

2013 年长沙市初中毕业学业水平考试试卷

数 学

注意事项:

- 1、答题前, 请考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 并认真核对条形码上的姓名、准考证号、考场和座位号;
- 2、必须在答题卡上答题, 在草稿纸、试题卷上答题无效;
- 3、答题时, 请考生注意各大题题号后面的答题提示;
- 4、请勿折叠答题卡, 保持字体工整、笔迹清晰、卡面清洁;
- 5、答题卡上不得使用涂改液、涂改胶和贴纸;
- 6、本学科试卷共 26 个小题, 考试时量 120 分钟, 满分 120 分。

一、选择题(在下列各题的四个选项中, 只有一项是符合题意的。请在答题卡中填涂符合题意的选项。本题共 10 个小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. 下列实数是无理数的是

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{3}$

2. 小星同学在“百度”搜索引擎中输入“中国梦, 我的梦”, 能搜索到与之相关的结果的条数约为 61 700 000, 这个数用科学记数法表示为

- A. 617×10^5 B. 6.17×10^6
C. 6.17×10^7 D. 0.617×10^8

3. 如果一个三角形的两边长分别为 2 和 4, 则第三边长可能是

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

4. 已知 $\odot O_1$ 的半径为 1 cm , $\odot O_2$ 的半径为 3 cm , 两圆的圆心距 O_1O_2 为 4 cm , 则两圆的位置关系是

- A. 外离 B. 外切 C. 相交 D. 内切

5. 下列计算正确的是

- A. $a^6 \div a^3 = a^3$ B. $(a^2)^3 = a^8$
C. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ D. $a^2 + a^2 = a^4$

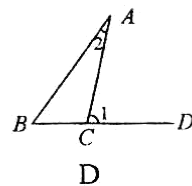
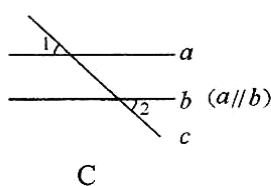
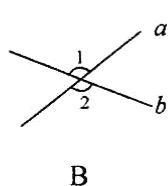
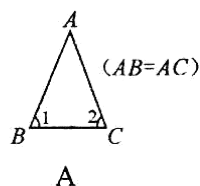
6. 某校篮球队 12 名同学的身高如下表:

身高 (cm)	180	186	188	192	195
人数	1	2	5	3	1

则该校篮球队 12 名同学身高的众数是 (单位: cm)

- A. 192 B. 188 C. 186 D. 180

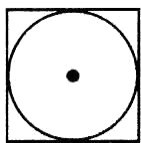
7. 下列各图中, $\angle 1$ 大于 $\angle 2$ 的是



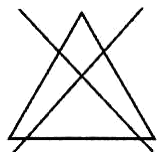
8. 下列多边形中, 内角和与外角和相等的是

- A. 四边形 B. 五边形 C. 六边形 D. 八边形

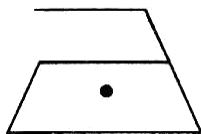
9. 在下列某品牌 T 恤的四个洗涤说明图案的设计中, 没有运用旋转或轴对称知识的是



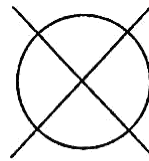
A



B



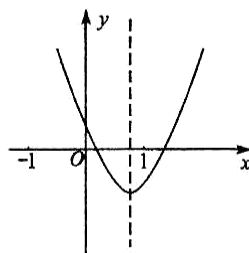
C



D

10. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 则下列关系式错误的是

- A. $a > 0$ B. $c > 0$
C. $b^2 - 4ac > 0$ D. $a + b + c > 0$



(第 10 题)

二、填空题 (本题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

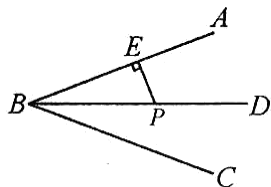
11. 计算: $\sqrt{8} - \sqrt{2} =$ _____.

12. 因式分解: $x^2 + 2x + 1 =$ _____.

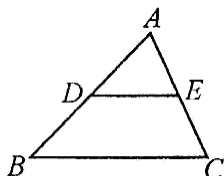
13. 已知 $\angle A = 67^\circ$, 则 $\angle A$ 的余角等于 _____ 度.

14. 方程 $\frac{2}{x+1} = \frac{1}{x}$ 的解为 $x =$ _____.

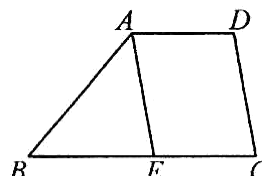
15. 如图, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, P 是 BD 上的一点, $PE \perp BA$ 于点 E , $PE = 4\text{cm}$, 则点 P 到边 BC 的距离为 _____ cm .



(第 15 题)



(第 16 题)



(第 18 题)

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D , 点 E 分别是边 AB , AC 的中点, 则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的周长之比等于 _____.

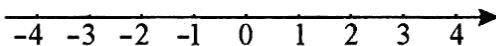
17. 在一个不透明的盒子中装有 n 个小球, 它们只有颜色上的区别, 其中有 2 个红球. 每次摸球前先将盒中的球摇匀, 随机摸出一个球记下颜色后再放回盒中, 通过大量重复摸球实验后发现, 摸到红球的频率稳定于 0.2, 那么可以推算出 n 大约是 _____.

18. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, $AE \parallel CD$ 交 BC 于点 E , 若 $AD = 2$, $BC = 5$, 则边 CD 的长是 _____.

三、解答题（本题共 2 个小题，每小题 6 分，共 12 分）

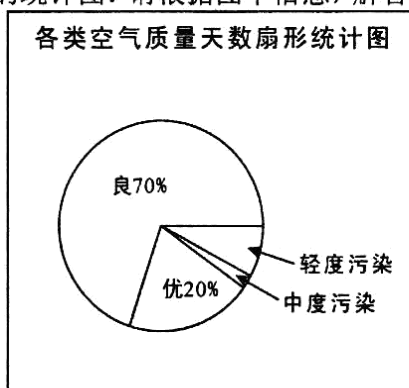
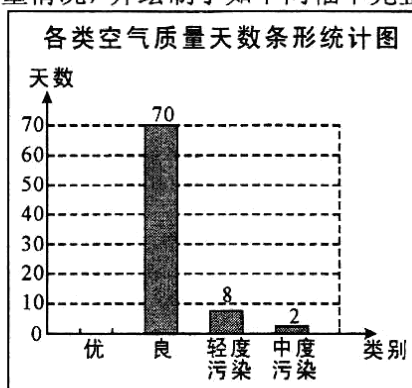
19. 计算： $|-3|+(-2)^2-(\sqrt{5}+1)^0$.

20. 解不等式组 $\begin{cases} 2(x+1) \leq x+3, & \text{①} \\ x-4 < 3x, & \text{②} \end{cases}$ 并将其解集在数轴上表示出来.

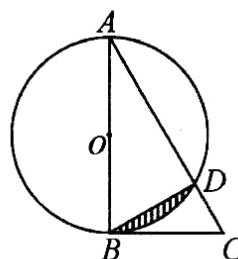


四、解答题（本题共 2 个小题，每小题 8 分，共 16 分）

21. “宜居长沙”是我们的共同愿景，空气质量倍受人们关注. 我市某空气质量监测站点检测了该区域每天的空气质量情况，统计了 2013 年 1 月份至 4 月份若干天的空气质量情况，并绘制了如下两幅不完整的统计图. 请根据图中信息，解答下列问题：



- (1) 统计图共统计了_____天的空气质量情况.
 (2) 请将条形统计图补充完整，并计算空气质量为“优”所在扇形的圆心角度数.
 (3) 从小源所在班级的 40 名同学中，随机选取一名同学去该空气质量监测站点参观，则恰好选到小源的概率是多少？
22. 如图， $\triangle ABC$ 中，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 D ， $\angle DBC = \angle BAC$.
- (1) 求证： BC 是 $\odot O$ 的切线；
 (2) 若 $\odot O$ 的半径为 2， $\angle BAC = 30^\circ$ ，求图中阴影部分的面积.



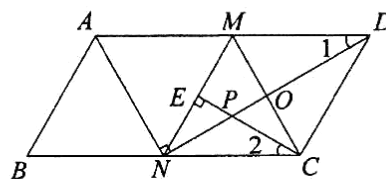
(第 22 题)

五、解答题（本题共 2 个小题，每小题 9 分，共 18 分）

23. 为方便市民出行，减轻城市中心交通压力，长沙市正在修建贯穿星城南北、东西的地铁 1、2 号线. 已知修建地铁 1 号线 24 千米和 2 号线 22 千米共需投资 265 亿元；若 1 号线每千米的平均造价比 2 号线每千米的平均造价多 0.5 亿元.
- (1) 求 1 号线，2 号线每千米的平均造价分别是多少亿元？
 (2) 除 1，2 号线外，长沙市政府规划到 2018 年还要再建 91.8 千米的地铁线网. 据预算，这 91.8 千米地铁线网每千米的平均造价是 1 号线每千米的平均造价的 1.2 倍，则还需投资多少亿元？

24. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, M, N 分别是 AD, BC 的中点, $\angle AND = 90^\circ$, 连接 CM 交 DN 于点 O .

- (1) 求证: $\triangle ABN \cong \triangle CDM$;
 (2) 过点 C 作 $CE \perp MN$ 于点 E , 交 DN 于点 P ,
 若 $PE = 1$, $\angle 1 = \angle 2$, 求 AN 的长.



(第 24 题)

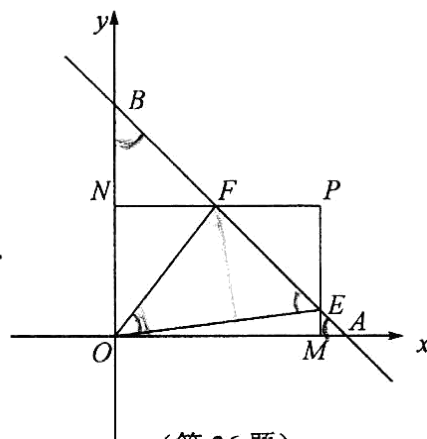
六、解答题 (本题共 2 个小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

25. 设 a, b 是任意两个不等实数, 我们规定: 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的所有取值的全体叫做闭区间, 表示为 $[a, b]$. 对于一个函数, 如果它的自变量 x 与函数值 y 满足: 当 $m \leq x \leq n$ 时, 有 $m \leq y \leq n$, 我们就称此函数是闭区间 $[m, n]$ 上的“闭函数”.

- (1) 反比例函数 $y = \frac{2013}{x}$ 是闭区间 $[1, 2013]$ 上的“闭函数”吗? 请判断并说明理由;
 (2) 若一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 是闭区间 $[m, n]$ 上的“闭函数”, 求此函数的解析式;
 (3) 若二次函数 $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的“闭函数”, 求实数 a, b 的值.

26. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -x + 2$ 与 x 轴, y 轴分别交于点 A , 点 B , 动点 $P(a, b)$ 在第一象限内, 由点 P 向 x 轴, y 轴所作的垂线 PM, PN (垂足为 M, N) 分别与直线 AB 相交于点 E, F , 当点 $P(a, b)$ 运动时, 矩形 $PMON$ 的面积为定值 2.

- (1) 求 $\angle OAB$ 的度数;
 (2) 求证: $\triangle AOF \sim \triangle BEO$;
 (3) 当点 E, F 都在线段 AB 上时, 由三条线段 AE, EF, BF 组成一个三角形, 记此三角形的外接圆面积为 S_1 , $\triangle OEF$ 的面积为 S_2 .
 试探究: $S_1 + S_2$ 是否存在最小值? 若存在, 请求出该最小值; 若不存在, 请说明理由.



(第 26 题)

2013 长沙中考数学试卷答案及解析

一、选择题

1、D 【详解】根据无理数的定义可知，只有 D 是无理数

2、C 【详解】根据科学记数法的原则可知选 C

3、B 【详解】三角形任意两边之和大于第三边、任意两边之差小于第三边，只有 B 符合

4、B 【详解】因为 $1+3=4$ ，即两圆半径之和等于圆心距，所以两圆外切

5、A 【详解】B、 $(a^2)^3=a^{2 \times 3}=a^6$

$$C、(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$D、a^2+a^2=2a^2$$

6、B 【详解】众数就是出现次数最多的数，表格中 188 出现了 5 次，是最多的，所以 12 名同学身高的众数是 188，选 B

7、D 【详解】A、 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 $\angle 1=\angle 2$ ；B、 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角，所以 $\angle 1=\angle 2$ ；C、对顶角相等与根据两直线平行、同位角相等性质可知 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ ；D、由于 $\angle 1$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，且 $\angle 1=\angle B+\angle 2$ ，所以 $\angle 1>\angle 2$ ；综上所述，选 D

8、A 【详解】所有多边形的外角和都是 360° ，而内角和公式为 $180^\circ (n-2)$ ，其中 n 表示多边形的边数，所以当 $180^\circ (n-2)=360^\circ$ 时， $n=4$ ，即四边形的内角和与外角和相等，选 A。

9、C 【详解】A、D 既是轴对称图形，也是中心对称图形，B 是轴对称图形，所以只能选 C

10、D 【详解】观察图像可知，该抛物线开口向上，所以 $a>0$ ，即 A 对；抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，所以 $c>0$ ，即 B 对；抛物线与 x 轴有两个交点，

所以 $b^2-4ac > 0$ ，即 C 对；抛物线顶点在 x 轴下方，即最小值为 $a+b+c < 0$ ，所以 D 错。

二、填空题

11、 $\sqrt{2}$

【详解】 $\sqrt{8}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

12、 $(x+1)^2$

【详解】 $x^2+2x+1=(x+1)^2$

13、23

【详解】如果两角互余，那么这两个角的和为 90° ，所以 $\angle A$ 的余角等于 $90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$

14、1

【详解】 $\frac{2}{x+1} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x = x+1 \Rightarrow x=1$

15、4

【详解】根据角平分线的性质可知，角平分线上的点到角两边的距离相等，所以为 4cm

16、1:2

【详解】由于点 D、E 分别是 AB、AC 的中点，即 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $DE \parallel BC$ 、且 $DE=0.5BC$ ，所以 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，两三角形的周长比等于相似比，即为 $0.5:1=1:2$

17、10

【详解】每次摸出红球的可能性为 $\frac{2}{n}$ ，所以有 $\frac{2}{n}=0.2$ ，即 $n=10$

18、3

【详解】因为 $AE \parallel CD$ 、 $AD \parallel BC$ ，所以 $\angle AEB = \angle C = 80^\circ$ 、 $CD = AE$ 、 $AD = EC$ ；
在 $\triangle ABE$ 中，根据三角形内角和可知 $\angle BAE = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ$ ，即
 $AE = BE = BC - EC = 5 - 2 = 3$ ，所以 $CD = 3$

三、解答题

19、6

【详解】原式 $= 3 + 4 - 1 = 6$

20、 $-2 < x \leq 1$

【详解】因为 $2(x+1) \leq x+3$ ，化简得 $x \leq 1$ ；因为 $x-4 < 3x$ ，化简得 $2x > -4$ ，即 $x > -2$ ；所以该不等式组的解集为 $-2 < x \leq 1$ （数轴表示略）

四、解答题

21、100、图略、 72° 、 $\frac{1}{40}$

【详解】（1）观察扇形统计图可知空气质量良的天数占70%，所以总天数是 $70 \div 70\% = 100$ （天）；

（2）条形统计图中，空气质量优的天数为 $100 \times 20\% = 20$ （天），所以要补画一个高20的长方形；空气质量优在扇形统计图中对应的圆心角度数为 $360^\circ \times 20\% = 72^\circ$ ；

（3）恰好选到小源的概率是 $\frac{1}{40}$

22、 $\frac{157}{75}-\sqrt{3}$

【详解】(1) $\because AB$ 是直径

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ$$

$$\text{又} \because \angle BAC = \angle DBC$$

$$\therefore \angle ABD + \angle DBC = \angle ABD + \angle BAC = 90^\circ, \text{ 即 } \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore BC \text{ 是圆 } O \text{ 的切线}$$

(2) 如图连接 OD ，由圆心角的性质可知 $\angle BOD = 60^\circ$ ，即 $\triangle BCD$ 是边长为 2 的等边三角形，所以 $S_{\text{阴影}} = \frac{60}{360} \times \pi \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \frac{157}{75} - \sqrt{3}$

五、解答题

23、6、5.5、660.96

【详解】(1) 1 号线总共比 2 号线多花费 $0.5 \times 24 = 12$ (亿元)，所以 2 号线每千米平均造价为 $(265 - 12) \div (24 + 22) = 5.5$ (亿元)、1 号线每千米平均造价为 $5.5 + 0.5 = 6$ (亿元) (也可以用方程解)；

(2) 还需投资 $91.8 \times 6 \times 1.2 = 660.96$ (亿元)。

24、 $2\sqrt{3}$

【详解】(1) $\because \angle ABN = \angle CDM$ 、 $AB = CD$ 、 $BN = DM$

$$\therefore \triangle ABN \cong \triangle CDM \text{ (SAS)}$$

(2) $\because M$ 、 O 分别为 AD 、 ND 的中点

$$\therefore AN \parallel MO \text{、且 } AN = 2MO$$

$$\therefore \angle MOD = \angle AND = 90^\circ \text{ , 即平行四边形 } CDMN \text{ 是菱形}$$

在 $Rt\triangle MOD$ 与 $Rt\triangle NEC$ 中

$$\because \angle 1 = \angle 2 \text{、} MD = NC$$

$$\therefore Rt\triangle MOD \cong Rt\triangle NEC$$

$$\therefore MO = NE$$

根据菱形的性质可知， $\angle MND = \angle CND$ 、 $\angle 1 = \angle CND$ ，所以 $\angle MND = \angle CND = \angle 2 = 30^\circ$ ，所以在 $Rt\triangle ENP$ 中 $NE = PE \div \tan 30^\circ = \sqrt{3}$ ，即 $AN = 2\sqrt{3}$

六、解答题

$$25、\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{11}{5} \\ b = \frac{9 + \sqrt{109}}{2} \end{cases}$$

【详解】(1) 反比例函数 $y = \frac{2013}{x}$ 在第一象限， y 随 x 的增大而缩小，

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时， } y = \frac{2013}{1} = 2013$$

$$\text{当 } x = 2013 \text{ 时， } y = \frac{2013}{2013} = 1$$

所以当 $1 \leq x \leq 2013$ 时，有 $1 \leq y \leq 2013$ ，符合闭函数的定义，所以是闭函数；

(2) 分两种情况讨论, k 大于或者小于 0:

①当 $k > 0$ 时: 此一次函数 y 随 x 的增大而增大, 所以根据闭函数的定义有 $\begin{cases} km+b=m & \textcircled{1} \\ kn+b=n & \textcircled{2} \end{cases}$, ①-②得 $k=1$ 代入①得 $b=0$, 所以此时一次函数的解析式为 $y=x$;

②当 $k < 0$ 时: 此一次函数 y 随 x 的增大反而减小, 所以根据闭函数的定义有 $\begin{cases} km+b=n & \textcircled{1} \\ kn+b=m & \textcircled{2} \end{cases}$, ①-②得 $k=-1$ 代入①得 $b=m+n$, 所以此时一次函数的解析式为 $y=-x+m+n$;

(3) 因为 $y = \frac{1}{5}(x-2)^2 - \frac{11}{5}$, 所以该二次函数开口向上、最小值是 $-\frac{11}{5}$, 且当 $x < 2$ 时, y 随 x 的增大反而减小, 当 $x > 2$ 时, y 随 x 的增大而增大:

①当 $b \leq 2$ 时: 此二次函数 y 随 x 的增大反而减小, 所以根据闭函数的

定义有 $\begin{cases} \frac{1}{5}a^2 - \frac{4}{5}a - \frac{7}{5} = b & \textcircled{1} \\ \frac{1}{5}b^2 - \frac{4}{5}b - \frac{7}{5} = a & \textcircled{2} \end{cases}$, ①-②得 $a+b=-1$ 、即 $b=-a-1$ 代入①得

$a^2+a-2=0$, 解得 $a_1=1$ 、 $a_2=-2$, 所以 $b_1=-2$ 、 $b_2=1$, 由于 $b > a$, 所以只能取 $a=-2$ 、 $b=1$;

②当 $a < 2 < b$ 时: 此时最小值就是 $-\frac{11}{5} = a$, 根据闭函数的定义有 b 可能等于 $\frac{1}{5}a^2 - \frac{4}{5}a - \frac{7}{5}$ 、也可能等于 $\frac{1}{5}b^2 - \frac{4}{5}b - \frac{7}{5}$; 当 $b = \frac{1}{5}a^2 - \frac{4}{5}a - \frac{7}{5}$ 时, 由于

$\frac{1}{5}a^2 - \frac{4}{5}a - \frac{7}{5} = \frac{1}{5} \times \left(-\frac{11}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} \times \left(-\frac{11}{5}\right) - \frac{7}{5} = \frac{166}{125}$, 即 $b = \frac{166}{125} < 2$, 不合题意舍去;

当 $b = \frac{1}{5}b^2 - \frac{4}{5}b - \frac{7}{5}$ 时, 解得 $b = \frac{9 \pm \sqrt{109}}{2}$, 由于 $b > 2$, 所以取 $b = \frac{9 + \sqrt{109}}{2}$;

③当 $a \geq 2$ 时：此二次函数 y 随 x 的增大而增大，所以根据闭函数的定

义有 $\begin{cases} \frac{1}{5}a^2 - \frac{4}{5}a - \frac{7}{5} = a \text{①} \\ \frac{1}{5}b^2 - \frac{4}{5}b - \frac{7}{5} = b \text{②} \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = \frac{9 - \sqrt{109}}{2} \\ b = \frac{9 + \sqrt{109}}{2} \end{cases}$ ，因为 $\frac{9 - \sqrt{109}}{2} < 0$ ，所以舍

去；

综上所述， $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -\frac{11}{5} \\ b = \frac{9 + \sqrt{109}}{2} \end{cases}$

26、 45° 、 $2(3 - 2\sqrt{2})\pi + 2\sqrt{2} - 2$

【详解】(1) 对于直线 $y = -x + 2$

当 $x = 0$ 时， $y = 2$ ，即 $B(0, 2)$

当 $y = 0$ 时， $x = 2$ ，即 $A(2, 0)$

所以在 $Rt\triangle AOB$ 中， $OA = OB = 2$ ，即 $\angle OAB = 45^\circ$

(2) 点 F 的纵坐标为 b ，且点 F 在直线 $y = -x + 2$ 上，所以点 F 的横坐标为 $2 - b$ ，即 $F(2 - b, b)$ ；同理可知 $E(a, 2 - a)$ 。证明两三角形相似要找两对相等角，由 (1) 知 $\angle OAF = \angle EBO = 45^\circ$ ，现在不妨证 $\angle AOF = \angle BEO$ ，因为 $\angle BEO = \angle AOE + \angle OAF = \angle AOE + 45^\circ$ ，而 $\angle AOF = \angle AOE + \angle EOF$ ，所以我们现在只要证明 $\angle EOF = 45^\circ$ 即可！

由勾股定理可知： $OF^2 = b^2 + (2 - b)^2$ 、 $OE^2 = a^2 + (2 - a)^2$ 、 $EF^2 = 2(a + b - 2)^2$ ，

由于矩形 $PMON$ 的面积为 $ab = 2$ ，我们不妨把 $b = \frac{2}{a}$ 代入消元可得

$$OF^2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{a}\right)^2, \quad EF^2 = 2\left(a + \frac{2}{a} - 2\right)^2$$

(3) 因为 $AE^2 = 2(2-a)^2 = 2(a^2 - 4a + 4)$ 、 $BF^2 = 2(2-b)^2 = 2(b^2 - 4b + 4)$ 、
 $EF^2 = 2(a+b-2)^2 = 2(a^2 + b^2 - 4a - 4b + 8)$ ，所以 $EF^2 = AE^2 + BF^2$ ，即由 AE、
 EF、BF 构成的三角形是直角三角形，其中 EF 是斜边，根据直角三角形的外接圆性质可知，EF 为其外接圆的直径，那么半径为 $\frac{1}{2}EF$ ，

$$S_1 = \pi \times \left(\frac{EF}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}(a+b-2)^2; \text{ 而由 (2) 可知}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}EF \times OG = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}(a+b-2) = a+b-2$$

所以 $S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2}(a+b-2)^2 + (a+b-2)$ ，不妨设 $t = a+b-2$ ，那么

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2}t^2 + t = \frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2\pi}$$

数在 $t > -\frac{1}{\pi}$ 时， $S_1 + S_2$ 随 t 的增大而增大，所以 t 取最小值时 $S_1 + S_2$ 也

取最小值；因为 $t = a+b-2 = a + \frac{2}{a} - 2$ ，所以当 $a = \frac{2}{a}$ ，即 $a = b = \sqrt{2}$ 时 t

最小，此时面积和最小值为

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2}(2\sqrt{2}-2)^2 + (2\sqrt{2}-2) = 2(3-2\sqrt{2})\pi + 2\sqrt{2}-2$$