

2023 年四川省资阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题意）

1. (4 分) $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

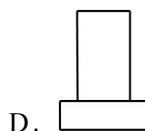
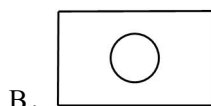
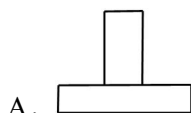
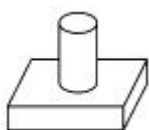
A. $\frac{1}{2}$

B. -2

C. $-\frac{1}{2}$

D. 2

2. (4 分) 如图所示的几何体的俯视图是 ()



3. (4 分) 岷河引水工程设计供水总人口 489 万人，数 489 万用科学记数法表示为 ()

A. 4.89×10^6

B. 4.89×10^5

C. 0.489×10^7

D. 48.9×10^5

4. (4 分) 下列计算正确的是 ()

A. $2a+3b=5ab$

B. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

C. $2a^2 \cdot 3b=6ab$

D. $(a^3)^2=a^5$

5. (4 分) 某学校在 6 月 6 日全国爱眼日当天，组织学生进行了视力测试。小红所在的学习小组每人视力测试的结果分别为：5.0，4.8，4.5，4.8，4.6，这组数据的众数和中位数分别为 ()

A. 4.8，4.74

B. 4.8，4.5

C. 5.0，4.5

D. 4.8，4.8

6. (4 分) 数轴上点 A 到原点的距离为 $\sqrt{3}$ ，则点 A 所表示的数是 ()

A. $\sqrt{3}$

B. $-\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

7. (4 分) 体重指数 (BMI) 是体重 (千克) 与身高 (米) 的平方的比值，是反映人体胖瘦的重要指标 (如表所示)。小张的身高 1.70 米，体重 70 千克，则小张的体重状况是 ()

体重指数 (BMI) 的范围	体重状况
体重指数 < 18.5	消瘦

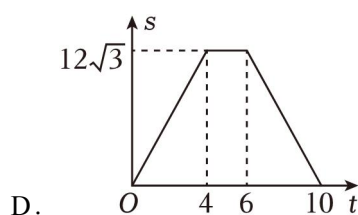
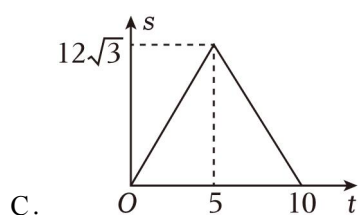
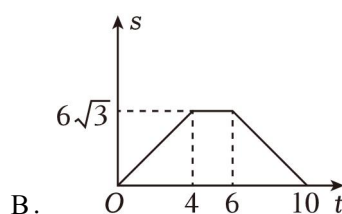
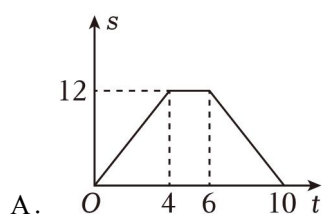
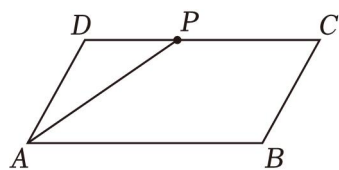
$18.5 \leq \text{体重指数} \leq 23.9$	正常
$23.9 < \text{体重指数} \leq 26.9$	超重
体重指数 > 26.9	肥胖

A. 消瘦 B. 正常 C. 超重 D. 肥胖

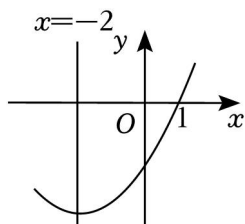
8. (4分) 下列说法不正确的是 ()

- A. 方程 $3x^2 + 5x - 4 = 0$ 有两个不相等的实数根
- B. 若 $\triangle A'B'C'$ 由 $\triangle ABC$ 旋转得到, 则它们的对应角、对应边以及对应边上的高都相等
- C. 用尺规作图能完成: 过一点作已知直线的垂线
- D. 在同一平面内, 若两个角的两边分别平行, 则这两个角相等

9. (4分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle D = 120^\circ$, $AD = 2\sqrt{3}$ 厘米, $AB = 4\sqrt{3}$ 厘米, 点 P 从点 D 出发以每秒 $\sqrt{3}$ 厘米的速度, 沿 $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 在平行四边形的边上匀速运动至点 A . 设点 P 的运动时间为 t 秒, $\triangle ADP$ 的面积为 s 平方厘米, 下列图中表示 s 与 t 之间函数关系的是 ()



10. (4分) 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -2$, 且过点 $(1, 0)$. 现有以下结论: ① $abc < 0$; ② $5a + c = 0$; ③ 对于任意实数 m , 都有 $2b + bm \leq 4a - am^2$; ④ 若点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是图象上任意两点, 且 $|x_1 + 2| < |x_2 + 2|$, 则 $y_1 < y_2$, 其中正确的结论是 ()



A. ①②

B. ②③④

C. ①②④

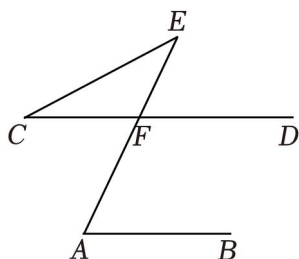
D. ①②③④

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分）

11.（4 分）使代数式 $\sqrt{x-6}$ 有意义的 x 的取值范围是 _____.

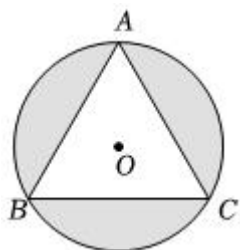
12.（4 分）在一个不透明的袋子中装有红、黄、绿三种颜色的小球共 12 个，其中红球 2 个，绿球 4 个，这些小球除颜色外没有任何其它区别．袋中的小球搅匀后，从袋子中随机取出 1 个小球，则取到黄球的概率是 _____.

13.（4 分）如图， $AB \parallel CD$ ， AE 交 CD 于点 F ， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle C = 25^\circ$ ，则 $\angle E =$ _____.

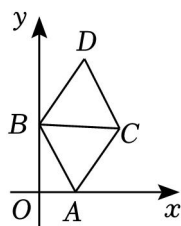


14.（4 分）计算机的二进制数据是用 0 和 1 两个数码来表示的数，进位规则是“逢二进一”．二进制数和十进制数可以互换例如，二进制数“01011011”换成十进制数表示的数为 $0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 91$ ．依此算法，二进制数“01001001”换成十进制数表示的数为 _____.

15.（4 分）如图，边长为 6 的正三角形 ABC 内接于 $\odot O$ ，则图中阴影部分的面积是 _____.



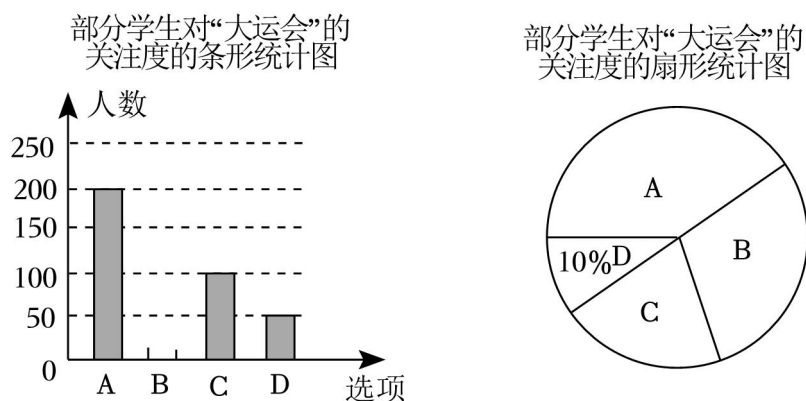
16.（4 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上移动，将 $\triangle ABC$ 沿 BC 所在直线翻折得到 $\triangle DBC$ ，则 OD 的最大值为 _____.



三、解答题（本大题共 8 个小题，共 86 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（9 分）先化简，再求值： $\frac{a}{a^2+2a+1} \div (1-\frac{1}{a+1})$ ，其中 $a = -2$ 。

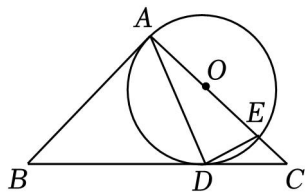
18.（10 分）第 31 届世界大学生夏季运动会（简称“大运会”）将于 2023 年 7 月 28 日至 8 月 8 日在成都举行。某高校为了了解学生对“大运会”的关注度，设置了 A（非常关注）、B（比较关注）、C（很少关注）、D（没有关注）四个选项，随机抽取了部分学生进行了问卷调查，并将调查结果绘制成如图所示的两幅不完整的统计图。根据图中所提供的信息，解答下列问题：



- （1）本次调查共抽取了 _____ 名学生，并补全条形统计图；
 - （2）求 A 所在扇形的圆心角度数；
 - （3）学校将在 A 选项中的甲、乙、丙、丁四人里随机选取两人参加志愿者服务，用画树状图或列表法，列举出所有可能的结果，并求出甲、乙同时被选中的概率。
- 19.（10 分）端午节到来之际，小明家的经销店准备销售粽子和咸鸭蛋。据了解，购进 500 个粽子和 200 个咸鸭蛋共需 1700 元，已知一个粽子的进价比一个咸鸭蛋的进价多 2 元。
- （1）求每个粽子和每个咸鸭蛋的进价分别为多少元？
 - （2）若每个粽子的售价为 5 元，每个咸鸭蛋的售价为 2 元。小明父亲打算购进粽子和咸鸭蛋共 1000 个，全部售完后利润不低于 1600 元，求至少购进多少个粽子？
- 20.（10 分）如图，已知 $\odot O$ 的圆心 O 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上，与 AC 相交于 A 、 E 两点，且与边 BC 相切于点 D ，连结 DE 。

(1) 若 $BA = BD$, 求证: AB 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $CD = 4$, $CE = 2$, 求 $\odot O$ 的半径.



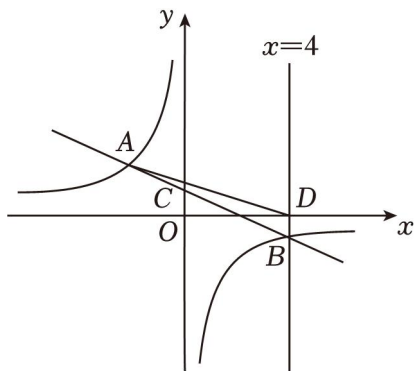
21. (11 分) 如图, 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象交于点 A

$(-2, m)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 C . 直线 $x = 4$ 经过点 B 与 x 轴交于点 D , 连结 AD .

(1) 求 k 、 b 的值;

(2) 求 $\triangle ABD$ 的面积;

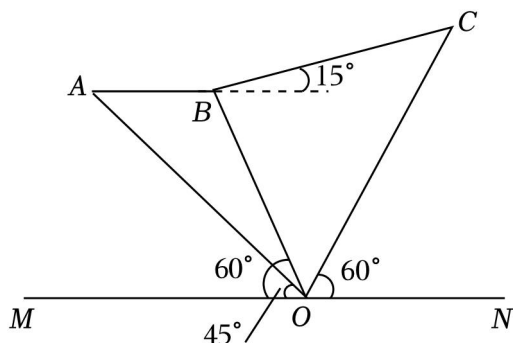
(3) 直接写出一个一次函数的表达式, 使它的图象经过点 C 且 y 随 x 的增大而增大.



22. (11 分) 如图, 在某机场的地面雷达观测站 O , 观测到空中点 A 处的一架飞机的仰角为 45° , 飞机沿水平线 MN 方向飞行到达点 B 处, 此时观测到飞机的仰角为 60° , 飞机继续沿与水平线 MN 成 15° 角的方向爬升到点 C 处, 此时观测到飞机的仰角为 60° . 已知 $OA = 9\sqrt{2}$ 千米. (A 、 B 、 C 、 O 、 M 、 N 在同一竖直平面内)

(1) 求 O 、 B 两点之间的距离;

(2) 若飞机的飞行速度保持 12 千米/分钟, 求飞机从点 B 飞行到点 C 所用的时间是多少分钟? ($\sqrt{2} \approx 1.414$, 结果精确到 0.01)

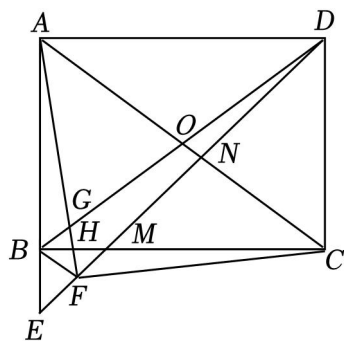


23. (12分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , $\angle ADC$ 的平分线 DE 分别交 AC 、 BC 于点 N 、 M , 交 AB 的延长线于点 E , F 为 EM 的中点, 连结 AF 、 BF 、 CF , AF 分别交 BD 、 BC 于点 G 、 H .

(1) 求证: $AE = BC$;

(2) 探究 AF 与 CF 的关系, 并说明理由;

(3) 若 $AD = 8$, $CD = 6$, 求 OG 的长.



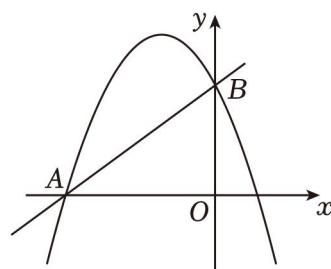
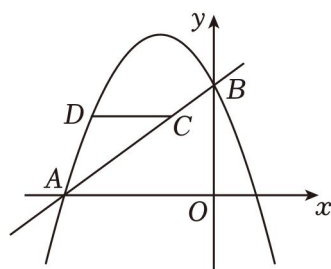
24. (13分) 如图, 直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, 抛物线 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$

经过 A 、 B 两点.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 D 是抛物线在第二象限内的点, 过点 D 作 x 轴的平行线与直线 AB 交于点 C , 求 DC 的长的最大值;

(3) 点 Q 是线段 AO 上的动点, 点 P 是抛物线在第一象限内的动点, 连结 PQ 交 y 轴于点 N . 是否存在点 P , 使 $\triangle ABQ$ 与 $\triangle BQN$ 相似, 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.



备用图

2023 年四川省资阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题意）

1. (4 分) $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. -2

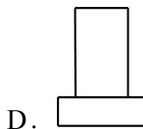
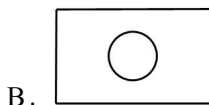
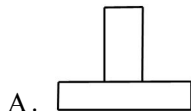
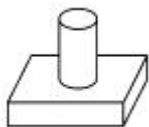
C. $-\frac{1}{2}$

D. 2

【解答】解： $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 $\frac{1}{2}$ ；

故选：A.

2. (4 分) 如图所示的几何体的俯视图是 ()



【解答】解：从上面看，是一个矩形，矩形的内部有一个圆．

故选：B.

3. (4 分) 毗河引水工程设计供水总人口 489 万人，数 489 万用科学记数法表示为 ()

A. 4.89×10^6

B. 4.89×10^5

C. 0.489×10^7

D. 48.9×10^5

【解答】解：489 万 = 4890000 = 4.89×10^6 ．

故选：A.

4. (4 分) 下列计算正确的是 ()

A. $2a+3b=5ab$

B. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

C. $2a^2 \cdot 3b=6ab$

D. $(a^3)^2=a^5$

【解答】解：A、 $2a$ 与 $3b$ 不能合并，故 A 不符合题意；

B、 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ，故 B 符合题意；

C、 $2a^2 \cdot 3b = 6a^2b$ ，故 C 不符合题意；

D、 $(a^3)^2 = a^6$ ，故 D 不符合题意；

故选：B.

5. (4分) 某学校在 6 月 6 日全国爱眼日当天，组织学生进行了视力测试. 小红所在的学习小组每人视力测试的结果分别为：5.0, 4.8, 4.5, 4.8, 4.6, 这组数据的众数和中位数分别为 ()

A. 4.8, 4.74 B. 4.8, 4.5 C. 5.0, 4.5 D. 4.8, 4.8

【解答】解：把这组数据从小到大排列为 4.5, 4.6, 4.8, 4.8, 5.0, 排在中间的数是 4.8, 故中位数是 4.8;

这组数据中 4.8 出现的次数最多，故众数为 4.8.

故选：D.

6. (4分) 数轴上点 A 到原点的距离为 $\sqrt{3}$ ，则点 A 所表示的数是 ()

A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

【解答】解： $\because$ 表示 $\pm\sqrt{3}$ 的点到原点的距离为 $\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 A 表示的数是 $\pm\sqrt{3}$,

故选：C.

7. (4分) 体重指数 (BMI) 是体重 (千克) 与身高 (米) 的平方的比值，是反映人体胖瘦的重要指标 (如表所示). 小张的身高 1.70 米，体重 70 千克，则小张的体重状况是 ()

体重指数 (BMI) 的范围	体重状况
体重指数 < 18.5	消瘦
$18.5 \leq \text{体重指数} \leq 23.9$	正常
$23.9 < \text{体重指数} \leq 26.9$	超重
体重指数 > 26.9	肥胖

A. 消瘦 B. 正常 C. 超重 D. 肥胖

【解答】解：由题意可得，小张的体重指数为： $\frac{70}{1.70^2} \approx 24.2$,

$\because 23.9 < 24.2 \leq 26.9$,

$\therefore$ 小张的体重状况是超重.

故选：C.

8. (4分) 下列说法不正确的是 ()

- A. 方程 $3x^2+5x-4=0$ 有两个不相等的实数根
- B. 若 $\triangle A'B'C'$ 由 $\triangle ABC$ 旋转得到, 则它们的对应角、对应边以及对应边上的高都相等
- C. 用尺规作图能完成: 过一点作已知直线的垂线
- D. 在同一平面内, 若两个角的两边分别平行, 则这两个角相等

【解答】解: A、方程 $3x^2+5x-4=0$, $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 73 > 0$,

$\therefore$ 方程 $3x^2+5x-4=0$ 有两个不相等的实数根, 故本选项正确, 不符合题意;

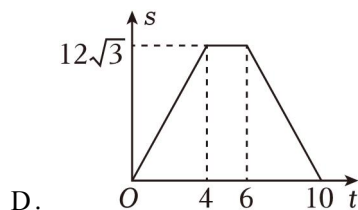
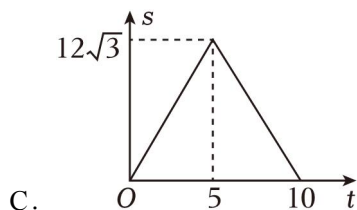
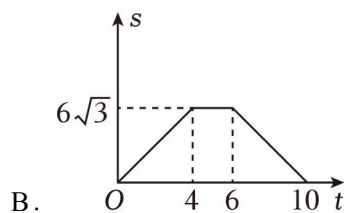
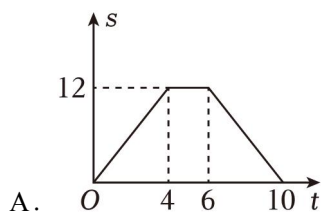
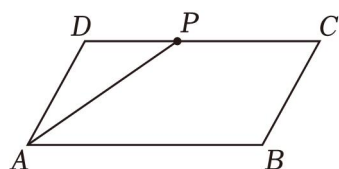
B、若 $\triangle A'B'C'$ 由 $\triangle ABC$ 旋转得到, 则它们的对应角、对应边以及对应边上的高都相等, 正确, 本选项不符合题意;

C、用尺规作图能完成: 过一点作已知直线的垂线, 正确, 本选项不符合题意;

D、在同一平面内, 若两个角的两边分别平行, 则这两个角相等, 错误这两个角也可能是互补, 本选项符合题意.

故选: D.

9. (4分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle D = 120^\circ$, $AD = 2\sqrt{3}$ 厘米, $AB = 4\sqrt{3}$ 厘米, 点 P 从点 D 出发以每秒 $\sqrt{3}$ 厘米的速度, 沿 $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 在平行四边形的边上匀速运动至点 A . 设点 P 的运动时间为 t 秒, $\triangle ADP$ 的面积为 s 平方厘米, 下列图中表示 s 与 t 之间函数关系的是 ()



【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB = 4\sqrt{3}$ 厘米,

$\therefore CD = AB = 4\sqrt{3}$ (厘米).

∵ 点 P 从点 D 出发以每秒 $\sqrt{3}$ 厘米的速度,
 ∴ 点 P 走完 CD 所用的时间为: $4\sqrt{3} \div \sqrt{3} = 4$ (秒).

∴ 当点 P 在 CD 上时, $0 \leq t \leq 4$. 故排除 C .

当 $t = 4$ 时, 点 P 在点 C 处. 过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 E .

∴ $\angle E = 90^\circ$.

∵ $\angle ADC = 120^\circ$,

∴ $\angle EAD = \angle ADC - \angle E = 30^\circ$.

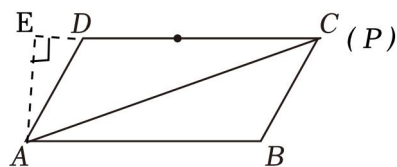
∵ $AD = 2\sqrt{3}$ 厘米,

∴ $DE = \sqrt{3}$ (厘米),

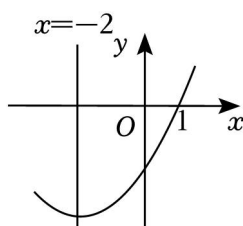
∴ $AE = 3$ (厘米).

∴ $\triangle ADP$ 的面积 $S = \frac{1}{2}CD \cdot AE = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 3 = 6\sqrt{3}$ (平方厘米).

故选: B .



10. (4 分) 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -2$, 且过点 $(1, 0)$. 现有以下结论: ① $abc < 0$; ② $5a + c = 0$; ③ 对于任意实数 m , 都有 $2b + bm \leq 4a - am^2$; ④ 若点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是图象上任意两点, 且 $|x_1 + 2| < |x_2 + 2|$, 则 $y_1 < y_2$, 其中正确的结论是 ()



- A. ①② B. ②③④ C. ①②④ D. ①②③④

【解答】解: 由图象可得,

$a > 0$, $b > 0$, $c < 0$,

∴ $abc < 0$, 故①正确,

∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -2$, 且过点 $(1, 0)$.

∴ $-\frac{b}{2a} = -2$, $a + b + c = 0$,

$$\therefore b = 4a,$$

$$\therefore a+b+c = a+4a+c = 0, \text{ 故 } 5a+c = 0, \text{ 故②正确,}$$

$$\therefore \text{当 } x = -2 \text{ 时, } y = 4a - 2b + c \text{ 取得最小值,}$$

$$\therefore am^2 + bm + c \geq 4a - 2b + c, \text{ 即 } 2b + bm \geq 4a - am^2 \text{ (} m \text{ 为任意实数), 故③错误,}$$

$$\therefore \text{抛物线开口向上, 对称轴为直线 } x = -2,$$

$$\text{若点 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \text{ 是图象上任意两点, 且 } |x_1+2| < |x_2+2|,$$

$$\therefore y_1 < y_2, \text{ 故④正确;}$$

故选: C.

二、填空题(本大题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

11. (4 分) 使代数式 $\sqrt{x-6}$ 有意义的 x 的取值范围是 $x \geq 6$.

【解答】解: $\therefore \sqrt{x-6}$ 有意义,

$$\therefore x - 6 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq 6.$$

故答案为: $x \geq 6$.

12. (4 分) 在一个不透明的袋子中装有红、黄、绿三种颜色的小球共 12 个, 其中红球 2 个, 绿球 4 个, 这些小球除颜色外没有任何其它区别. 袋中的小球搅匀后, 从袋子中随机取出 1 个小球, 则取到黄球的概率是 $\frac{1}{2}$.

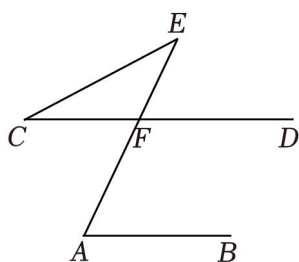
【解答】解: $\therefore$ 袋子中共有 12 个小球, 其中红球 2 个, 绿球 4 个,

$$\therefore \text{黄球有 6 个,}$$

$$\therefore \text{从袋子中随机取出 1 个小球, 则取到黄球的概率是 } \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

13. (4 分) 如图, $AB \parallel CD$, AE 交 CD 于点 F , $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 25^\circ$, 则 $\angle E =$ 35° .



【解答】解: $\therefore AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle EFD = \angle A,$$

$$\because \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EFD = 60^\circ,$$

$\because \angle EFD$ 是 $\triangle CEF$ 的一个外角,

$$\therefore \angle EFD = \angle E + \angle C,$$

$$\because \angle C = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle EFD - \angle C = 60^\circ - 25^\circ = 35^\circ,$$

14. (4分) 计算机的二进制数据是用 0 和 1 两个数码来表示的数, 进位规则是“逢二进一”

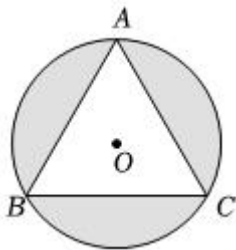
二进制数和十进制数可以互换例如, 二进制数“01011011”换成十进制数表示的数为 $0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 91$. 依此算法, 二进制数“01001001”换成十进制数表示的数为 73.

【解答】解: 由二进制和十进制的互换规则得:

$$01001001 = 0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 73.$$

故答案为: 73.

15. (4分) 如图, 边长为 6 的正三角形 ABC 内接于 $\odot O$, 则图中阴影部分的面积是 $12\pi - 9\sqrt{3}$.



【解答】解: 连接并延长 AO 交 BC 于点 D , 连接 OB 、 OC ,

$\because$ 边长为 6 的正三角形 ABC 内接于 $\odot O$,

$$\therefore AB = AC = BC = 6, \angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ, OB = OC = OA,$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle AOC$ 中,

$$\begin{cases} OA = OA \\ \angle AOB = \angle AOC, \\ OB = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle AOC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BAO = \angle CAO,$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ODB = 90^\circ, \quad BD = CD = \frac{1}{2}BC = 3,$$

$$\therefore \angle OBD = \angle OCD = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle BOC) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ,$$

$$\therefore \frac{OD}{BD} = \tan \angle OBD = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

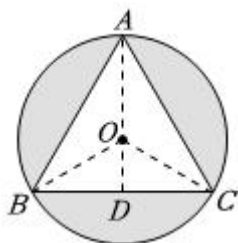
$$\therefore OD = \frac{\sqrt{3}}{3}BD = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 3 = \sqrt{3},$$

$$\therefore OB = OA = 2OD = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

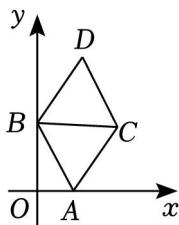
$$\therefore AD = OA + OD = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\odot O} - S_{\triangle ABC} = \pi \times (2\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 12\pi - 9\sqrt{3},$$

故答案为: $12\pi - 9\sqrt{3}$.



16. (4分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上移动, 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 所在直线翻折得到 $\triangle DBC$, 则 OD 的最大值为 $\sqrt{7}+1$.



【解答】解: 如图, 过点 D 作 $DF \perp AB$, 交 AB 延长线于点 F , 取 AB 的中点 E , 连接 DE , OE , OD ,

$\because$ 等边三角形 ABC 的边长为 2,

$$\therefore AB = 2, \quad \angle ABC = 60^\circ,$$

由翻折可知: $\angle DBC = \angle ABC = 60^\circ$, $DB = AB = 2$,

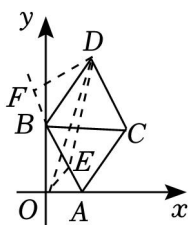
$$\therefore \angle DBF = 60^\circ,$$

$$\because DF \perp AB,$$

$$\therefore \angle DFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = 30^\circ,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore BF = \frac{1}{2}BD = 1, \\
&\therefore DF = \sqrt{3}BF = \sqrt{3}, \\
&\because E \text{ 是 } AB \text{ 的中点}, \\
&\therefore AE = BE = OE = \frac{1}{2}AB = 1, \\
&\therefore EF = BE + BF = 2, \\
&\therefore DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7}, \\
&\therefore OD \leq DE + OE = \sqrt{7} + 1, \\
&\therefore \text{当 } D、E、O \text{ 三点共线时 } OC \text{ 最大, 最大值为 } \sqrt{7} + 1. \\
&\text{故答案为: } \sqrt{7} + 1.
\end{aligned}$$



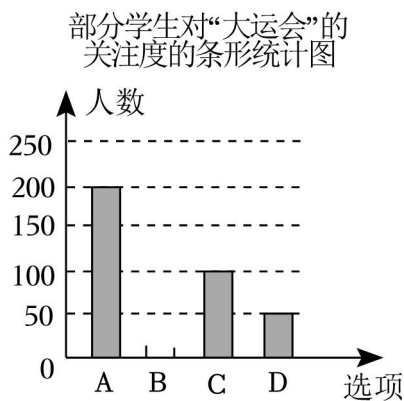
三、解答题（本大题共 8 个小题，共 86 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（9 分）先化简，再求值： $\frac{a}{a^2+2a+1} \div (1 - \frac{1}{a+1})$ ，其中 $a = -2$ 。

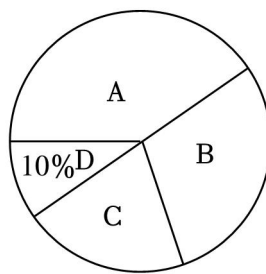
$$\begin{aligned}
&\text{【解答】解：原式} = \frac{a}{(a+1)^2} \div \frac{a}{a+1} \\
&= \frac{a}{(a+1)^2} \cdot \frac{a+1}{a} \\
&= \frac{1}{a+1},
\end{aligned}$$

$$\text{当 } a = -2 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{-2+1} = -1.$$

18.（10 分）第 31 届世界大学生夏季运动会（简称“大运会”）将于 2023 年 7 月 28 日至 8 月 8 日在成都举行。某高校为了了解学生对“大运会”的关注度，设置了 A（非常关注）、B（比较关注）、C（很少关注）、D（没有关注）四个选项，随机抽取了部分学生进行了问卷调查，并将调查结果绘制成如图所示的两幅不完整的统计图。根据图中所提供的信息，解答下列问题：



部分学生对“大运会”的关注度的扇形统计图



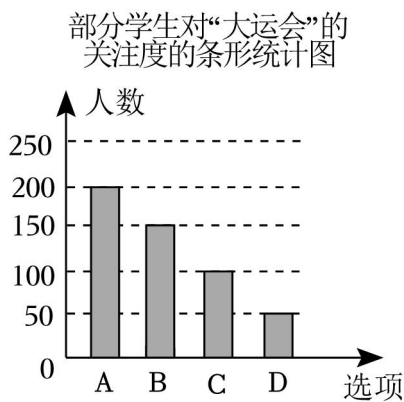
- (1) 本次调查共抽取了 500 名学生，并补全条形统计图；
- (2) 求 A 所在扇形的圆心角度数；
- (3) 学校将在 A 选项中的甲、乙、丙、丁四人里随机选取两人参加志愿者服务，用画树状图或列表法，列举出所有可能的结果，并求出甲、乙同时被选中的概率。

【解答】解：(1) 本次调查共抽取了 $50 \div 10\% = 500$ (名) 学生。

故答案为：500.

选项 B 的人数为 $500 - 200 - 100 - 50 = 150$ (人)。

补全条形统计图如图所示。



(2) A 所在扇形的圆心角度数为 $360^\circ \times \frac{200}{500} = 144^\circ$.

(3) 列表如下：

	甲	乙	丙	丁
甲		(甲, 乙)	(甲, 丙)	(甲, 丁)
乙	(乙, 甲)		(乙, 丙)	(乙, 丁)
丙	(丙, 甲)	(丙, 乙)		(丙, 丁)
丁	(丁, 甲)	(丁, 乙)	(丁, 丙)	

由表格可知，共有 12 种等可能的结果，

其中甲、乙同时被选中的结果有 2 种，

$\therefore$ 甲、乙同时被选中的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

19. (10 分) 端午节到来之际，小明家的经销店准备销售粽子和咸鸭蛋. 据了解，购进 500 个粽子和 200 个咸鸭蛋共需 1700 元，已知一个粽子的进价比一个咸鸭蛋的进价多 2 元.

(1) 求每个粽子和每个咸鸭蛋的进价分别为多少元？

(2) 若每个粽子的售价为 5 元，每个咸鸭蛋的售价为 2 元. 小明父亲打算购进粽子和咸鸭蛋共 1000 个，全部售完后利润不低于 1600 元，求至少购进多少个粽子？

【解答】解：(1) 设每个粽子的进价为 x 元，每个咸鸭蛋的进价为 y 元，则：

$$\begin{cases} x=y+2 \\ 500x+200y=1700 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.

答：每个粽子的进价为 3 元，每个咸鸭蛋的进价为 1 元；

(2) 设购进 a 个粽子，

根据题意，得 $(5-3) \times a + (2-1)(1000-a) \geq 1600$.

解得 $a \geq 600$.

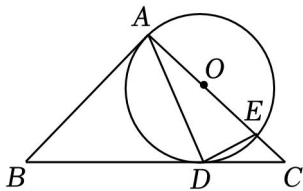
因为 a 是正整数，所以 a 最小值取 600.

答：至少购进 600 个粽子.

20. (10 分) 如图，已知 $\odot O$ 的圆心 O 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上，与 AC 相交于 A 、 E 两点，且与边 BC 相切于点 D ，连结 DE .

(1) 若 $BA = BD$ ，求证： AB 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $CD = 4$ ， $CE = 2$ ，求 $\odot O$ 的半径.



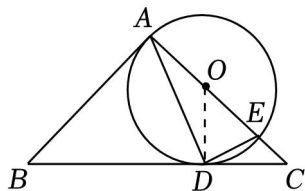
【解答】(1) 证明：连接 OD ，则 $OD = OA$ ，

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

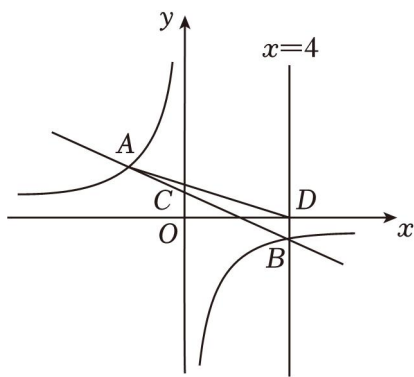
$\because \odot O$ 的圆心 O 在 AC 上，且与边 BC 相切于点 D ，

$$\therefore BC \perp OD,$$

$\therefore \angle ODB = 90^\circ$,
 $\because BA = BD$,
 $\therefore \angle BAD = \angle BDA$,
 $\therefore \angle OAB = \angle OAD + \angle BAD = \angle ODA + \angle BDA = \angle ODB = 90^\circ$,
 $\because OA$ 是 $\odot O$ 的半径, 且 $AB \perp OA$,
 $\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线.
 (2) 解: $\because OD = OE$,
 $\therefore \angle ODE = \angle OED$,
 $\because AE$ 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore \angle ADE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CAD + \angle OED = 90^\circ$,
 $\because \angle CDE + \angle ODE = \angle ODC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CDE = \angle CAD$,
 $\because \angle C = \angle C$,
 $\therefore \triangle CDE \sim \triangle CAD$,
 $\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CD}$,
 $\therefore CE \cdot CA = CD^2$,
 $\because CD = 4, CE = 2, OE = OA$,
 $\therefore 2(2 + 2OE) = 4^2$,
 解得 $OE = 3$,
 $\therefore \odot O$ 的半径长为 3.



21. (11 分) 如图, 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象交于点 A ($-2, m$) 和点 B , 与 y 轴交于点 C . 直线 $x = 4$ 经过点 B 与 x 轴交于点 D , 连结 AD .
- (1) 求 k 、 b 的值;
 - (2) 求 $\triangle ABD$ 的面积;
 - (3) 直接写出一个一次函数的表达式, 使它的图象经过点 C 且 y 随 x 的增大而增大.



【解答】解：（1）把点 $A(-2, m)$ 、 $B(4, n)$ 代入 $y = -\frac{4}{x}$ 得 $-\frac{4}{-2} = m$ ， $-\frac{4}{4} = n$ ，

解得 $m = 2$ ， $n = -1$ ，

$\therefore A(-2, 2)$ ， $B(4, -1)$ ，

把 $A(-2, 2)$ ， $B(4, -1)$ 代入 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中得：

$$\begin{cases} -2k + b = 2 \\ 4k + b = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases},$$

即 k 的值为 $-\frac{1}{2}$ ， b 的值为 1；

（2）由题意可知 $D(4, 0)$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 的面积为： $\frac{1}{2} \times 1 \times (4+2) = 3$ ；

（3）当 $x = 0$ 时， $y = 1$ ，

$\therefore C(0, 1)$ ，

则设经过点 C 的一次函数解析式为 $y = ax + 1$ ，

$\because y$ 随 x 的增大而增大，

$\therefore a > 0$ ，

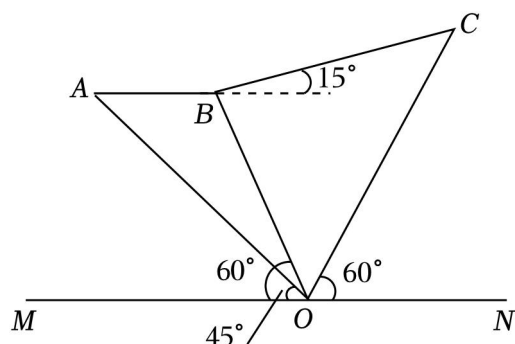
$\therefore$ 经过点 C 的一次函数解析式为 $y = x + 1$ （答案不唯一）。

22.（11 分）如图，在某机场的地面雷达观测站 O ，观测到空中点 A 处的一架飞机的仰角为 45° ，飞机沿水平线 MN 方向飞行到达点 B 处，此时观测到飞机的仰角为 60° ，飞机继续沿与水平线 MN 成 15° 角的方向爬升到点 C 处，此时观测到飞机的仰角为 60° 。已知 $OA = 9\sqrt{2}$ 千米。（ A 、 B 、 C 、 O 、 M 、 N 在同一竖直平面内）

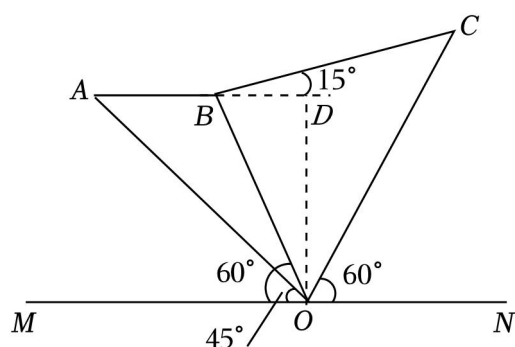
（1）求 O 、 B 两点之间的距离；

（2）若飞机的飞行速度保持 12 千米/分钟，求飞机从点 B 飞行到点 C 所用的时间是多少

分钟? ($\sqrt{2} \approx 1.414$, 结果精确到 0.01)



【解答】解: (1) 过点 O 作 $OD \perp AB$, 垂足为 D ,



由题意得: $\angle AOM = 45^\circ$, $\angle BOM = 60^\circ$, $AD \parallel MN$,

$\therefore \angle A = \angle AOM = 45^\circ$, $\angle DBO = \angle BOM = 60^\circ$,

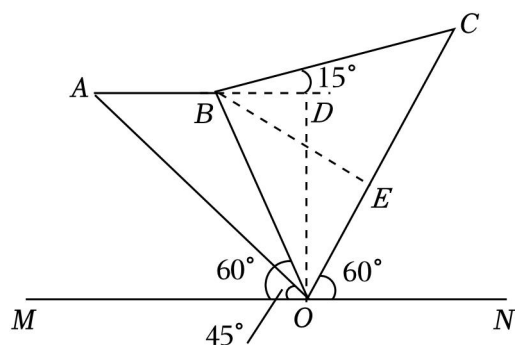
在 $\text{Rt}\triangle ADO$ 中, $OA = 9\sqrt{2}$ 千米,

$\therefore OD = OA \cdot \sin 45^\circ = 9\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9$ (千米),

在 $\text{Rt}\triangle BDO$ 中, $OB = \frac{OD}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3}$ (千米),

$\therefore O$ 、 B 两点之间的距离为 $6\sqrt{3}$ 千米;

(2) 过点 B 作 $BE \perp OC$, 垂足为 E ,



由题意得: $\angle CBD = 15^\circ$, $\angle BOM = 60^\circ$, $\angle CON = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - \angle BOM - \angle CON = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle DBO = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle CBO = \angle CBD + \angle DBO = 75^\circ ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle CBO - \angle BOC = 45^\circ ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BOE$ 中, $OB = 6\sqrt{3}$ 千米,

$$\therefore BE = OB \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \text{ (千米)},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BCE \text{ 中, } BC = \frac{BE}{\sin 45^\circ} = \frac{9}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 9\sqrt{2} \text{ (千米)},$$

$$\therefore \text{飞机从点 } B \text{ 飞行到点 } C \text{ 所用的时间} = \frac{9\sqrt{2}}{12} \approx 1.06 \text{ (分钟)},$$

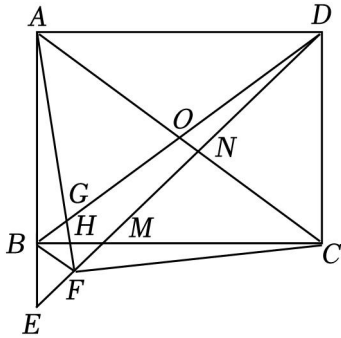
$\therefore$ 飞机从点 B 飞行到点 C 所用的时间约为 1.06 分钟.

23. (12 分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , $\angle ADC$ 的平分线 DE 分别交 AC 、 BC 于点 N 、 M , 交 AB 的延长线于点 E , F 为 EM 的中点, 连结 AF 、 BF 、 CF , AF 分别交 BD 、 BC 于点 G 、 H .

(1) 求证: $AE = BC$;

(2) 探究 AF 与 CF 的关系, 并说明理由;

(3) 若 $AD = 8$, $CD = 6$, 求 OG 的长.



【解答】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore AD = BC, \angle ADC = 90^\circ, AB = CD, AB \parallel CD,$$

$\because DE$ 平分 $\angle ADC$,

$$\therefore \angle ADE = \angle CDE = 45^\circ ,$$

$\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle E = \angle CDE = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle E = \angle ADE = 45^\circ ,$$

$$\therefore AE = AD,$$

$$\therefore AE = BC;$$

(2) 解: AF 与 CF 的关系为: $AF = FC$, 理由:

$$\because \angle EBC = 90^\circ, \angle E = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BEM$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore BE = BM,$$

$\therefore F$ 为 EM 的中点,

$$\therefore BF \perp EM, BF = EF = FM,$$

$\therefore \triangle BFM$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle FBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle E = 45^\circ.$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AE = BC \\ \angle E = \angle FBC \\ EF = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CBF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AF = CF;$$

(3) 解: $\because AD = 8, CD = 6,$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 10,$$

$\because \triangle DCM$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore DM = \sqrt{2}CD = 6\sqrt{2},$$

$$\because AE = BC = 8,$$

$$\therefore BE = 2,$$

$$\therefore BF = EF = FM = \sqrt{2},$$

$$\therefore DF = FM + DM = 7\sqrt{2}.$$

$$\therefore BD = AC = 10.$$

$$\because \triangle AEF \cong \triangle CBF,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle BCF,$$

$$\because \angle AHB = \angle CHF,$$

$$\therefore \triangle BAH \sim \triangle FCH,$$

$$\therefore \angle ABH = \angle CFH = 90^\circ,$$

$$\because AF = CF,$$

$$\therefore \angle FAC + \angle FCA = 45^\circ,$$

$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ACB,$$

$$\because \angle AHB = \angle HAC + \angle ACB = 45^\circ + \angle ACB, \quad \angle DBF = \angle FBC + \angle CBD = 45^\circ + \angle CBD,$$

$$\therefore \angle AHB = \angle DBH.$$

$$\because \angle ABH = \angle BFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABH \sim \triangle DFB,$$

$$\therefore \frac{AB}{BH} = \frac{DF}{BF},$$

$$\therefore \frac{6}{BH} = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore BH = \frac{6}{7},$$

$$\because BC \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle BHG \sim \triangle DAG,$$

$$\therefore \frac{BH}{AD} = \frac{BG}{GD},$$

$$\therefore \frac{\frac{6}{7}}{8} = \frac{5-OG}{5+OG}$$

$$\therefore OG = \frac{125}{31}.$$

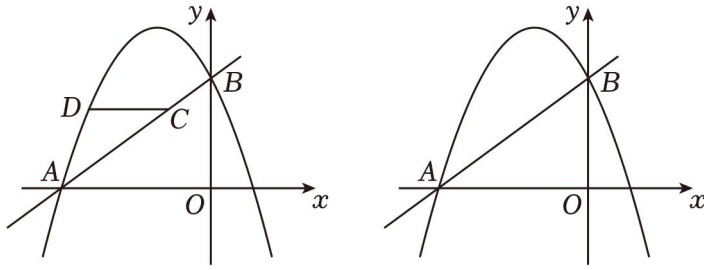
24. (13分) 如图, 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, 抛物线 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$

经过 A 、 B 两点.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 D 是抛物线在第二象限内的点, 过点 D 作 x 轴的平行线与直线 AB 交于点 C , 求 DC 的长的最大值;

(3) 点 Q 是线段 AO 上的动点, 点 P 是抛物线在第一象限内的动点, 连结 PQ 交 y 轴于点 N . 是否存在点 P , 使 $\triangle ABQ$ 与 $\triangle BQN$ 相似, 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.



备用图

【解答】解：(1) $\because$ 直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点，

$$A(-4, 0), B(0, 3),$$

$\therefore$ 抛物线 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点.

$$\therefore \begin{cases} -12 - 4b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -\frac{9}{4} \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3;$$

$$(2) \text{ 设 } D(m, -\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{4}m + 3),$$

$\because DC \parallel$ 作 x 轴，与直线 AB 交于点 C ,

$$\therefore \frac{3}{4}x + 3 = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{4}m + 3, \text{ 解得 } x = -m^2 - 3m,$$

$$\therefore C(-m^2 - 3m, -\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{4}m + 3),$$

$$\therefore DC = -m^2 - 3m - m = -m^2 - 4m = -(m+2)^2 + 4,$$

$\therefore$ 当 $m = -2$ 时， DC 的长的最大值为 4;

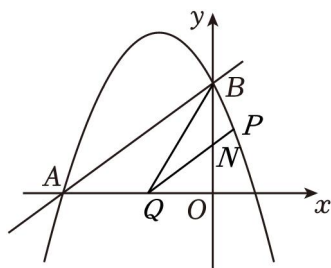
$$(3) \text{ 设 } N(0, n),$$

$$\because A(-4, 0), B(0, 3),$$

$$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

分两种情况：

① 当 $\triangle ABQ \sim \triangle BQN$ 时，



$$\because \triangle ABQ \sim \triangle BQN,$$

$$\therefore \angle ABQ = \angle BQN, \quad \frac{QN}{BQ} = \frac{BQ}{AB},$$

$$\therefore PQ \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle OQN \sim \triangle OAB,$$

$$\therefore \frac{ON}{OB} = \frac{OQ}{OA} = \frac{QN}{AB},$$

$$\therefore \frac{n}{3} = \frac{OQ}{4} = \frac{QN}{5},$$

$$\therefore OQ = \frac{4}{3}n, \quad QN = \frac{5}{3}n,$$

$$\therefore BQ = \sqrt{OQ^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{16}{9}n^2 + 9},$$

$$\therefore \frac{\frac{5}{3}n}{\sqrt{\frac{16}{9}n^2 + 9}} = \frac{\sqrt{\frac{16}{9}n^2 + 9}}{5},$$

$$\therefore n = \frac{27}{16} \text{ 或 } 3 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore OQ = \frac{4}{3}n = \frac{9}{4},$$

$$\therefore Q\left(-\frac{9}{4}, 0\right), \quad N\left(0, \frac{27}{16}\right),$$

设直线 PQ 的解析式为 $y = kx + a$,

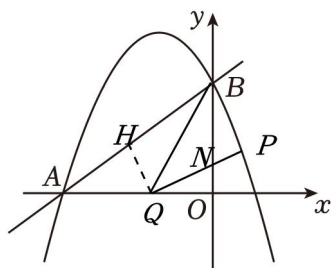
$$\therefore \begin{cases} -\frac{9}{4}k + a = 0 \\ a = \frac{27}{16} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ b = \frac{27}{16} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } PQ \text{ 的解析式为 } y = \frac{3}{4}x + \frac{27}{16},$$

$$\text{联立 } y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3 \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{23}-4}{2} \text{ 或 } \frac{-4-\sqrt{23}}{2} \text{ (不合题意, 舍去)}$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{\sqrt{23}-4}{2}, \frac{6\sqrt{23}+3}{16}\right);$$

②当 $\triangle ABQ \sim \triangle QBN$ 时, 过点 Q 作 $QH \perp AB$ 于 H ,



$$\because \triangle ABQ \sim \triangle QBN,$$

$$\therefore \angle ABQ = \angle QBN, \quad \angle BAQ = \angle BQN,$$

$$\therefore QH = QO,$$

$$\because BQ = BQ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BHQ \cong \text{Rt}\triangle BOQ,$$

$$\therefore BH = OB = 3,$$

$$\therefore AH = AB - BH = 2,$$

设 $OQ = q$, 则 $AQ = 4 - q$, $QH = q$,

$$\therefore 2^2 + q^2 = (4 - q)^2, \text{ 解得 } q = \frac{3}{2},$$

$$\therefore Q\left(-\frac{3}{2}, 0\right),$$

$$\because \angle BQO = \angle BQN + \angle OQN = \angle BAQ + \angle ABQ, \quad \angle BAQ = \angle BQN, \quad \angle ABQ = \angle QBN,$$

$$\therefore \angle OQN = \angle QBN,$$

$$\because \angle QON = \angle BOQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OQN \sim \triangle OBQ,$$

$$\therefore \frac{ON}{OQ} = \frac{OQ}{OB},$$

$$\therefore \frac{\frac{n}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3},$$

$$\therefore n = \frac{3}{4},$$

$$\therefore Q\left(-\frac{3}{2}, 0\right), \quad N\left(0, \frac{3}{4}\right),$$

同理得直线 PQ 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$,

$$\text{联立 } y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3 \text{ 解得 } x = \frac{-11 + \sqrt{229}}{6} \text{ 或 } \frac{-11 - \sqrt{229}}{6} \text{ (不合题意, 舍去)}$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(\frac{-11+\sqrt{229}}{6}, \frac{\sqrt{229}-2}{12})$;

综上, 点 P 的坐标为 $(\frac{\sqrt{23}-4}{2}, \frac{6\sqrt{23}+3}{16})$ 或 $(\frac{-11+\sqrt{229}}{6}, \frac{\sqrt{229}-2}{12})$.