意可知， $AB = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$ ， $AC = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$ ，

$$BC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

（2）连接 AD

由（1）可知， $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ， $AB = AC$

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ ，且 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形

$\therefore$ 以点 A 为圆心的 $\widehat{EF}$ 与 BC 相切于点 D

$\therefore AD \perp BC$

$$\therefore AD = \frac{1}{2} BC = 2\sqrt{5} \quad (\text{或用等面积法 } AB \cdot AC = BC \cdot AD \text{ 求出 } AD \text{ 长度})$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形 EAF}}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} = 20$$

$$S_{\text{扇形 EAF}} = \frac{1}{4} \pi (2\sqrt{5})^2 = 5\pi$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = 20 - 5\pi$$

【考点】勾股定理及其逆定理，阴影面积的计算包括三角形和扇形的面积公式

五、解答题（三）（本大题 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

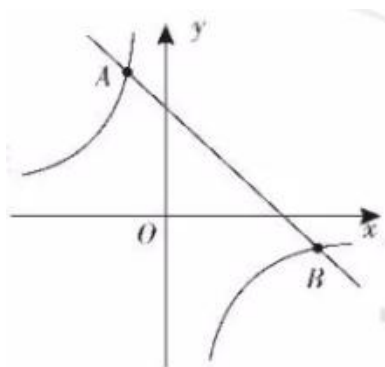
23. 如图，一次函数 $y=k_1x+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 A、B 两点，其中点

A 的坐标为 $(-1, 4)$ ，点 B 的坐标为 $(4, n)$ 。

(1) 根据函数图象，直接写出满足 $k_1x+b>\frac{k_2}{x}$ 的 x 的取值范围；

(2) 求这两个函数的表达式；

(3) 点 P 在线段 AB 上，且 $S_{\triangle AOP}:S_{\triangle BOP}=1:2$ ，求点 P 的坐标。



【答案】

解： (1) $x < -1$ 或 $0 < x < 4$

(2) $\because$ 反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 图象过点 A $(-1, 4)$

$$\therefore 4 = \frac{k_2}{-1}, \text{ 解得 } k_2 = -4$$

$\therefore$ 反比例函数表达式为 $y = -\frac{4}{x}$

$\because$ 反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 图象过点 B $(4, n)$

$$\therefore n = -\frac{4}{4} = -1, \therefore B(4, -1)$$

$\therefore$ 一次函数 $y=k_1x+b$ 图象过 A (-1, 4) 和 B (4, -1)

$$\therefore \begin{cases} 4 = -k_1 + b \\ -1 = 4k_1 + b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_1 = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数表达式为 $y = -x + 3$

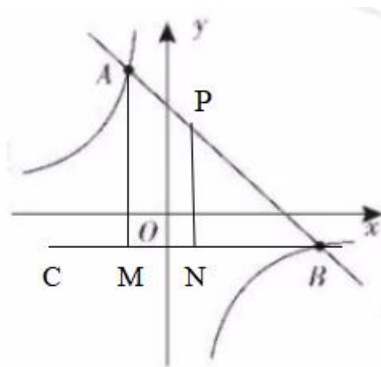
(3) $\therefore$ P 在线段 AB 上, 设 P 点坐标为 (a, -a+3)

$\therefore \triangle AOP$ 和 $\triangle BOP$ 的高相同

$$\therefore S_{\triangle AOP} : S_{\triangle BOP} = 1 : 2$$

$$\therefore AP : BP = 1 : 2$$

过点 B 作 $BC \parallel x$ 轴, 过点 A、P 分别作 $AM \perp BC$, $PN \perp BC$ 交于点 M、N



$\therefore AM \perp BC$, $PN \perp BC$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{MN}{BN}$$

$$\therefore MN = a+1, BN = 4-a$$

$$\therefore \frac{a+1}{4-a} = \frac{1}{2}, \text{解得 } a = \frac{2}{3}$$

$$\therefore -a+3 = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \text{点 P 坐标为 } \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

(或用两点之间的距离公式 $AP=\sqrt{(a+1)^2+(-a+3-4)^2}$, $BP=\sqrt{(4-a)^2+(-1+a-3)^2}$,
由 $\frac{AP}{BP}=\frac{1}{2}$ 解得 $a_1=\frac{2}{3}$, $a_2=-6$ 舍去)

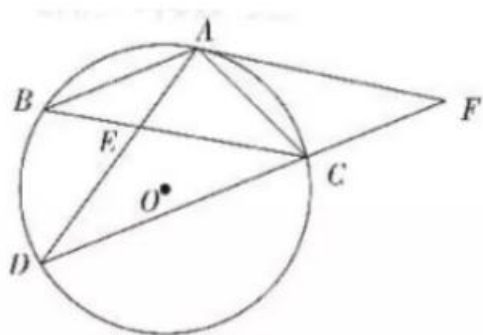
【考点】一次函数和反比例函数的数形结合，会比较函数之间的大小关系，会求函数的解析式，同高的三角形的面积比与底边比的关系

24. 如题 24-1 图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，过点 C 作 $\angle BCD=\angle ACB$ 交 $\odot O$ 于点 D ，连接 AD 交 BC 于点 E ，延长 DC 至点 F ，使 $CF=AC$ ，连接 AF 。

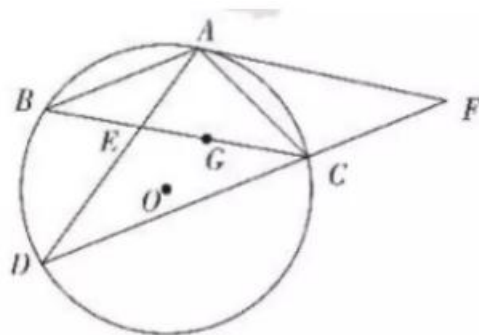
(1) 求证： $ED=EC$ ；

(2) 求证： AF 是 $\odot O$ 的切线；

(3) 如题 24-2 图，若点 G 是 $\triangle ACD$ 的内心， $BC \cdot BE=25$ ，求 BG 的长。



题 24-1 图



题 24-2 图

【答案】

(1) 证明： $\because AB=AC$

$\therefore \angle B=\angle ACB$

$\because \angle BCD=\angle ACB$

$\therefore \angle B=\angle BCD$

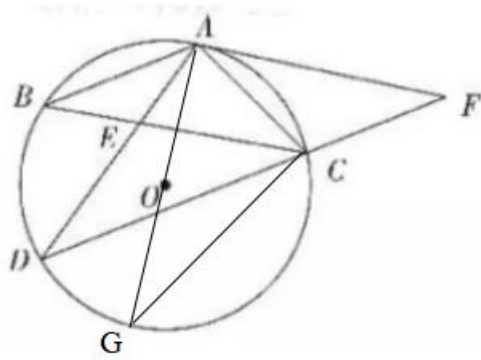
$\therefore \widehat{AC}=\widehat{AC}$

$\therefore \angle B=\angle D$

$$\therefore \angle BCD = \angle D$$

$$\therefore ED = EC$$

(2) 证明:



题 24-1 图

连接 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 G, 连接 CG

由 (1) 得 $\angle B = \angle BCD$

$$\therefore AB \parallel DF$$

$$\because AB = AC, CF = AC$$

$$\therefore AB = CF$$

$\therefore$ 四边形 ABCF 是平行四边形

$$\therefore \angle CAF = \angle ACB$$

$\because$ AG 为直径

$$\therefore \angle ACG = 90^\circ, \text{ 即 } \angle G + \angle GAC = 90^\circ$$

$$\because \angle G = \angle B, \angle B = \angle ACB$$

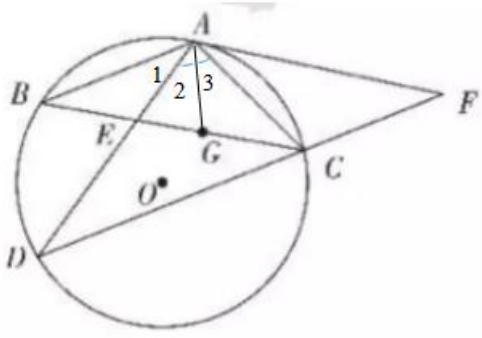
$$\therefore \angle ACB + \angle GAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CAF + \angle GAC = 90^\circ \text{ 即 } \angle OAF = 90^\circ$$

∵ 点 A 在⊙O 上

∴ AF 是⊙O 的切线

(3) 解:



题 24-2 图

连接 AG

∵ $\angle BCD = \angle ACB$, $\angle BCD = \angle 1$

∴ $\angle 1 = \angle ACB$

∵ $\angle B = \angle B$

∴ $\triangle ABE \sim \triangle CBA$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

∵ $BC \cdot BE = 25$

∴ $AB^2 = 25$

∴ $AB = 5$

∵ 点 G 是 $\triangle ACD$ 的内心

∴ $\angle 2 = \angle 3$

∵ $\angle BGA = \angle 3 + \angle BCA = \angle 3 + \angle BCD = \angle 3 + \angle 1 = \angle 3 + \angle 2 = \angle BAG$

$$\therefore BG=AB=5$$

【考点】圆的综合应用，等弧等弦等角的转换，切线的证明，垂径定理的逆应用，内心的概念，相似三角形的应用，外角的应用，等量代换的意识

25. 如题 25-1 图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}x - \frac{7\sqrt{3}}{8}$ 与 x 轴交于点 A、B(点 A 在点 B 右侧)，点 D 为抛物线的顶点，点 C 在 y 轴的正半轴上，CD 交 x 轴于点 F， $\triangle CAD$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle CFE$ ，点 A 恰好旋转到点 F，连接 BE.

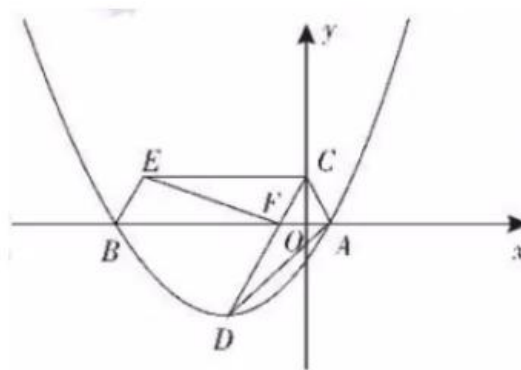
(1) 求点 A、B、D 的坐标；

(2) 求证：四边形 BFCE 是平行四边形；

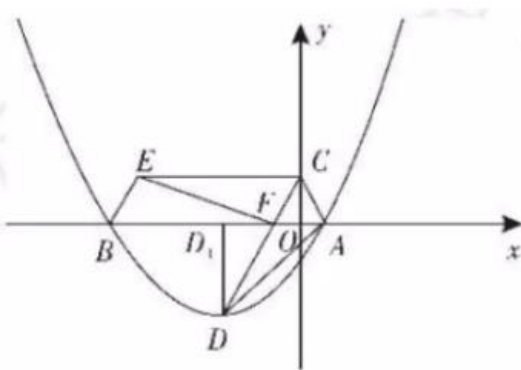
(3) 如题 25-2 图，过顶点 D 作 $DD_1 \perp x$ 轴于点 D_1 ，点 P 是抛物线上一动点，过点 P 作 $PM \perp x$ 轴，点 M 为垂足，使得 $\triangle PAM$ 与 $\triangle DD_1A$ 相似（不含全等）.

① 求出一个满足以上条件的点 P 的横坐标；

② 直接回答这样的点 P 共有几个？



题 25-1 图



题 25-2 图

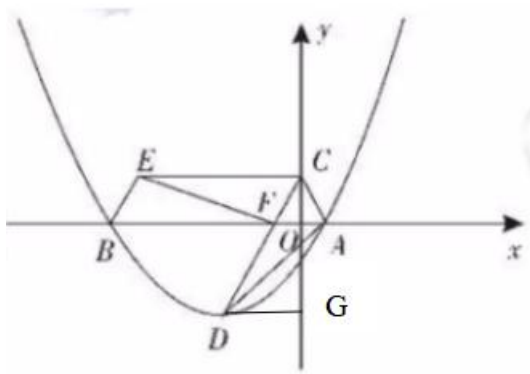
【答案】

(1) 解：由 $y = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}x - \frac{7\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}(x+3) - 2\sqrt{3}$ 得点 D 坐标为 $(-3, 2\sqrt{3})$

令 $y=0$ 得 $x_1=-7, x_2=1$

∴ 点 A 坐标为 $(-7, 0)$ ，点 B 坐标为 $(1, 0)$

(2) 证明:



题 25-1 图

过点 D 作 $DG \perp y$ 轴交于点 G，设点 C 坐标为 $(0, m)$

∴ $\angle DGC = \angle FOC = 90^\circ$ ， $\angle DCG = \angle FCO$

∴ $\triangle DGC \sim \triangle FOC$

$$\therefore \frac{DG}{FO} = \frac{CG}{CO}$$

由题意得 $CA = CF$ ， $CD = CE$ ， $\angle DCA = \angle ECF$ ， $OA = 1$ ， $DG = 3$ ， $CG = m + 2\sqrt{3}$

∴ $CO \perp FA$

∴ $FO = OA = 1$

∴ $\frac{3}{1} = \frac{m + 2\sqrt{3}}{m}$ ，解得 $m = \sqrt{3}$ (或先设直线 CD 的函数解析式为 $y = kx + b$ ，用 D、F 两点

坐标求出 $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ ，再求出点 C 的坐标)

∴ 点 C 坐标为 $(0, \sqrt{3})$

$$\therefore CD = CE = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3} + 2\sqrt{3})^2} = 6$$

$$\because \tan \angle CFO = \frac{CO}{FO} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \angle CFO = 60^\circ$$

$\therefore \triangle FCA$ 是等边三角形

$$\therefore \angle CFO = \angle ECF$$

$$\therefore EC \parallel BA$$

$$\because BF = BO - FO = 6$$

$$\therefore CE = BF$$

$\therefore$ 四边形 BFCE 是平行四边形

(3) 解: ① 设点 P 坐标为 $(m, \frac{\sqrt{3}}{8}m^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}m - \frac{7\sqrt{3}}{8})$, 且点 P 不与点 A、B、D 重合. 若

$\triangle PAM$ 与 $\triangle DD_1A$ 相似, 因为都是直角三角形, 则必有一个锐角相等. 由 (1) 得 $AD_1 = 4$,

$$DD_1 = 2\sqrt{3}$$

(A) 当 P 在点 A 右侧时, $m > 1$

(a) 当 $\triangle PAM \sim \triangle DAD_1$, 则 $\angle PAM = \angle DAD_1$, 此时 P、A、D 三点共线, 这种情况不存在

(b) 当 $\triangle PAM \sim \triangle ADD_1$, 则 $\angle PAM = \angle ADD_1$, 此时 $\frac{PM}{AM} = \frac{AD_1}{DD_1}$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}m^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}m - \frac{7\sqrt{3}}{8}}{m-1} = \frac{4}{2\sqrt{3}}, \text{ 解得 } m_1 = -\frac{5}{3} \text{ (舍去)}, m_2 = 1 \text{ (舍去)}, \text{ 这种不存在}$$

(B) 当 P 在线段 AB 之间时, $-7 < m < 1$

(a) 当 $\triangle PAM \sim \triangle DAD_1$, 则 $\angle PAM = \angle DAD_1$, 此时 P 与 D 重合, 这种情况不存在

(b) 当 $\triangle PAM \sim \triangle ADD_1$, 则 $\angle PAM = \angle ADD_1$, 此时 $\frac{PM}{AM} = \frac{AD_1}{DD_1}$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}m^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}m - \frac{7\sqrt{3}}{8}}{m-1} = \frac{4}{2\sqrt{3}}, \text{ 解得 } m_1 = -\frac{5}{3}, m_2 = 1 \text{ (舍去)}$$

(C) 当 P 在点 B 左侧时, $m < -7$

(a) 当 $\triangle PAM \sim \triangle DAD_1$, 则 $\angle PAM = \angle DAD_1$, 此时 $\frac{PM}{AM} = \frac{DD_1}{AD_1}$

$$\therefore -\frac{\frac{\sqrt{3}}{8}m^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}m - \frac{7\sqrt{3}}{8}}{m-1} = \frac{2\sqrt{3}}{4}, \text{ 解得 } m_1 = -11, m_2 = 1 \text{ (舍去)}$$

(b) 当 $\triangle PAM \sim \triangle ADD_1$, 则 $\angle PAM = \angle ADD_1$, 此时 $\frac{PM}{AM} = \frac{AD_1}{DD_1}$

$$\therefore -\frac{\frac{\sqrt{3}}{8}m^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}m - \frac{7\sqrt{3}}{8}}{m-1} = \frac{4}{2\sqrt{3}}, \text{ 解得 } m_1 = -\frac{37}{3}, m_2 = 1 \text{ (舍去)}$$

综上所述, 点 P 的横坐标为 $-\frac{5}{3}$, -11 , $-\frac{37}{3}$, 三个任选一个进行求解即可.

②一共存在三个点 P, 使得 $\triangle PAM$ 与 $\triangle DD_1A$ 相似.

【考点】二次函数的综合应用, 旋转的性质, 相似三角形的应用, 等边三角形的性质, 平行四边形的证明, 平面直角坐标的灵活应用, 动点问题, 分类讨论思想