

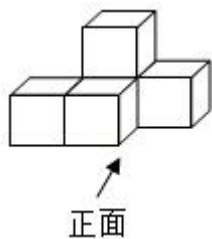
2021 年辽宁省抚顺市中考数学试卷

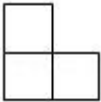
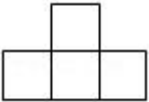
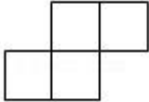
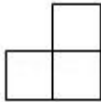
一、选择题（本题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 下列各数中，比 -1 大的数是（ ）

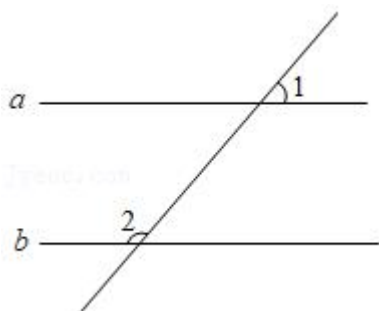
- A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

2. 如图是由 5 个相同的正方体搭成的几何体，这个几何体的左视图是（ ）



- A.  B.  C.  D. 

3. 如图，直线 $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 50^\circ$ ， $\angle 2$ 的度数为（ ）



- A. 100° B. 120° C. 130° D. 150°

4. 下列运算正确的是（ ）

- A. $x^5 + x^5 = x^{10}$ B. $(x^3 y^2)^2 = x^5 y^4$
C. $x^6 \div x^2 = x^3$ D. $x^2 \cdot x^3 = x^5$

5. 某校为加强学生出行的安全意识，学校每月都要对学生进行安全知识测评，随机选取 15 名学生在五月份的测评成绩如表：

成绩（分）	90	91	95	96	97	99
人数（人）	2	3	2	4	3	1

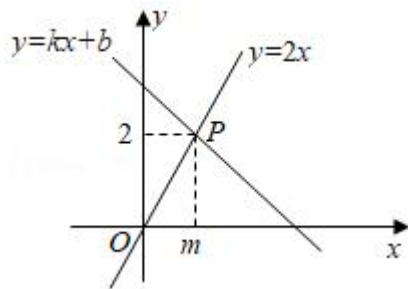
则这组数据的中位数和众数分别为（ ）

- A. 95, 95 B. 95, 96 C. 96, 96 D. 96, 97

6. 某校举行学生会成员的竞选活动，对竞选者从民主测评和演讲两个方面进行考核，两项成绩均按百分制计，规定民主测评的成绩占 40%，演讲的成绩占 60%，小新同学的民主测评和演讲的成绩分别为 80 分和 90 分，则他的最终成绩是（ ）

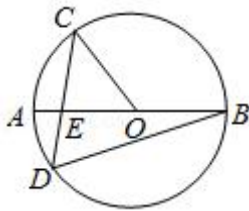
A. 83 分 B. 84 分 C. 85 分 D. 86 分

7. 如图，直线 $y = 2x$ 与 $y = kx + b$ 相交于点 $P(m, 2)$ ，则关于 x 的方程 $kx + b = 2$ 的解是（ ）



A. $x = \frac{1}{2}$ B. $x = 1$ C. $x = 2$ D. $x = 4$

8. 如图，在 $\odot O$ 中，弦 CD 与直径 AB 相交于点 E ，连接 OC ， BD 。若 $\angle ABD = 20^\circ$ ， $\angle AED = 80^\circ$ ，则 $\angle COB$ 的度数为（ ）

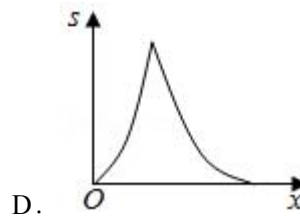
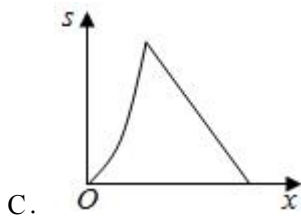
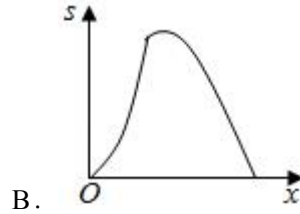
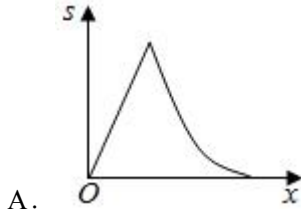
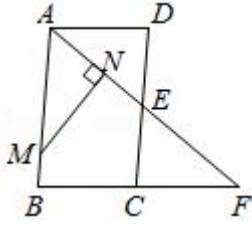


A. 80° B. 100° C. 120° D. 140°

9. 自带水杯已成为人们良好的健康卫生习惯。某公司为员工购买甲、乙两种型号的水杯，用 720 元购买甲种水杯的数量和用 540 元购买乙种水杯的数量相同，已知甲种水杯的单价比乙种水杯的单价多 15 元。设甲种水杯的单价为 x 元，则列出方程正确的是（ ）

A. $\frac{720}{x} = \frac{540}{x-15}$ B. $\frac{720}{x} = \frac{540}{x+15}$
C. $\frac{720}{x-15} = \frac{540}{x}$ D. $\frac{720}{x} = \frac{540}{x} + 15$

10. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $AD = 4$ ， E 是 CD 的中点，射线 AE 与 BC 的延长线相交于点 F ，点 M 从 A 出发，沿 $A \rightarrow B \rightarrow F$ 的路线匀速运动到点 F 停止。过点 M 作 $MN \perp AF$ 于点 N 。设 AN 的长为 x ， $\triangle AMN$ 的面积为 S ，则能大致反映 S 与 x 之间函数关系的图象是（ ）



二、填空题（本题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分）

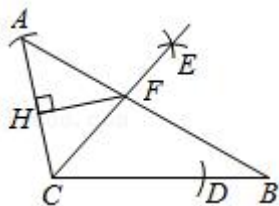
11. 在迎来中国共产党成立一百周年的重要时刻，我国脱贫攻坚战取得了全面胜利，现行标准下 98990000 农村贫困人口全部脱贫，将数据 98990000 用科学记数法表示为 _____.

12. 27 的立方根为 _____.

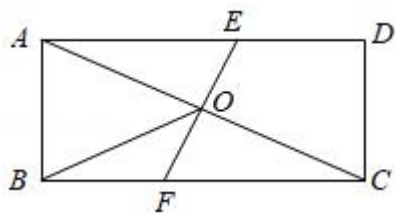
13. 在平面直角坐标系中，点 $M(-2, 4)$ 关于原点对称的点的坐标是 _____.

14. 在一个不透明袋子中，装有 3 个红球，5 个白球和一些黄球，这些球除颜色外无其他差别，从袋中随机摸出一个球是白球的概率为 $\frac{1}{3}$ ，则袋中黄球的个数为 _____.

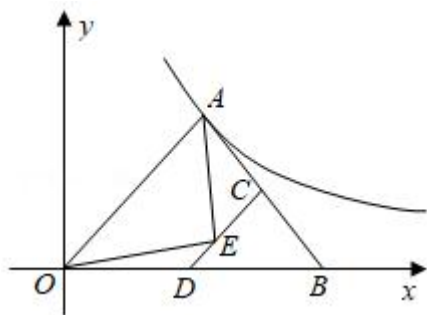
15. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ，以点 C 为圆心， CA 长为半径画弧，交 BC 于点 D ，分别以点 A, D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AD$ 的长为半径画弧两弧相交于点 E ，作射线 CE ，交 AB 于点 F ， $FH \perp AC$ 于点 H 。若 $FH = \sqrt{2}$ ，则 BF 的长为 _____.



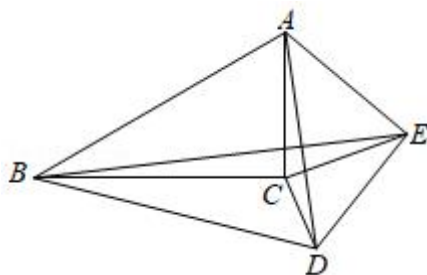
16. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 A 与点 C 重合，折痕 EF 与 AC 相交于点 O ，连接 BO 。若 $AB = 4$ ， $CF = 5$ ，则 OB 的长为 _____.



17. 如图, $\triangle AOB$ 中, $AO = AB$, OB 在 x 轴上 C, D 分别为 AB, OB 的中点, 连接 CD , E 为 CD 上任意一点, 连接 AE, OE , 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 A . 若 $\triangle AOE$ 的面积为 2, 则 k 的值是 _____.



18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle EDC = 60^\circ$, $AC = 2\text{cm}$, $DC = 1\text{cm}$. 则下列四个结论: ① $\triangle ACD \sim \triangle BCE$; ② $AD \perp BE$; ③ $\angle CBE + \angle DAE = 45^\circ$; ④ 在 $\triangle CDE$ 绕点 C 旋转过程中, $\triangle ABD$ 面积的最大值为 $(2\sqrt{3} + 2)\text{cm}^2$. 其中正确的是 _____ (填写所有正确结论的序号)



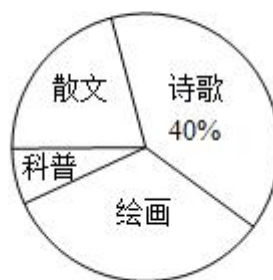
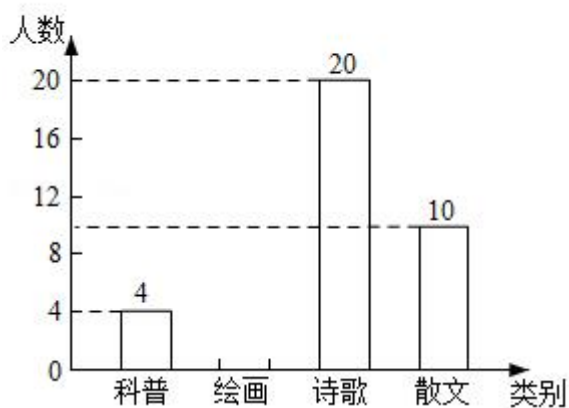
三、解答题 (第 19 题 10 分, 第 20 题 12 分, 共 22 分)

19 先化简, 再求值: $(m+2 - \frac{5}{m-2}) \div \frac{2m-6}{m-2}$, 其中 $m = (\frac{1}{2})^{-2}$.

20 某校以“我最喜爱的书籍”为主题, 对全校学生进行随机抽样调查, 每个被调查的学生必须从“科普”、“绘画”、“诗歌”、“散文”四类书籍中选择最喜欢的一类, 学校的调查结果如图:

学生选择最喜爱的书籍类别条形统计图

学生选择最喜爱的书籍类别扇形统计图



图中信息解答下列问题

- (1) 本次被调查的学生有 ____人；
- (2) 根据统计图中“散文”类所对应的圆心角的度数为 ____，请补充条形统计图。
- (3) 最喜爱“科普”类的4名学生中有1名女生，3名男生，现从4名学生中随机抽取两人参加学校举办的科普知识宣传活动，请用列表或画树状图的方法求出所选的两人恰好都是男生的概率。

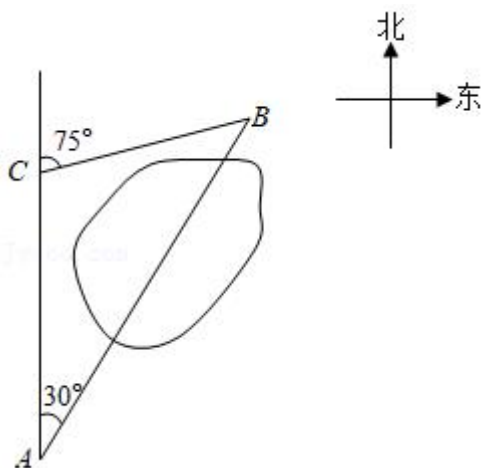
四、解答题（第21题12分，第22题12分，共24分）

21 某市公交公司为落实“绿色出行，低碳环保”的城市发展理念，计划购买 A 、 B 两种型号的新型公交车，已知购买1辆 A 型公交车和2辆 B 型公交车需要165万元，2辆 A 型公交车和3辆 B 型公交车需要270万元。

- (1) 求 A 型公交车和 B 型公交车每辆各多少万元？
- (2) 公交公司计划购买 A 型公交车和 B 型公交车共140辆，且购买 A 型公交车的总费用不高于 B 型公交车的总费用，那么该公司最多购买多少辆 A 型公交车？

22 某景区 A 、 B 两个景点位于湖泊两侧，游客从景点 A 到景点 B 必须经过 C 处才能到达。观测得景点 B 在景点 A 的北偏东 30° ，从景点 A 出发向正北方向步行600米到达 C 处，测得景点 B 在 C 的北偏东 75° 方向。

- (1) 求景点 B 和 C 处之间的距离；（结果保留根号）
- (2) 当地政府为了便捷游客游览，打算修建一条从景点 A 到景点 B 的笔直的跨湖大桥。大桥修建后，从景点 A 到景点 B 比原来少走多少米？（结果保留整数。参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）



五、解答满分 12 分

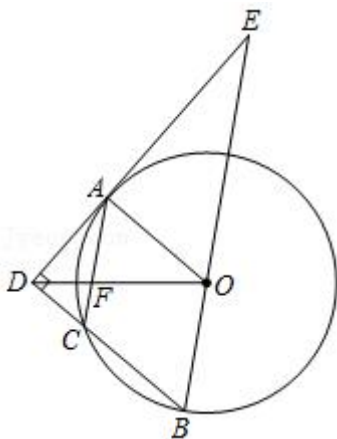
23 某厂家生产一批遮阳伞，每个遮阳伞的成本价是 20 元，试销售时发现：遮阳伞每天的销售量 y （个）与销售单价 x （元）之间是一次函数关系，当销售单价为 28 元时，每天的销售量为 260 个；当销售单价为 30 元时，每天的销售量为 240 个。

- （1）求遮阳伞每天的销出量 y （个）与销售单价 x （元）之间的函数关系式；
- （2）设遮阳伞每填的销售利润为 w （元），当销售单价定为多少元时，才能使每天的销售利润最大？最大利润是多少元？

六、解答题（满分 12 分）

24 如图，在 $\odot O$ 中， $\angle AOB = 120^\circ$ ， $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ ，连接 AC ， BC ，过点 A 作 $AD \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 D ， DA 与 BO 的延长线相交于点 E ， DO 与 AC 相交于点 F 。

- （1）求证： DE 是 $\odot O$ 的切线；
- （2）若 $\odot O$ 的半径为 2，求线段 DF 的长。



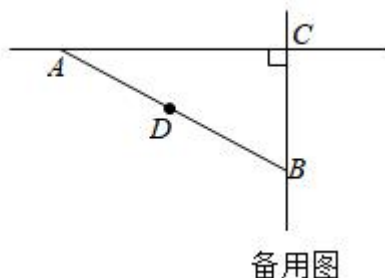
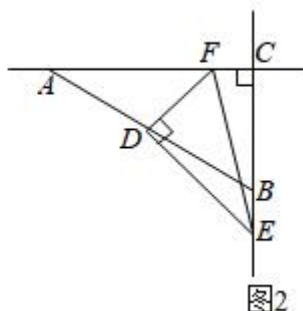
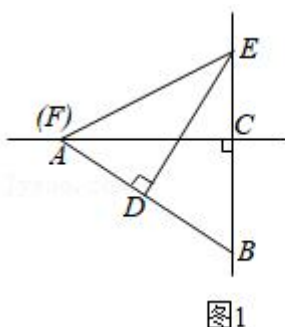
七、解答题（满分 12 分）

25 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 为 AB 中点，点 E 在直线 BC 上（点 E 不与点 B ， C 重合），连接 DE ，过点 D 作 $DF \perp DE$ 交直线 AC 于点 F ，连接 EF 。

（1）如图 1，当点 F 与点 A 重合时，请直接写出线段 EF 与 BE 的数量关系；

（2）如图 2，当点 F 不与点 A 重合时，请写出线段 AF ， EF ， BE 之间的数量关系，并说明理由；

（3）若 $AC = 5$ ， $BC = 3$ ， $EC = 1$ ，请直接写出线段 AF 的长。



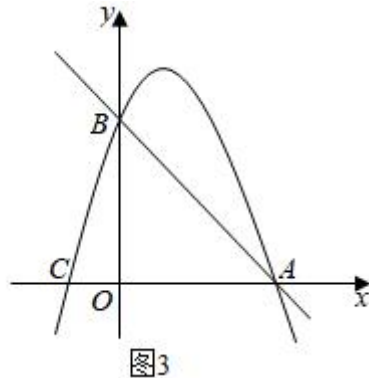
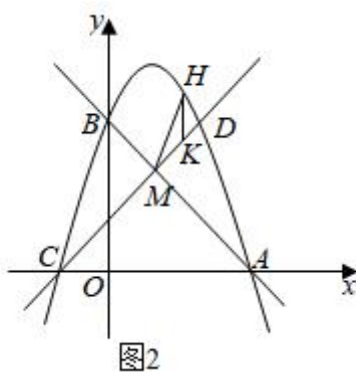
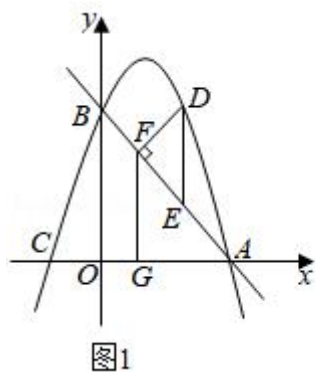
八、解答题（满分 14 分）

26 直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴相交于点 A ，与 y 轴相交于点 B ，抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 经过点 A ， B ，与 x 轴的另一个交点为 C 。

（1）求抛物线的解析式；

（2）如图 1，点 D 是第一象限内抛物线上的一个动点，过点 D 作 $DE \parallel y$ 轴交 AB 于点 E ， $DF \perp AB$ 于点 F ， $FG \perp x$ 轴于点 G 。当 $DE = FG$ 时，求点 D 的坐标；

（3）如图 2，在（2）的条件下，直线 CD 与 AB 相交于点 M ，点 H 在抛物线上，过 H 作 $HK \parallel y$ 轴，交直线 CD 于点 K 。 P 是平面内一点，当以点 M ， H ， K ， P 为顶点的四边形是正方形时，请直接写出点 P 的坐标。



参考答案与试题解析

一. 选择题 (共 10 小题)

1. 下列各数中, 比 -1 大的数是 ()

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

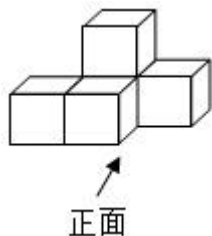
【分析】有理数大小比较的法则: ①正数都大于 0 ; ②负数都小于 0 ; ③正数大于一切负数; ④两个负数, 绝对值大的其值反而小, 据此判断即可.

【解答】解: $\because -3 < -1$, $-2 < -1$, $-1 = -1$, $0 > -1$,

$\therefore$ 所给的各数中, 比 -1 大的数是 0 .

故选: D.

2. 如图是由 5 个相同的正方体搭成的几何体, 这个几何体的左视图是 ()



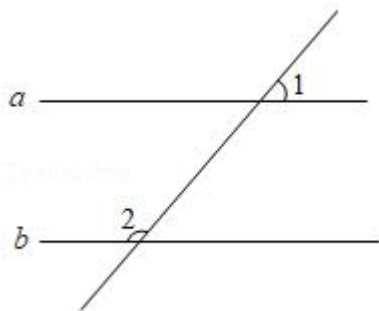
- A. B. C. D.

【分析】左视图是从物体的左边观察得到的图形, 结合选项进行判断即可.

【解答】解: 从左边看, 有两列, 从左到右第一列是两个正方形, 第二列底层是一个正方形.

故选: A.

3. 如图, 直线 $a \parallel b$, $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2$ 的度数为 ()



- A. 100° B. 120° C. 130° D. 150°

【分析】根据“直线 $a \parallel b$, $\angle 1 = 50^\circ$ ”得到 $\angle 3$ 的度数, 再根据 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ 即可得

到 $\angle 2$ 的度数.

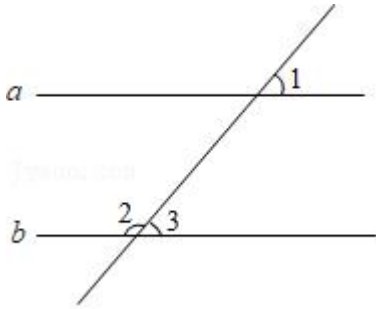
【解答】解: $\because a \parallel b$, $\angle 1 = 50^\circ$,

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 50^\circ,$$

$$\because \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 130^\circ,$$

故选: C.



4. 下列运算正确的是 ()

A. $x^5 + x^5 = x^{10}$

B. $(x^3 y^2)^2 = x^5 y^4$

C. $x^6 \div x^2 = x^3$

D. $x^2 \cdot x^3 = x^5$

【分析】根据合并同类项, 积的乘方, 同底数幂的除法, 同底数幂的乘法法则进行计算, 从而作出判断.

【解答】解: A、 $x^5 + x^5 = 2x^5$, 故此选项不符合题意;

B、 $(x^3 y^2)^2 = x^6 y^4$, 故此选项不符合题意;

C、 $x^6 \div x^2 = x^4$, 故此选项不符合题意;

D、 $x^2 \cdot x^3 = x^5$, 正确, 故此选项符合题意;

故选: D.

5. 某校为加强学生出行的安全意识, 学校每月都要对学生进行安全知识测评, 随机选取 15 名学生在五月份的测评成绩如表:

成绩(分)	90	91	95	96	97	99
人数(人)	2	3	2	4	3	1

则这组数据的中位数和众数分别为 ()

A. 95, 95

B. 95, 96

C. 96, 96

D. 96, 97

【分析】根据中位数、众数的意义分别求出中位数、众数即可.

【解答】解: 将这 15 名学生成绩从小到大排列, 处在中间位置的一个数, 即第 8 个数是

96, 因此中位数是 96,

这 15 名学生成绩出现次数最多的是 96, 共出现 4 次, 因此众数是 96,

故选: C.

6. 某校举行学生会成员的竞选活动, 对竞选者从民主测评和演讲两个方面进行考核, 两项成绩均按百分制计, 规定民主测评的成绩占 40%, 演讲的成绩占 60%, 小新同学的民主测评和演讲的成绩分别为 80 分和 90 分, 则他的最终成绩是 ()

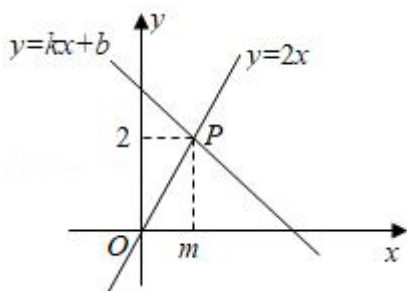
A. 83 分 B. 84 分 C. 85 分 D. 86 分

【分析】根据加权平均数的定义列式计算即可.

【解答】解: 他的最终成绩为 $80 \times 40\% + 90 \times 60\% = 86$ (分),

故选: D.

7. 如图, 直线 $y = 2x$ 与 $y = kx + b$ 相交于点 $P(m, 2)$, 则关于 x 的方程 $kx + b = 2$ 的解是 ()



A. $x = \frac{1}{2}$ B. $x = 1$ C. $x = 2$ D. $x = 4$

【分析】首先利用函数解析式 $y = 2x$ 求出 m 的值, 然后再根据两函数图象的交点横坐标就是关于 x 的方程 $kx + b = 2$ 的解可得答案.

【解答】解: $\because$ 线 $y = 2x$ 与 $y = kx + b$ 相交于点 $P(m, 2)$,

$$\therefore 2 = 2m,$$

$$\therefore m = 1,$$

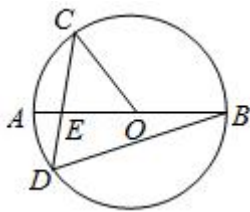
$$\therefore P(1, 2),$$

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = kx + b = 2,$$

$$\therefore \text{关于 } x \text{ 的方程 } kx + b = 2 \text{ 的解是 } x = 1,$$

故选: B.

8. 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 CD 与直径 AB 相交于点 E , 连接 OC , BD . 若 $\angle ABD = 20^\circ$, $\angle AED = 80^\circ$, 则 $\angle COB$ 的度数为 ()



- A. 80° B. 100° C. 120° D. 140°

【分析】根据三角形的外角性质求出 $\angle D$ ，根据圆周角定理得出 $\angle D = \frac{1}{2} \angle COB$ ，求出 $\angle COB = 2\angle D$ ，再代入求出答案即可。

【解答】解： $\because \angle ABD = 20^\circ$ ， $\angle AED = 80^\circ$ ，
 $\therefore \angle D = \angle AED - \angle ABD = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle COB = 2\angle D = 120^\circ$ ，

故选：C.

9. 自带水杯已成为人们良好的健康卫生习惯. 某公司为员工购买甲、乙两种型号的水杯，用 720 元购买甲种水杯的数量和用 540 元购买乙种水杯的数量相同，已知甲种水杯的单价比乙种水杯的单价多 15 元. 设甲种水杯的单价为 x 元，则列出方程正确的是 ()

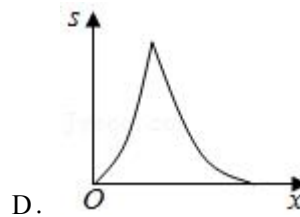
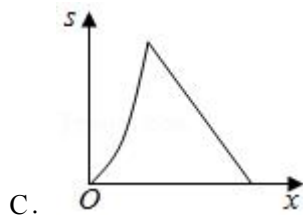
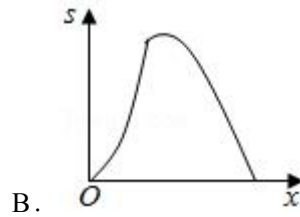
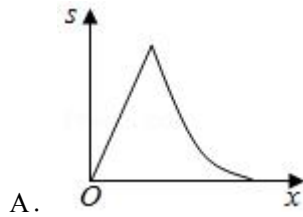
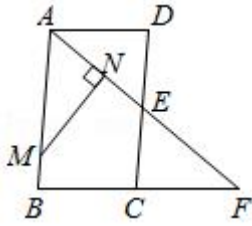
- A. $\frac{720}{x} = \frac{540}{x-15}$ B. $\frac{720}{x} = \frac{540}{x+15}$
 C. $\frac{720}{x-15} = \frac{540}{x}$ D. $\frac{720}{x} = \frac{540}{x} + 15$

【分析】设甲种水杯的单价为 x 元，则乙种水杯的单价为 $(x - 15)$ 元，利用数量 = 总价 $\div$ 单价，结合用 720 元购买甲种水杯的数量和用 540 元购买乙种水杯的数量相同，即可得出关于 x 的分式方程，此题得解.

【解答】解：设甲种水杯的单价为 x 元，则乙种水杯的单价为 $(x - 15)$ 元，
 依题意得： $\frac{720}{x} = \frac{540}{x-15}$.

故选：A.

10. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $AD = 4$ ， E 是 CD 的中点，射线 AE 与 BC 的延长线相交于点 F ，点 M 从 A 出发，沿 $A \rightarrow B \rightarrow F$ 的路线匀速运动到点 F 停止. 过点 M 作 $MN \perp AF$ 于点 N . 设 AN 的长为 x ， $\triangle AMN$ 的面积为 S ，则能大致反映 S 与 x 之间函数关系的图象是 ()



【分析】先证明 $\triangle ADE \cong \triangle FCE$ 得到, $BF = 8$, 由勾股定理求出 $AF = 10$. 当点 M 在 AB 上时, 根据三角函数求出 $NM = \frac{3}{2}x$,

从而得到 $\triangle AMN$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x \times x = \frac{3}{4}x^2$; 当点 M 在 BF 上时, 先利用三角函数求出 MN , 再求出此时 S 关于 x 的函数关系式, 即可得到答案.

【解答】解: 如图, $\because E$ 是 CD 的中点,

$$\therefore CE = DE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle D = \angle DCF = 90^\circ, \quad AD = BC = 4,$$

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle D = \angle ECF \\ DE = CE \\ \angle AED = \angle FEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CF = AD = 4,$$

$$\therefore BF = CF + BC = 8,$$

$$\therefore AF = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

当点 M 在 AB 上时,

在 $\text{Rt}\triangle AMN$ 和 $\text{Rt}\triangle AFB$ 中,

$$\tan \angle NAM = \frac{MN}{AN} = \frac{BF}{AB},$$

$$\therefore NM = \frac{8}{6}x = \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore \triangle AMN \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x \times x = \frac{3}{4}x^2,$$

$\therefore$ 当点 M 在 AB 上时, 函数图象是开口向上、经过原点的抛物线的一部分;

当点 M 在 BF 上时, 如图,

$$AN = x, NF = 10 - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle FMN$ 和 $\text{Rt}\triangle FBA$ 中,

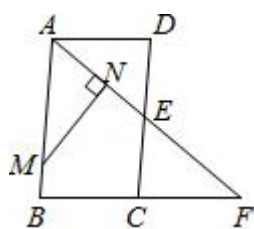
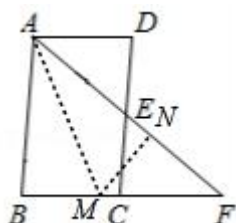
$$\tan \angle F = \frac{MN}{NF} = \frac{AB}{BF},$$

$$\therefore NM = \frac{6}{8}(10 - x) = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2},$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle AMN \text{ 的面积 } S &= \frac{1}{2} \times x \times \left(-\frac{3}{4}x + \frac{15}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{8}x^2 + \frac{15}{4}x, \end{aligned}$$

$\therefore$ 当点 M 在 BF 上时, 函数图象是开口向下的抛物线的一部分;

故选: B .



二. 填空题 (共 8 小题)

11. 在迎来中国共产党成立一百周年的重要时刻, 我国脱贫攻坚战取得了全面胜利, 现行标准下 98990000 农村贫困人口全部脱贫, 将数据 98990000 用科学记数法表示为 9.899×10^7 .

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相

同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是非负数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: $98990000 = 9.899 \times 10^7$,

故答案为: 9.899×10^7 .

12. 27 的立方根为 3.

【分析】找到立方等于 27 的数即可.

【解答】解: $\because 3^3 = 27$,

$\therefore 27$ 的立方根是 3,

故答案为: 3.

13. 在平面直角坐标系中, 点 $M(-2, 4)$ 关于原点对称的点的坐标是 $(2, -4)$.

【分析】根据关于原点对称的点, 横坐标与纵坐标都互为相反数, 可得答案.

【解答】解: 点 $(-2, 4)$ 关于原点对称的点的坐标为 $(2, -4)$.

故答案为: $(2, -4)$.

14. 在一个不透明袋子中, 装有 3 个红球, 5 个白球和一些黄球, 这些球除颜色外无其他差别, 从袋中随机摸出一个球是白球的概率为 $\frac{1}{3}$, 则袋中黄球的个数为 7.

【分析】设有黄球 x 个, 根据概率公式得: $\frac{5}{5+3+x} = \frac{1}{3}$, 解得 x 的值即可.

【解答】解: 设有黄球 x 个,

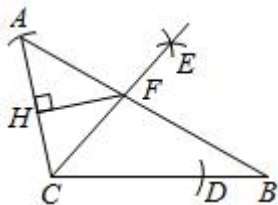
根据题意得: $\frac{5}{5+3+x} = \frac{1}{3}$,

解得: $x = 7$,

经检验 $x = 7$ 是原方程的解,

故答案为: 7.

15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, 以点 C 为圆心, CA 长为半径画弧, 交 BC 于点 D , 分别以点 A, D 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AD$ 的长为半径画弧两弧相交于点 E , 作射线 CE , 交 AB 于点 F , $FH \perp AC$ 于点 H . 若 $FH = \sqrt{2}$, 则 BF 的长为 $2\sqrt{2}$.



【分析】过 F 作 $FG \perp BC$ 于 G , 由作图知, CF 是 $\angle ACB$ 的角平分线, 根据角平分线的

性质得到 $FG = FH = \sqrt{2}$ ，根据直角三角形的性质即可得到结论．

【解答】解：过 F 作 $FG \perp BC$ 于 G ，

由作图知， CF 是 $\angle ACB$ 的角平分线，

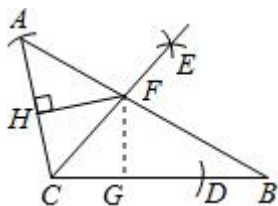
$\because FH \perp AC$ 于点 H ， $FH = \sqrt{2}$ ，

$\therefore FG = FH = \sqrt{2}$ ，

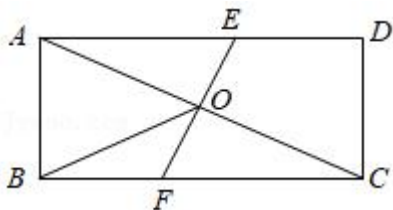
$\because \angle FGB = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，

$\therefore BF = 2FG = 2\sqrt{2}$ ，

故答案为： $2\sqrt{2}$ ．

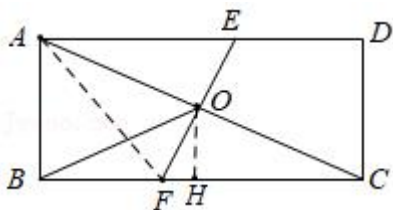


16. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 A 与点 C 重合，折痕 EF 与 AC 相交于点 O ，连接 BO 。若 $AB = 4$ ， $CF = 5$ ，则 OB 的长为 $2\sqrt{5}$ 。



【分析】连接 AF ，过 O 作 $OH \perp BC$ 于 H ，由将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 A 与点 C 重合，折痕 EF 与 AC 相交于点 O ，可得 $AF = CF = 5$ ， $BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = 3$ ， $BC = BF + CF = 8$ ，根据折叠可知 OH 是 $\triangle ABC$ 的中位线，故 $BH = \frac{1}{2}BC = 4$ ， $OH = \frac{1}{2}AB = 2$ ，在 $\text{Rt}\triangle BOH$ 中，用勾股定理即得 $OB = 2\sqrt{5}$ 。

【解答】解：连接 AF ，过 O 作 $OH \perp BC$ 于 H ，如图：



$\because$ 将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 A 与点 C 重合，折痕 EF 与 AC 相交于点 O ，

$\therefore AF = CF = 5$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$$\therefore BC = BF + CF = 8,$$

$\because OA = OC, OH \perp BC, AB \perp BC$,

$\therefore O$ 为 AC 中点, $OH \parallel AB$,

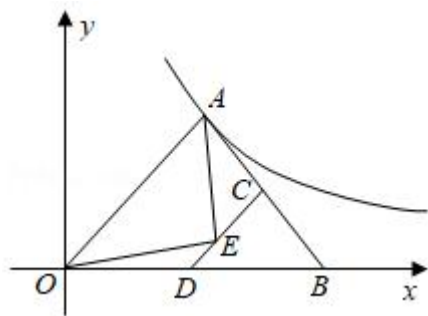
$\therefore OH$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore BH = CH = \frac{1}{2}BC = 4, \quad OH = \frac{1}{2}AB = 2,$$

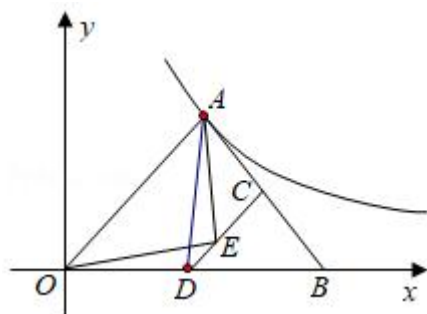
在 $\text{Rt}\triangle BOH$ 中, $OB = \sqrt{BH^2 + OH^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$,

故答案为: $2\sqrt{5}$.

17. 如图, $\triangle AOB$ 中, $AO = AB$, OB 在 x 轴上 C, D 分别为 AB, OB 的中点, 连接 CD , E 为 CD 上任意一点, 连接 AE, OE , 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 A . 若 $\triangle AOE$ 的面积为 2, 则 k 的值是 4.



【分析】根据等腰 $\triangle AOB$, 中位线 CD 得出 $AD \perp OB$, $S_{\triangle AOE} = S_{\triangle AOD} = 2$, 应用 $|k|$ 的几何意义求 k .



【解答】解:

如图: 连接 AD ,

$\triangle AOB$ 中, $AO = AB$, OB 在 x 轴上, C, D 分别为 AB, OB 的中点,

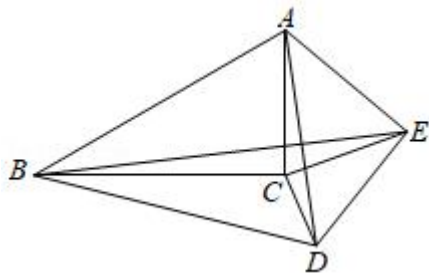
$\therefore AD \perp OB, AO \parallel CD$,

$$\therefore S_{\triangle AOE} = S_{\triangle AOD} = 2,$$

$$\therefore k = 4.$$

故答案为：4.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ， $\angle BAC = \angle EDC = 60^\circ$ ， $AC = 2\text{cm}$ ， $DC = 1\text{cm}$ 。则下列四个结论：① $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ ；② $AD \perp BE$ ；③ $\angle CBE + \angle DAE = 45^\circ$ ；④在 $\triangle CDE$ 绕点 C 旋转过程中， $\triangle ABD$ 面积的最大值为 $(2\sqrt{3}+2)\text{cm}^2$ 。其中正确的是 ①②④。（填写所有正确结论的序号）



【分析】先证明 $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ ，再用对应角 $\angle EBC = \angle DAC$ ，即可判断①②③，再由 D 到直线 AB 的最大距离为 $CH + CD = (\sqrt{3} + 1)\text{cm}$ ，即可求得 $\triangle ABD$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}AB \times (\sqrt{3} + 1) = (2\sqrt{3} + 2)\text{cm}^2$ ，故可判断④。

【解答】解： $\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB + \angle ACE = \angle DCE + \angle ACE,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACD,$$

$$\because \angle BAC = \angle EDC = 60^\circ, AC = 2\text{cm}, DC = 1\text{cm},$$

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \sqrt{3}, \tan \angle EDC = \frac{CE}{CD} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{3}\text{cm}, CE = \sqrt{3}\text{cm},$$

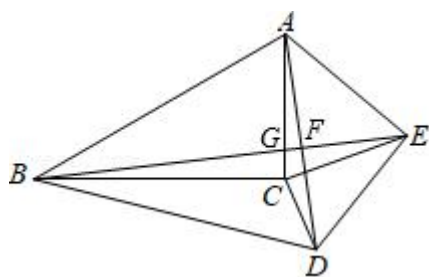
$$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{AC}{CD} = 2,$$

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE$ ，故①正确；

$$\because \triangle ACD \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle DAC,$$

如图，记 BE 与 AD 、 AC 分别交于 F 、 G ，



$$\because \angle AGF = \angle BGC,$$

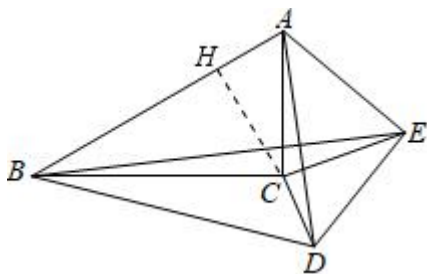
$$\therefore \angle BCG = \angle BFA = 90^\circ,$$

$\therefore AD \perp BE$, 故②正确;

$$\because \angle EBC = \angle DAC,$$

$\therefore \angle CBE + \angle DAE = \angle DAC + \angle DAE = \angle CAE$ 不一定等于 45° , 故③错误;

如图, 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ,



$$\because \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore CH = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}cm,$$

$$\therefore D \text{ 到直线 } AB \text{ 的最大距离为 } CH + CD = (\sqrt{3} + 1)cm,$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 面积的最大值为 } \frac{1}{2}AB \times (\sqrt{3} + 1) = (2\sqrt{3} + 2)cm^2, \text{ 故④正确.}$$

故答案为: ①②④.

三、解答题 (第 19 题 10 分, 第 20 题 12 分, 共 22 分)

19 先化简, 再求值: $(m+2-\frac{5}{m-2}) \div \frac{2m-6}{m-2}$, 其中 $m = (\frac{1}{2})^{-2}$.

【考点】分式的化简求值; 负整数指数幂.

【专题】分式; 运算能力.

【答案】 $\frac{m+3}{2}, \frac{7}{2}$.

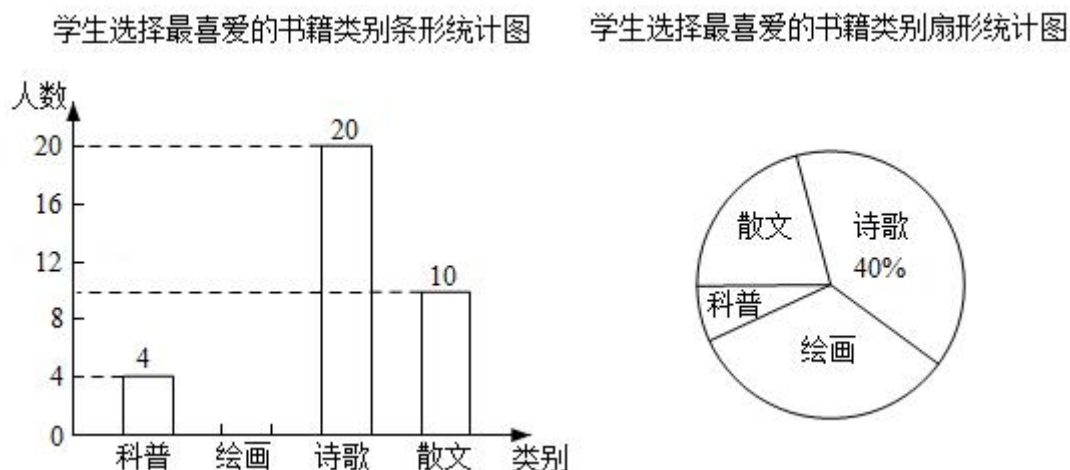
【分析】根据分式的减法和除法可以化简题目中的式子, 然后将 m 的值代入化简后的式子即可解答本题.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: } & (m+2-\frac{5}{m-2}) \div \frac{2m-6}{m-2} \\ &= \frac{(m+2)(m-2)-5}{m-2} \cdot \frac{m-2}{2(m-3)} \\ &= \frac{m^2-4-5}{2(m-3)} \\ &= \frac{(m+3)(m-3)}{2(m-3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{m+3}{2},$$

$$\text{当 } m = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \text{ 时, 原式} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}.$$

20 某校以“我最喜爱的书籍”为主题，对全校学生进行随机抽样调查，每个被调查的学生必须从“科普”、“绘画”、“诗歌”、“散文”四类书籍中选择最喜欢的一类，学校的调查结果如图：



图中信息解答下列问题

- (1) 本次被调查的学生有 ____人；
- (2) 根据统计图中“散文”类所对应的圆心角的度数为 ____，请补充条形统计图．
- (3) 最喜爱“科普”类的4名学生中有1名女生，3名男生，现从4名学生中随机抽取两人参加学校举办的科普知识宣传活动，请用列表或画树状图的方法求出所选的两人恰好都是男生的概率．

【考点】扇形统计图；条形统计图；列表法与树状图法．

【专题】概率及其应用；应用意识．

【答案】(1) 50；

(2) 72° ；

(3) $\frac{1}{2}$ ．

【分析】(1) 用最喜欢“诗歌”类的人数除以它所占的百分比得到调查的总人数；

(2) 用 360° 乘以“散文”类的人数所占的百分比得到“散文”类所对应的圆心角的度数，然后计算最喜欢“绘画”类的人数后补全条形统计图；

(3) 通过树状图展示所有12种等可能的结果，找出所选的两人恰好都是男生的结果数，然后根据概率公式计算．

【解答】解：（1） $20 \div 40\% = 50$ （人），

所以本次被调查的学生有 50 人；

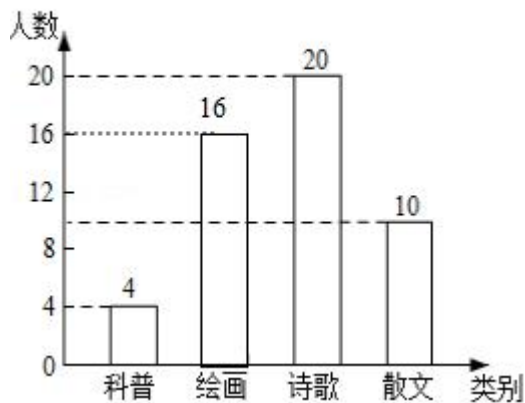
故答案为 50；

（2）“散文”类所对应的圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{10}{50} = 72^\circ$ ；

最喜欢“绘画”类的人数为 $50 - 4 - 20 - 10 = 16$ （人），

条形统计图补充为：

学生选择最喜爱的书籍类别条形统计图



故答案为 72° ；

（3）画树状图为：



共有 12 种等可能的结果，其中所选的两人恰好都是男生的结果数为 6，

所以所选的两人恰好都是男生的概率 $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ 。

四、解答题（第 21 题 12 分，第 22 题 12 分，共 24 分）

21 某市公交公司为落实“绿色出行，低碳环保”的城市发展理念，计划购买 A 、 B 两种型号的新型公交车，已知购买 1 辆 A 型公交车和 2 辆 B 型公交车需要 165 万元，2 辆 A 型公交车和 3 辆 B 型公交车需要 270 万元。

（1）求 A 型公交车和 B 型公交车每辆各多少万元？

（2）公交公司计划购买 A 型公交车和 B 型公交车共 140 辆，且购买 A 型公交车的总费用不高于 B 型公交车的总费用，那么该公司最多购买多少辆 A 型公交车？

【考点】二元一次方程组的应用；一元一次不等式的应用.

【专题】一次方程（组）及应用；一元一次不等式(组)及应用；运算能力；推理能力；应用意识.

【答案】（1） A 型公交车每辆 45 万元， B 型公交车每辆 60 万元；

（2）该公司最多购买 80 辆 A 型公交车.

【分析】（1）设 A 型公交车每辆 x 万元， B 型公交车每辆 y 万元，由题意：购买 1 辆 A 型公交车和 2 辆 B 型公交车需要 165 万元，2 辆 A 型公交车和 3 辆 B 型公交车需要 270 万元. 列出二元一次方程组，解方程组即可；

（2）设该公司购买 m 辆 A 型公交车，则购买 $(140 - m)$ 辆 B 型公交车，由题意：购买 A 型公交车的总费用不高于 B 型公交车的总费用，列出一元一次不等式，解不等式即可.

【解答】解：（1）设 A 型公交车每辆 x 万元， B 型公交车每辆 y 万元，

由题意得：
$$\begin{cases} x+2y=165 \\ 2x+3y=270 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x=45 \\ y=60 \end{cases},$$

答： A 型公交车每辆 45 万元， B 型公交车每辆 60 万元；

（2）设该公司购买 m 辆 A 型公交车，则购买 $(140 - m)$ 辆 B 型公交车，

由题意得： $45m \leq 60(140 - m)$,

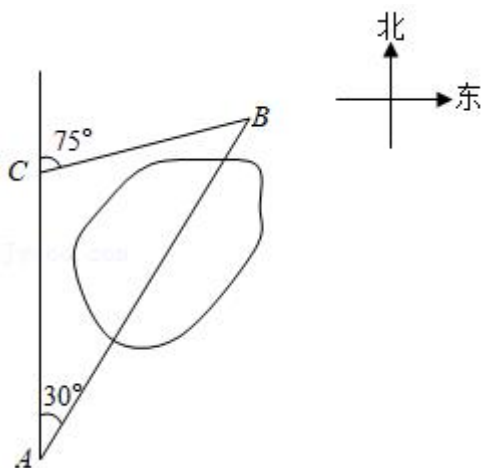
解得： $m \leq 80$,

答：该公司最多购买 80 辆 A 型公交车.

22 某景区 A 、 B 两个景点位于湖泊两侧，游客从景点 A 到景点 B 必须经过 C 处才能到达. 观测得景点 B 在景点 A 的北偏东 30° ，从景点 A 出发向正北方向步行 600 米到达 C 处，测得景点 B 在 C 的北偏东 75° 方向.

（1）求景点 B 和 C 处之间的距离；（结果保留根号）

（2）当地政府为了便捷游客游览，打算修建一条从景点 A 到景点 B 的笔直的跨湖大桥. 大桥修建后，从景点 A 到景点 B 比原来少走多少米？（结果保留整数. 参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）



【考点】解直角三角形的应用 - 方向角问题.

【专题】解直角三角形及其应用；运算能力；推理能力；模型思想.

【答案】(1) $300\sqrt{2}m$;

(2) $204m$.

【分析】(1) 通过作辅助线, 构造直角三角形, 在 $Rt\triangle ACD$ 中, 可求出 CD 、 AD , 根据外角的性质可求出 $\angle B$ 的度数, 在 $Rt\triangle BCD$ 中求出 BC 即可;

(2) 计算 $AC+BC$ 和 AB 的长, 计算可得答案.

【解答】解: (1) 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,

由题意得, $\angle A = 30^\circ$, $\angle BCE = 75^\circ$, $AC = 600m$,

在 $Rt\triangle ACD$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 600$,

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AC = 300 (m),$$

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = 300\sqrt{3} (m),$$

$$\because \angle BCE = 75^\circ = \angle A + \angle B,$$

$$\therefore \angle B = 75^\circ - \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore CD = BD = 300 (m),$$

$$BC = \sqrt{2}CD = 300\sqrt{2} (m),$$

答: 景点 B 和 C 处之间的距离为 $300\sqrt{2}m$;

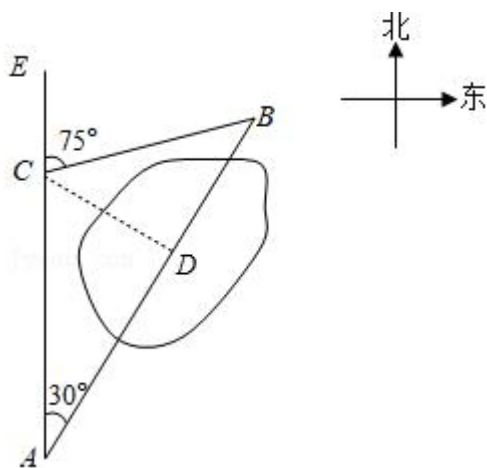
(2) 由题意得.

$$AC+BC = 600+300\sqrt{2} \approx 1024 (m),$$

$$AB = AD+BD = 300\sqrt{3}+300 \approx 820 (m),$$

$$1024 - 820 = 204 (m),$$

答：大桥修建后，从景点 A 到景点 B 比原来少走约 $204m$ 。



五、解答满分 12 分

23 某厂家生产一批遮阳伞，每个遮阳伞的成本价是 20 元，试销售时发现：遮阳伞每天的销售量 y （个）与销售单价 x （元）之间是一次函数关系，当销售单价为 28 元时，每天的销售量为 260 个；当销售单价为 30 元时，每天的销量为 240 个。

（1）求遮阳伞每天的销售量 y （个）与销售单价 x （元）之间的函数关系式；

（2）设遮阳伞每填的销售利润为 w （元），当销售单价定为多少元时，才能使每天的销售利润最大？最大利润是多少元？

【考点】二次函数的应用。

【专题】一次函数及其应用；二次函数的应用；应用意识。

【答案】（1） $y = -10x + 540$ ；

（2）当销售单价定为 37 元时，才能使每天的销售利润最大，最大利润是 2890 元。

【分析】（1）设函数关系式为 $y = kx + b$ ，由当销售单价为 28 元时，每天的销售量为 260 个；当销售单价为 30 元时，每天的销量为 240 个。可列方程组，即可求解；

（2）由每天销售利润 = 每个遮阳伞的利润 $\times$ 销售量，列出函数关系式，由二次函数的性质可求解。

【解答】解：（1）设函数关系式为 $y = kx + b$ ，

由题意可得：

$$\begin{cases} 260 = 28k + b \\ 240 = 30k + b \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} k = -10 \\ b = 540 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数关系式为 $y = -10x + 540$ ；

（2）由题意可得：

$$w = (x - 20)y = (x - 20)(-10x + 540) = -10(x - 37)^2 + 2890,$$

$$\because -10 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x = 37$ 时, w 有最大值为 2890,

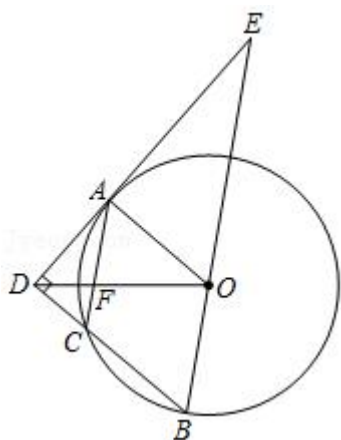
答: 当销售单价定为 37 元时, 才能使每天的销售润最大, 最大利润是 2890 元.

六、解答题 (满分 12 分)

24 如图, 在 $\odot O$ 中, $\angle AOB = 120^\circ$, $\widehat{AC} = \widehat{BC}$, 连接 AC , BC , 过点 A 作 $AD \perp BC$, 交 BC 的延长线于点 D , DA 与 BO 的延长线相交于点 E , DO 与 AC 相交于点 F .

(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 2, 求线段 DF 的长.



【考点】切线的判定与性质; 相似三角形的判定与性质.

【专题】矩形 菱形 正方形; 与圆有关的位置关系; 解直角三角形及其应用; 运算能力; 推理能力; 模型思想.

【答案】(1) 详见解答;

$$(2) \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

【分析】(1) 由 $\widehat{AC} = \widehat{BC}$, 可得 $AC = BC$, 进而可证出 $\triangle OAC \cong \triangle OBC$, 从而得出四边形 $OACB$ 是菱形, 由 $OA \parallel BD$, $AD \perp BD$, 可得出 $OA \perp DE$, 得出 DE 是切线;

(2) 根据特殊锐角的三角函数值, 可求出 CD 、 AD , 进而在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, 由勾股定理求出 OD , 再根据 $\triangle CFD \sim \triangle AFO$, 可得 $\frac{CD}{OA} = \frac{DF}{OF} = \frac{1}{2}$, 进而得到 $DF = \frac{1}{3}OD$ 即可.

【解答】解: (1) 如图, 连接 OC ,

$$\because \widehat{AC} = \widehat{BC},$$

$$\therefore AC = BC,$$

又 $\because OA = OB, OC = OC,$

$\therefore \triangle OAC \cong \triangle OBC$ (SSS),

$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ,$

$\therefore \triangle AOC$ 、 $\triangle BOC$ 是等边三角形,

$\therefore OA = AC = CB = OB,$

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 是菱形,

$\therefore OA \parallel BD,$

又 $\because AD \perp BD,$

$\therefore OA \perp DE,$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 由 (1) 得 $AC = OA = 2, \angle OAC = 60^\circ, \angle DAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle DAC = 30^\circ, AC = 2,$

$\therefore DC = \frac{1}{2}AC = 1, AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \sqrt{3},$

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, 由勾股定理得,

$$OD = \sqrt{AD^2 + OA^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7},$$

$\because OA \parallel BD,$

$\therefore \triangle CFD \sim \triangle AFO,$

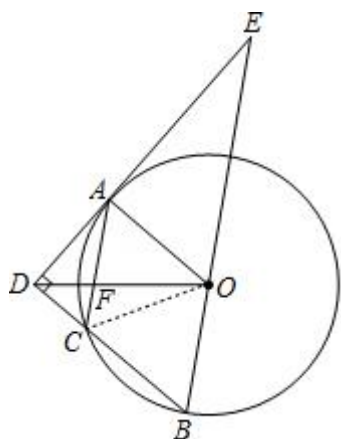
$$\therefore \frac{CD}{OA} = \frac{DF}{OF},$$

又 $\because \frac{CD}{AC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, AC = OA = 2,$

$$\therefore \frac{DF}{OF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{DF}{DO} = \frac{1}{3},$$

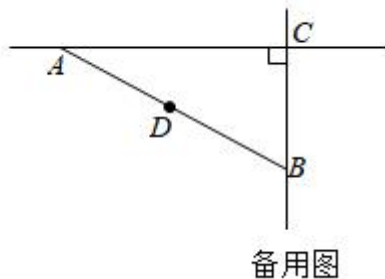
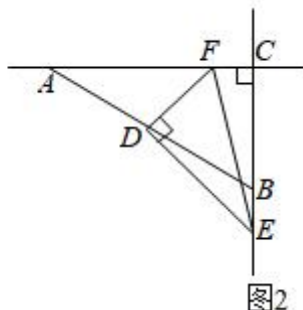
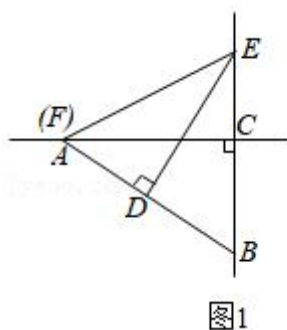
$$\text{即 } DF = \frac{1}{3}OD = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$



七、解答题 (满分 12 分)

25 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 为 AB 中点, 点 E 在直线 BC 上 (点 E 不与点 B , C 重合), 连接 DE , 过点 D 作 $DF \perp DE$ 交直线 AC 于点 F , 连接 EF .

- (1) 如图 1, 当点 F 与点 A 重合时, 请直接写出线段 EF 与 BE 的数量关系;
- (2) 如图 2, 当点 F 不与点 A 重合时, 请写出线段 AF , EF , BE 之间的数量关系, 并说明理由;
- (3) 若 $AC = 5$, $BC = 3$, $EC = 1$, 请直接写出线段 AF 的长.



【考点】三角形综合题.

【专题】作图题; 推理能力.

【答案】(1) $EF = BE$.

(2) 结论: $AF^2 + BE^2 = EF^2$, 证明见解析部分.

(3) AF 的长为 $\frac{11}{5}$ 或 1.

【分析】(1) 结论: $EF = BE$. 利用线段的垂直平分线的性质证明即可.

(2) 结论: $AF^2 + BE^2 = EF^2$ 如图 2 中, 过点 A 作 $AJ \perp AC$ 交 ED 的延长线于 J , 连接 FJ . 证明 $\triangle AJD \cong \triangle BED$ (AAS), 推出 $AJ = BE$, $DJ = DE$, 再证明 $FJ = EF$, 可得结论.

(3) 分两种情形: 如图 3-1 中, 当点 E 在线段 BC 上时, 如图 3-2 中, 当点 E 在线段

BC 的延长线上时，设 $AF = x$ ，则 $CF = 5 - x$ ．构建方程求解即可．

【解答】解：（1）结论： $EF = BE$ ．

理由：如图 1 中，

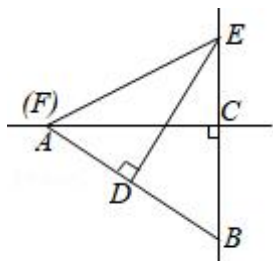


图1

$\because AD = DB, DE \perp AB,$

$\therefore EF = EB.$

（2）结论： $AF^2 + BE^2 = EF^2$ ．

理由：如图 2 中，过点 A 作 $AJ \perp AC$ 交 ED 的延长线于 J ，连接 FJ ．

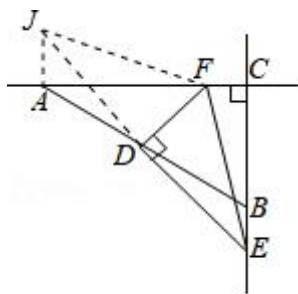


图2

$\because AJ \perp AC, EC \perp AC,$

$\therefore AJ \parallel BE,$

$\therefore \angle AJD = \angle DEB,$

在 $\triangle AJD$ 和 $\triangle BED$ 中，

$$\begin{cases} \angle AJD = \angle DEB \\ \angle ADJ = \angle BDE, \\ AD = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AJD \cong \triangle BED \text{ (AAS)},$

$\therefore AJ = BE, DJ = DE,$

$\because DF \perp EJ,$

$\therefore FJ = EF,$

$\because \angle FAJ = 90^\circ,$

$$\therefore AF^2 + AJ^2 = FJ^2,$$

$$\therefore AF^2 + BE^2 = EF^2.$$

(3) 如图 3-1 中, 当点 E 在线段 BC 上时, 设 $AF = x$, 则 $CF = 5 - x$.

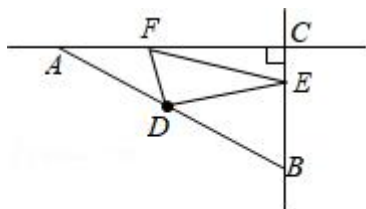


图 3-1

$$\because BC = 3, CE = 1,$$

$$\therefore BE = 2,$$

$$\because EF^2 = AF^2 + BE^2 = CF^2 + CE^2,$$

$$\therefore x^2 + 2^2 = (5 - x)^2 + 1^2,$$

$$\therefore x = \frac{11}{5},$$

$$\therefore AF = \frac{11}{5}.$$

如图 3-2 中, 当点 E 在线段 BC 的延长线上时, 设 $AF = x$, 则 $CF = 5 - x$.

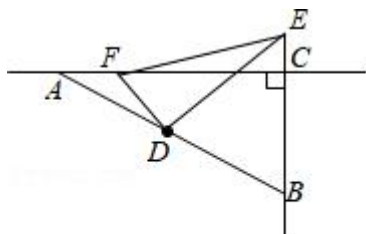


图3-2

$$\because BC = 3, CE = 1,$$

$$\therefore BE = 4,$$

$$\because EF^2 = AF^2 + BE^2 = CF^2 + CE^2,$$

$$\therefore x^2 + 4^2 = (5 - x)^2 + 1^2,$$

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore AF = 1,$$

综上所述, 满足条件的 AF 的长为 $\frac{11}{5}$ 或 1.

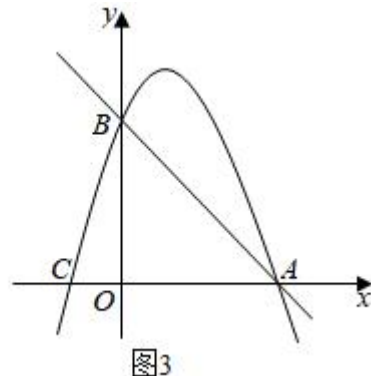
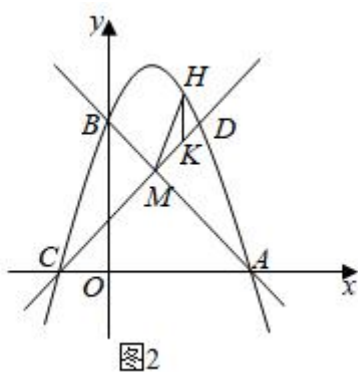
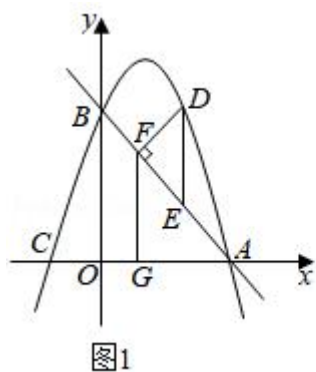
八、解答题 (满分 14 分)

26 直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴相交于点 A , 与 y 轴相交于点 B , 抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 经过点 A, B , 与 x 轴的另一个交点为 C .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 如图 1, 点 D 是第一象限内抛物线上的一个动点, 过点 D 作 $DE \parallel y$ 轴交 AB 于点 E , $DF \perp AB$ 于点 F , $FG \perp x$ 轴于点 G . 当 $DE = FG$ 时, 求点 D 的坐标;

(3) 如图 2, 在 (2) 的条件下, 直线 CD 与 AB 相交于点 M , 点 H 在抛物线上, 过 H 作 $HK \parallel y$ 轴, 交直线 CD 于点 K . P 是平面内一点, 当以点 M, H, K, P 为顶点的四边形是正方形时, 请直接写出点 P 的坐标.



【考点】二次函数综合题.

【专题】二次函数图象及其性质; 运算能力; 推理能力.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$; (2) $(2, 3)$; $(5, 2)$ 或 $(-1, 2)$ 或 $(1, 2 + \sqrt{2})$ 或 $(1, 2 - \sqrt{2})$.

【分析】(1) 令 $x = 0$, 求点 $B(0, 3)$, 令 $y = 0$, 求点 $A(3, 0)$, 将点 A 、点 B 代入抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 即可求解;

(2) 设 $D(m, -m^2 + 2m + 3)$, 由 $DE \parallel y$ 轴交 AB 于点 E , 则 $E(m, -m + 3)$, 再由 $OA = OB$, 可知 $\angle OAB = 45^\circ$, 则有 $AG = FG = DE = AG$, 连接 GE , 延长 DE 交 x 轴于点 T , 可证四边形 $FGED$ 是平行四边形, $\triangle AEG$ 为等腰直角三角形, 可求 $AT = ET = GT = 3 - m$, $AG = FG = 6 - 2m$, $OG = 2m - 3$, 求出 $FG = -2m + 6$, $DT = -3m + 9$, 得到 $-m^2 + 2m + 3 = -3m + 9$, 即可求 $D(2, 3)$;

(3) 先求出 $C(-1, 0)$, 直线 CD 的解析式为 $y = x + 1$, 联立 $x + 1 = -x + 3$, 求出 $M(1, 2)$, 分两种情况讨论: ①当 $MH \perp MK$ 时, H 点在 AB 上, K 点在 CD 上, 可确定 $H(3, 0)$ 或 $H(0, 3)$, 当 $H(3, 0)$ 时, $K(3, 4)$, $P(5, 2)$; 当 $H(0, 3)$ 时, $K(0, 1)$,

$P(-1, 2)$; ②当 $MH \perp HK$ 时, 此时 $MH \perp y$ 轴, $H(1+\sqrt{2}, 2)$ 或 $H(1-\sqrt{2}, 2)$, 当 $H(1+\sqrt{2}, 2)$ 时, $P(1, 2+\sqrt{2})$; 当 $H(1-\sqrt{2}, 2)$ 时, $P(1, 2-\sqrt{2})$.

【解答】解: (1) 令 $x=0$, 则 $y=3$,

$$\therefore B(0, 3),$$

令 $y=0$, 则 $x=3$,

$$\therefore A(3, 0),$$

$\because$ 抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 经过点 A, B ,

$$\therefore \begin{cases} 9a+6+c=0 \\ c=3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a=-1 \\ c=3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-x^2+2x+3$;

(2) 设 $D(m, -m^2+2m+3)$,

$\because DE \parallel y$ 轴交 AB 于点 E ,

$$\therefore E(m, -m+3),$$

$\because OA=OB$,

$$\therefore \angle OAB=45^\circ,$$

$$\therefore AG=FG,$$

$$\because DE=FG,$$

$$\therefore DE=AG,$$

连接 GE , 延长 DE 交 x 轴于点 T ,

$\therefore$ 四边形 $FGED$ 是平行四边形,

$$\because DF \perp AB,$$

$$\therefore EG \perp AB,$$

$\therefore \triangle AEG$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AT=ET=GT=3-m,$$

$$\therefore AG=FG=6-2m,$$

$$\therefore OG=3-(6-2m)=2m-3,$$

$$\therefore F \text{ 点横坐标为 } 2m-3,$$

$$\therefore FG=-2m+6,$$

$$\therefore DT=-2m+6+3-m=-3m+9,$$

$$\therefore -m^2+2m+3 = -3m+9,$$

解得 $m=2$ 或 $m=3$ (舍),

$$\therefore D(2, 3);$$

$$(3) \text{ 令 } y=0, \text{ 则 } -x^2+2x+3=0,$$

解得 $x=3$ 或 $x=-1$,

$$\therefore C(-1, 0),$$

设 CD 的解析式为 $y=kx+b$, 将 $C(-1, 0)$ 、 $D(2, 3)$ 代入,

$$\therefore \begin{cases} -k+b=0 \\ 2k+b=3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k=1 \\ b=1 \end{cases},$$

$$\therefore y=x+1,$$

$$\therefore \angle ACM=45^\circ,$$

$$\therefore CM \perp AM,$$

$$\text{联立 } x+1 = -x+3,$$

解得 $x=1$,

$$\therefore M(1, 2),$$

$\therefore$ 以点 M, H, K, P 为顶点的四边形是正方形,

①当 $MH \perp MK$ 时, H 点在 AB 上, K 点在 CD 上,

$\therefore H$ 点在抛物线上,

$$\therefore H(3, 0) \text{ 或 } H(0, 3),$$

$$\text{当 } H(3, 0) \text{ 时, } MH=2\sqrt{2},$$

$$\therefore KH=4,$$

$$\therefore K(3, 4)$$

$$\therefore HK \text{ 的中点为 } (3, 2), \text{ 则 } MP \text{ 的中点也为 } (3, 2),$$

$$\therefore P(5, 2);$$

$$\text{当 } H(0, 3) \text{ 时, } MH=\sqrt{2},$$

$$\therefore KH=2,$$

$$\therefore K(0, 1),$$

$$\therefore HK \text{ 的中点为 } (0, 2), \text{ 则 } MP \text{ 的中点也为 } (0, 2),$$

$$\therefore P(-1, 2);$$

图 1