

2021 年四川省成都市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分，每小题均有四个选项，其中只有一项符合题目要求，答案涂在答题卡上）

1. -7 的倒数是（ ）

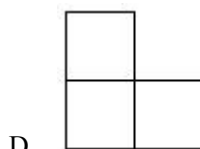
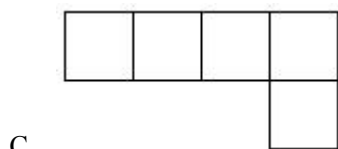
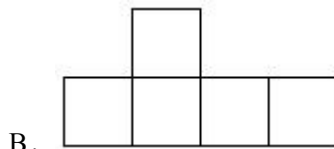
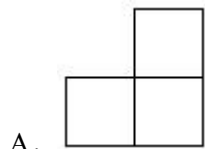
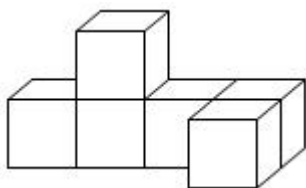
A. $-\frac{1}{7}$

B. $\frac{1}{7}$

C. -7

D. 7

2. 如图所示的几何体是由 6 个大小相同的小立方块搭成，它的俯视图是（ ）



3. 2021 年 5 月 15 日 7 时 18 分，天问一号探测器成功着陆距离地球逾 3 亿千米的神秘火星，在火星上首次留下中国人的印迹，这是我国航天事业发展的又一具有里程碑意义的进展。将数据 3 亿用科学记数法表示为（ ）

A. 3×10^5

B. 3×10^6

C. 3×10^7

D. 3×10^8

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $M(-4, 2)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是（ ）

A. $(-4, 2)$

B. $(4, 2)$

C. $(-4, -2)$

D. $(4, -2)$

5. 下列计算正确的是（ ）

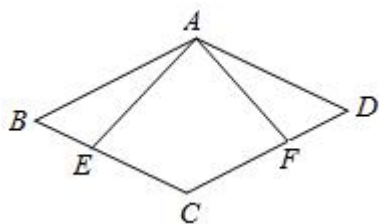
A. $3mn - 2mn = 1$

B. $(m^2n^3)^2 = m^4n^6$

C. $(-m)^3 \cdot m = m^4$

D. $(m+n)^2 = m^2+n^2$

6. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 E, F 分别在 BC, DC 边上，添加以下条件不能判定 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ 的是（ ）



- A. $BE = DF$ B. $\angle BAE = \angle DAF$ C. $AE = AD$ D. $\angle AEB = \angle AFD$

7. 菲尔兹奖是数学领域的一项国际大奖，常被视为数学界的诺贝尔奖，每四年颁发一次，最近一届获奖者获奖时的年龄（单位：岁）分别为：30，40，34，36，则这组数据的中位数是（ ）
- A. 34 B. 35 C. 36 D. 40

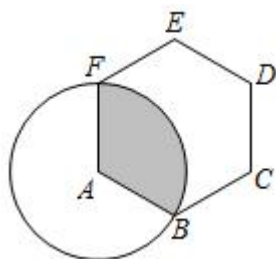
8. 分式方程 $\frac{2-x}{x-3} + \frac{1}{3-x} = 1$ 的解为（ ）

- A. $x = 2$ B. $x = -2$ C. $x = 1$ D. $x = -1$

9. 《九章算术》卷八方程第十题原文为：“今有甲、乙二人持钱不知其数．甲得乙半而钱五十，乙得甲太半而亦钱五十．问：甲、乙持钱各几何？”题目大意是：甲、乙两人各带了若干钱．如果甲得到乙所有钱的一半，那么甲共有钱 50；如果乙得到甲所有钱的 $\frac{2}{3}$ ，那么乙也共有钱 50．问：甲、乙两人各带了多少钱？设甲、乙两人持钱的数量分别为 x ， y ，则可列方程组为（ ）

- A.
$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 50 \\ y + \frac{2}{3}x = 50 \end{cases}$$
- B.
$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 50 \\ y - \frac{2}{3}x = 50 \end{cases}$$
- C.
$$\begin{cases} 2x + y = 50 \\ x + \frac{2}{3}y = 50 \end{cases}$$
- D.
$$\begin{cases} 2x - y = 50 \\ x - \frac{2}{3}y = 50 \end{cases}$$

10. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 6，以顶点 A 为圆心， AB 的长为半径画圆，则图中阴影部分的面积为（ ）

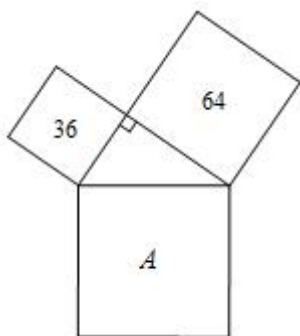


- A. 4π B. 6π C. 8π D. 12π

二、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 4 分，共 16 分，答案写在答题卡上）

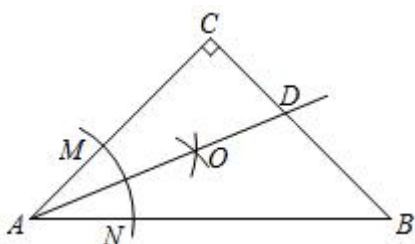
11. (4分) 因式分解: $x^2 - 4 =$ _____.

12. (4分) 如图, 数字代表所在正方形的面积, 则 A 所代表的正方形的面积为_____.



13. (4分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 若抛物线 $y = x^2 + 2x + k$ 与 x 轴只有一个交点, 则 k = _____.

14. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, 按以下步骤作图: ①以点 A 为圆心, 以任意长为半径作弧, 分别交 AC , AB 于点 M , N ; ②分别以 M , N 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧, 两弧在 $\angle BAC$ 内交于点 O ; ③作射线 AO , 交 BC 于点 D . 若点 D 到 AB 的距离为 1, 则 BC 的长为_____.



三、解答题 (本大题共 6 个小题, 共 54 分, 解答过程写在答题卡上)

15. (12分) (1) 计算: $\sqrt{4} + (1+\pi)^0 - 2\cos 45^\circ + |1 - \sqrt{2}|$.

(2) 解不等式组:
$$\begin{cases} 5x-2 > 3(x+1) & \text{①} \\ \frac{1}{2}x-1 \leq 7-\frac{3}{2}x & \text{②} \end{cases}$$

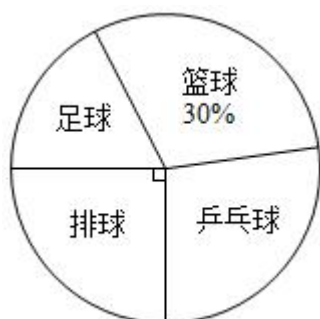
16. (6分) 先化简, 再求值: $(1 + \frac{2}{a+1}) \div \frac{a^2+6a+9}{a+1}$, 其中 $a = \sqrt{3} - 3$.

17. (8分) 为有效推进儿童青少年近视防控工作, 教育部办公厅等十五部门联合制定《儿童青少年近视防控光明行动工作方案 (2021 - 2025 年) 》, 共提出八项主要任务, 其中第三项任务为强化户外活动和体育锻炼. 我市各校积极落实方案精神, 某学校决定开设以下四种球类的户外体育选修课程: 篮球、足球、排球、乒乓球. 为了解学生需求, 该校随机对本校部分学生进行了“你选择哪种球类课程”的调查 (要求必须选择且只能选择其中一门课程), 并根据调查结果绘制成不完整的统计图表.

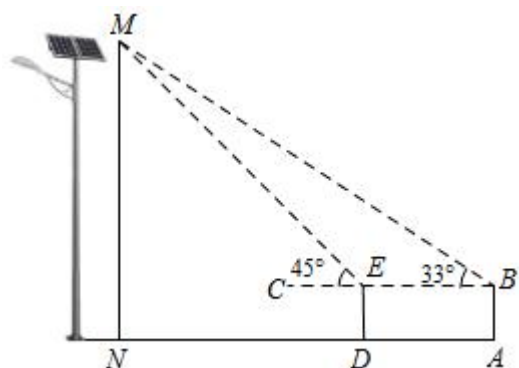
课程	人数
篮球	m
足球	21
排球	30
乒乓球	n

根据图表信息，解答下列问题：

- (1) 分别求出表中 m , n 的值；
- (2) 求扇形统计图中“足球”对应的扇形圆心角的度数；
- (3) 该校共有 2000 名学生，请你估计其中选择“乒乓球”课程的学生人数.



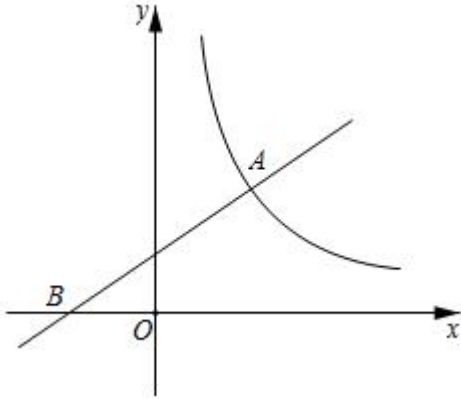
18. (8 分) 越来越多太阳能路灯的使用，既点亮了城市的风景，也是我市积极落实节能环保的举措. 某校学生开展综合实践活动，测量太阳能路灯电池板离地面的高度. 如图，已知测倾器的高度为 1.6 米，在测点 A 处安置测倾器，测得点 M 的仰角 $\angle MBC = 33^\circ$ ，在与点 A 相距 3.5 米的测点 D 处安置测倾器，测得点 M 的仰角 $\angle MEC = 45^\circ$ (点 A , D 与 N 在一条直线上), 求电池板离地面的高度 MN 的长. (结果精确到 1 米; 参考数据 $\sin 33^\circ \approx 0.54$, $\cos 33^\circ \approx 0.84$, $\tan 33^\circ \approx 0.65$)



19. (10 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象相交于点 $A(a, 3)$ ，与 x 轴相交于点 B .

(1) 求反比例函数的表达式;

(2) 过点 A 的直线交反比例函数的图象于另一点 C , 交 x 轴正半轴于点 D , 当 $\triangle ABD$ 是以 BD 为底的等腰三角形时, 求直线 AD 的函数表达式及点 C 的坐标.

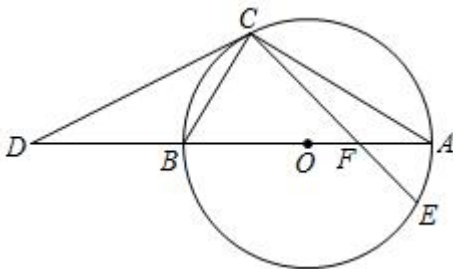


20. (10 分) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 连接 AC , BC , D 为 AB 延长线上一点, 连接 CD , 且 $\angle BCD = \angle A$.

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{5}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{5}$, 求 CD 的长;

(3) 在 (2) 的条件下, E 为 $\odot O$ 上一点, 连接 CE 交线段 OA 于点 F , 若 $\frac{EF}{CF} = \frac{1}{2}$, 求 BF 的长.

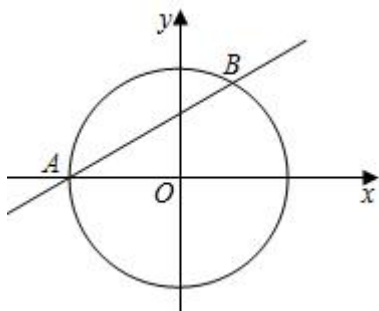


一、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分, 答案写在答题卡上)

21. (4 分) 在正比例函数 $y = kx$ 中, y 的值随着 x 值的增大而增大, 则点 $P(3, k)$ 在第 _____ 象限.

22. (4 分) 若 m, n 是一元二次方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 的两个实数根, 则 $m^2 + 4m + 2n$ 的值是 _____.

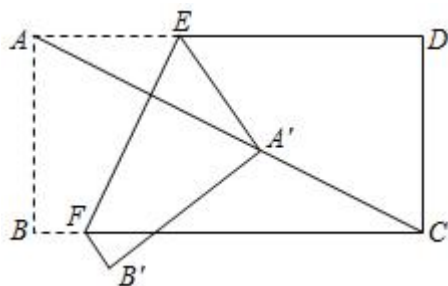
23. (4 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 与 $\odot O$ 相交于 A, B 两点, 且点 A 在 x 轴上, 则弦 AB 的长为 _____.



24. (4分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 8$, 点 E , F 分别在边 AD , BC 上, 且 $AE = 3$, 按以下步骤操作:

第一步, 沿直线 EF 翻折, 点 A 的对应点 A' 恰好落在对角线 AC 上, 点 B 的对应点为 B' , 则线段 BF 的长为 _____;

第二步, 分别在 EF , $A'B'$ 上取点 M , N , 沿直线 MN 继续翻折, 使点 F 与点 E 重合, 则线段 MN 的长为 _____.



25. (4分) 我们对一个三角形的顶点和边都赋给一个特征值, 并定义: 从任意顶点出发, 沿顺时针或逆时针方向依次将顶点和边的特征值相乘, 再把三个乘积相加, 所得之和称为此三角形的顺序旋转和或逆序旋转和. 如图 1, $ar+cq+bp$ 是该三角形的顺序旋转和, $ap+bq+cr$ 是该三角形的逆序旋转和. 已知某三角形的特征值如图 2, 若从 1, 2, 3 中任取一个数作为 x , 从 1, 2, 3, 4 中任取一个数作为 y , 则对任意正整数 z , 此三角形的顺序旋转和与逆序旋转和的差都小于 4 的概率是 _____.

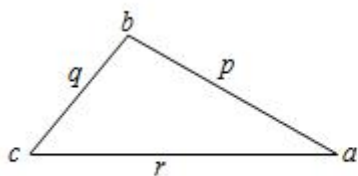


图 1

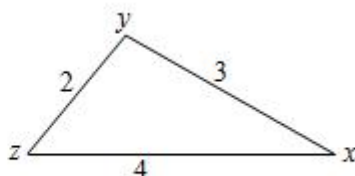


图 2

二、解答题 (本大题共 3 个小题, 共 30 分, 答过程写在答题卡上)

26. (8分) 为改善城市人居环境, 《成都市生活垃圾管理条例》(以下简称《条例》) 于 2021 年 3 月 1 日起正式施行. 某区域原来每天需要处理生活垃圾 920 吨, 刚好被 12 个 A 型和

10 个 B 型预处置点位进行初筛、压缩等处理. 已知一个 A 型点位比一个 B 型点位每天多处理 7 吨生活垃圾.

(1) 求每个 B 型点位每天处理生活垃圾的吨数;

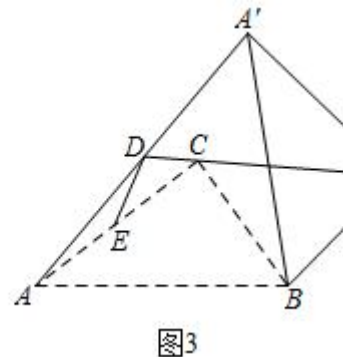
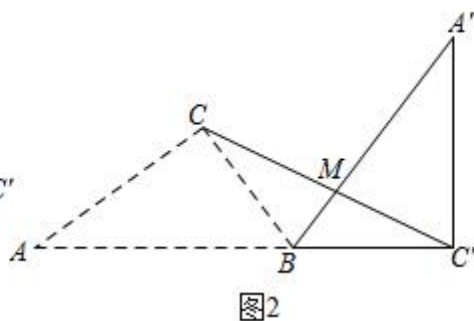
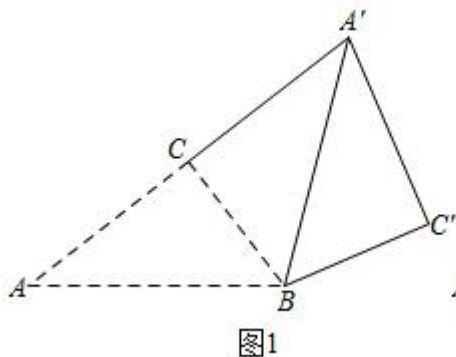
(2) 由于《条例》的施行, 垃圾分类要求提高, 在每个点位每天将少处理 8 吨生活垃圾, 同时由于市民环保意识增强, 该区域每天需要处理的生活垃圾比原来少 10 吨. 若该区域计划增设 A 型、 B 型点位共 5 个, 试问至少需要增设几个 A 型点位才能当日处理完所有生活垃圾?

27. (10 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, 将 ABC 绕点 B 顺时针旋转得到 $\triangle A'BC'$, 其中点 A, C 的对应点分别为点 A', C' .

(1) 如图 1, 当点 A' 落在 AC 的延长线上时, 求 AA' 的长;

(2) 如图 2, 当点 C' 落在 AB 的延长线上时, 连接 CC' , 交 $A'B$ 于点 M , 求 BM 的长;

(3) 如图 3, 连接 AA' , CC' , 直线 CC' 交 AA' 于点 D , 点 E 为 AC 的中点, 连接 DE . 在旋转过程中, DE 是否存在最小值? 若存在, 求出 DE 的最小值; 若不存在, 请说明理由.

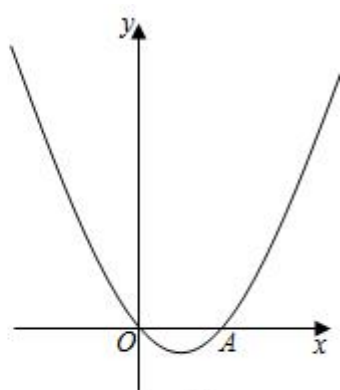
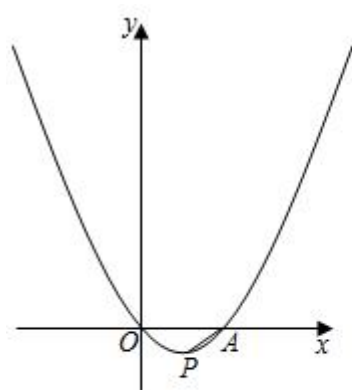


28. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = a(x - h)^2 + k$ 与 x 轴相交于 O, A 两点, 顶点 P 的坐标为 $(2, -1)$. 点 B 为抛物线上一动点, 连接 AP, AB , 过点 B 的直线与抛物线交于另一点 C .

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 若点 B 的横坐标与纵坐标相等, $\angle ABC = \angle OAP$, 且点 C 位于 x 轴上方, 求点 C 的坐标;

(3) 若点 B 的横坐标为 t , $\angle ABC = 90^\circ$, 请用含 t 的代数式表示点 C 的横坐标, 并求出当 $t < 0$ 时, 点 C 的横坐标的取值范围.



备用图

2021 年四川省成都市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分，每小题均有四个选项，其中只有一项符合题目要求，答案涂在答题卡上）

1. -7 的倒数是（ ）

- A. $-\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{7}$ C. -7 D. 7

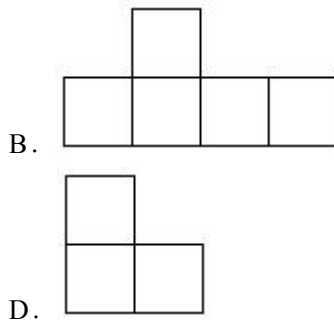
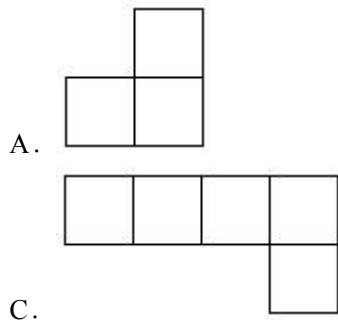
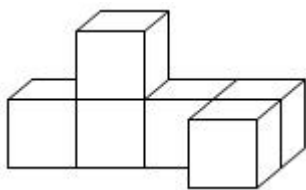
【分析】根据倒数：乘积是 1 的两数互为倒数，即可得出答案.

【解答】解： $\because -7 \times (-\frac{1}{7}) = 1$,

$\therefore -7$ 的倒数是： $-\frac{1}{7}$.

故选：A.

2. 如图所示的几何体是由 6 个大小相同的小立方块搭成，它的俯视图是（ ）



【分析】找到从上面看所得到的图形即可，注意所有的看到的棱都应表现在俯视图中.

【解答】解：从上面看，底层的最右边是一个小正方形，上层是四个小正方形，右齐.

故选：C.

3. 2021 年 5 月 15 日 7 时 18 分，天问一号探测器成功着陆距离地球逾 3 亿千米的神秘火星，在火星上首次留下中国人的印迹，这是我国航天事业发展的又一具有里程碑意义的进展. 将数据 3 亿用科学记数法表示为（ ）

- A. 3×10^5 B. 3×10^6 C. 3×10^7 D. 3×10^8

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，

且 n 比原来的整数位数少 1，据此判断即可．

【解答】解：3 亿 $= 300000000 = 3 \times 10^8$ ．

故选：D．

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $M(-4, 2)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是 ()

A. $(-4, 2)$ B. $(4, 2)$ C. $(-4, -2)$ D. $(4, -2)$

【分析】根据关于 x 轴的对称点的坐标特点：横坐标不变，纵坐标互为相反数，即可得出答案．

【解答】解：点 $M(-4, 2)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是 $(-4, -2)$ ．

故选：C．

5. 下列计算正确的是 ()

A. $3mn - 2mn = 1$

B. $(m^2n^3)^2 = m^4n^6$

C. $(-m)^3 \cdot m = m^4$

D. $(m+n)^2 = m^2 + n^2$

【分析】分别根据合并同类项法则，积的乘方运算法则，同底数幂的乘法法则以及完全平方公式逐一判断即可．

【解答】解：A. $3mn - 2mn = mn$ ，故本选项不合题意；

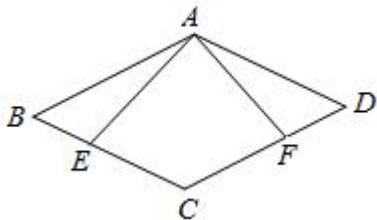
B. $(m^2n^3)^2 = m^4n^6$ ，故本选项符合题意；

C. $(-m)^3 \cdot m = -m^4$ ，故本选项不合题意；

D. $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$ ，故本选项不合题意；

故选：B．

6. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 E, F 分别在 BC, DC 边上，添加以下条件不能判定 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ 的是 ()



A. $BE = DF$

B. $\angle BAE = \angle DAF$

C. $AE = AD$

D. $\angle AEB = \angle AFD$

【分析】由四边形 $ABCD$ 是菱形可得： $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D$ ，再根据每个选项添加的条件逐一判断．

【解答】解：由四边形 $ABCD$ 是菱形可得： $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D$ ，

A、添加 $BE = DF$ ，可用 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ，故不符合题意；

B、添加 $\angle BAE = \angle DAF$ ，可用 ASA 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ，故不符合题意；

C、添加 $AE = AD$ ，不能证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ，故符合题意；

D、添加 $\angle AEB = \angle AFD$ ，可用 AAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ，故不符合题意；

故选：C.

7. 菲尔兹奖是数学领域的一项国际大奖，常被视为数学界的诺贝尔奖，每四年颁发一次，最近一届获奖者获奖时的年龄（单位：岁）分别为：30，40，34，36，则这组数据的中位数是（ ）

A. 34 B. 35 C. 36 D. 40

【分析】把所给数据按照由小到大的顺序排序，再求出中间两个数的平均数即可.

【解答】解：把已知数据按照由小到大的顺序重新排序后为 30，34，36，40，

$\therefore$ 中位数为 $(34+36) \div 2 = 35$.

故选：B.

8. 分式方程 $\frac{2-x}{x-3} + \frac{1}{3-x} = 1$ 的解为（ ）

A. $x = 2$ B. $x = -2$ C. $x = 1$ D. $x = -1$

【分析】分式方程整理后，去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【解答】解：分式方程整理得： $\frac{2-x}{x-3} - \frac{1}{x-3} = 1$,

去分母得： $2 - x - 1 = x - 3$,

解得： $x = 2$,

检验：当 $x = 2$ 时， $x - 3 \neq 0$,

$\therefore$ 分式方程的解为 $x = 2$.

故选：A.

9. 《九章算术》卷八方程第十题原文为：“今有甲、乙二人持钱不知其数. 甲得乙半而钱五十，乙得甲太半而亦钱五十. 问：甲、乙持钱各几何？”题目大意是：甲、乙两人各带了若干钱. 如果甲得到乙所有钱的一半，那么甲共有钱 50；如果乙得到甲所有钱的 $\frac{2}{3}$ ，那么乙也共有钱 50. 问：甲、乙两人各带了多少钱？设甲、乙两人持钱的数量分别为 x ， y ，则可列方程组为（ ）

$$A. \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 50 \\ y + \frac{2}{3}x = 50 \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 50 \\ y - \frac{2}{3}x = 50 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} 2x + y = 50 \\ x + \frac{2}{3}y = 50 \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} 2x - y = 50 \\ x - \frac{2}{3}y = 50 \end{cases}$$

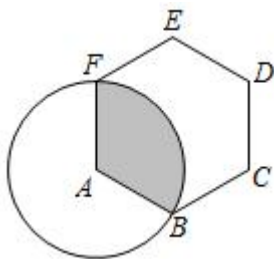
【分析】设甲需持钱 x ，乙持钱 y ，根据题意可得，甲的钱+乙的钱的一半 = 50，乙的钱+甲所有钱的 $\frac{2}{3}$ = 50，据此列方程组可得.

【解答】解：设甲需持钱 x ，乙持钱 y ，

根据题意，得：
$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 50 \\ y + \frac{2}{3}x = 50 \end{cases},$$

故选：A.

10. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 6，以顶点 A 为圆心， AB 的长为半径画圆，则图中阴影部分的面积为 ()



A. 4π

B. 6π

C. 8π

D. 12π

【分析】首先确定扇形的圆心角的度数，然后利用扇形的面积公式计算即可.

【解答】解： $\because$ 正六边形的外角和为 360° ，

$\therefore$ 每一个外角的度数为 $360^\circ \div 6 = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 正六边形的每个内角为 $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，

$\therefore$ 正六边形的边长为 6，

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{120\pi \times 6^2}{360} = 12\pi,$$

故选：D.

二、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 4 分，共 16 分，答案写在答题卡上）

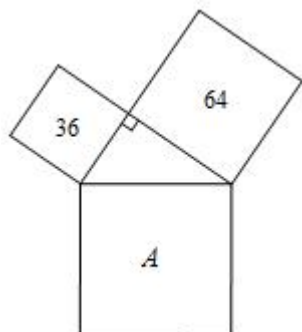
11. (4 分) 因式分解： $x^2 - 4 = \underline{(x+2)(x-2)}$.

【分析】直接利用平方差公式分解因式得出答案.

【解答】解： $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$.

故答案为： $(x+2)(x-2)$.

12. (4分) 如图，数字代表所在正方形的面积，则 A 所代表的正方形的面积为 100.



【分析】三个正方形的边长正好构成直角三角形的三边，根据勾股定理得到字母 A 所代表的正方形的面积 $A = 36 + 64 = 100$.

【解答】解：由题意可知，直角三角形中，一条直角边的平方 = 36，一直角边的平方 = 64，

则斜边的平方 = $36 + 64 = 100$.

故答案为 100.

13. (4分) 在平面直角坐标系 xOy 中，若抛物线 $y = x^2 + 2x + k$ 与 x 轴只有一个交点，则 $k =$ 1.

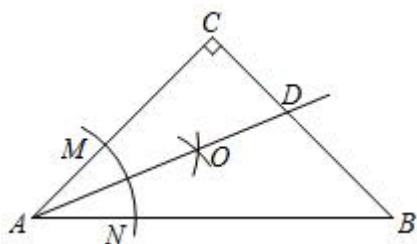
【分析】由题意得： $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4k = 0$ ，即可求解.

【解答】解：由题意得： $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4k = 0$,

解得 $k = 1$,

故答案为 1.

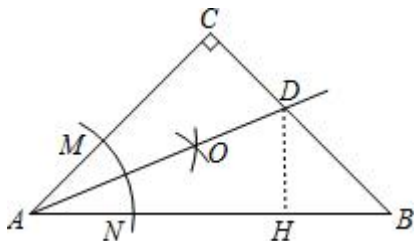
14. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，按以下步骤作图：①以点 A 为圆心，以任意长为半径作弧，分别交 AC ， AB 于点 M ， N ；②分别以 M ， N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle BAC$ 内交于点 O ；③作射线 AO ，交 BC 于点 D . 若点 D 到 AB 的距离为 1，则 BC 的长为 $1 + \sqrt{2}$.



【分析】由题目作图知， AD 是 $\angle CAB$ 的平分线，则 $CD = DH = 1$ ，进而求解。

【解答】解：过点 D 作 $DH \perp AB$ ，则 $DH = 1$ ，

由题目作图知， AD 是 $\angle CAB$ 的平分线，



则 $CD = DH = 1$ ，

$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，故 $\angle B = 45^\circ$ ，

则 $\triangle DHB$ 为等腰直角三角形，故 $BD = \sqrt{2}HD = \sqrt{2}$ ，

则 $BC = CD + BD = 1 + \sqrt{2}$ ，

故答案为： $1 + \sqrt{2}$ 。

三、解答题（本大题共 6 个小题，共 54 分，解答过程写在答题卡上）

15.（12 分）（1）计算： $\sqrt{4} + (1 + \pi)^0 - 2\cos 45^\circ + |1 - \sqrt{2}|$ 。

（2）解不等式组：
$$\begin{cases} 5x - 2 > 3(x + 1) & \text{①} \\ \frac{1}{2}x - 1 \leq 7 - \frac{3}{2}x & \text{②} \end{cases}$$

【分析】（1）原式第一项开平方化简，第二项利用零指数幂的意义化简，第三项利用特殊角的三角函数值计算，最后一项利用绝对值的代数意义化简，然后计算即可得到结果；

（2）分别求出不等式组中两不等式的解集，找出解集的公共部分即可。

【解答】解：（1）原式 $= 2 + 1 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 1$

$$= 2 + 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1$$

$$= 2;$$

（2）由①得： $x > 2.5$ ，

由②得： $x \leq 4$ ，

则不等式组的解集为 $2.5 < x \leq 4$ 。

16.（6 分）先化简，再求值： $(1 + \frac{2}{a+1}) \div \frac{a^2 + 6a + 9}{a+1}$ ，其中 $a = \sqrt{3} - 3$ 。

【分析】分式的混合运算，先算小括号里面的，然后算括号外面的，最后代入求值。

【解答】解：原式 $= \frac{a+1+2}{a+1} \cdot \frac{a+1}{(a+3)^2}$

$$= \frac{1}{a+3},$$

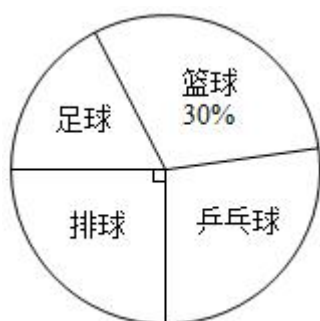
当 $a = \sqrt{3} - 3$ 时，原式 $= \frac{1}{\sqrt{3}-3+3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

17. (8分) 为有效推进儿童青少年近视防控工作，教育部办公厅等十五部门联合制定《儿童青少年近视防控光明行动工作方案(2021-2025年)》，共提出八项主要任务，其中第三项任务为强化户外活动和体育锻炼。我市各校积极落实方案精神，某学校决定开设以下四种球类的户外体育选修课程：篮球、足球、排球、乒乓球。为了解学生需求，该校随机对本校部分学生进行了“你选择哪种球类课程”的调查(要求必须选择且只能选择其中一门课程)，并根据调查结果绘制成不完整的统计图表。

课程	人数
篮球	m
足球	21
排球	30
乒乓球	n

根据图表信息，解答下列问题：

- (1) 分别求出表中 m ， n 的值；
- (2) 求扇形统计图中“足球”对应的扇形圆心角的度数；
- (3) 该校共有 2000 名学生，请你估计其中选择“乒乓球”课程的学生人数。



- 【分析】(1) 根据选择排球的人数和所占的百分比可以求得本次调查的人数，然后计算出 m 、 n 的值；
- (2) 用 360° 乘以样本中“足球”所占的百分比即可；
- (3) 用总人数乘以样本中选择“乒乓球”课程的学生所占的百分比即可。

【解答】解：(1) $30 \div \frac{90}{360} = 120$ (人)，

即参加这次调查的学生有 120 人，

选择篮球的学生 $m = 120 \times 30\% = 36$ ，

选择乒乓球的学生 $n = 120 - 36 - 21 - 30 = 33$ ；

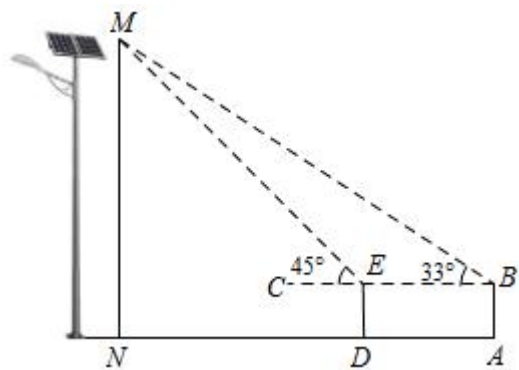
$$(2) 360^\circ \times \frac{21}{120} = 63^\circ ,$$

即扇形统计图中“足球”项目所对应扇形的圆心角度数是 63° ；

$$(3) 2000 \times \frac{33}{120} = 550 \text{ (人)},$$

答：估计其中选择“乒乓球”课程的学生有 550 人．

18. (8 分) 越来越多太阳能路灯的使用，既点亮了城市的风景，也是我市积极落实节能环保的举措．某校学生开展综合实践活动，测量太阳能路灯电池板离地面的高度．如图，已知测倾器的高度为 1.6 米，在测点 A 处安置测倾器，测得点 M 的仰角 $\angle MBC = 33^\circ$ ，在与点 A 相距 3.5 米的测点 D 处安置测倾器，测得点 M 的仰角 $\angle MEC = 45^\circ$ (点 A, D 与 N 在一条直线上)，求电池板离地面的高度 MN 的长．(结果精确到 1 米；参考数据 $\sin 33^\circ \approx 0.54$, $\cos 33^\circ \approx 0.84$, $\tan 33^\circ \approx 0.65$)

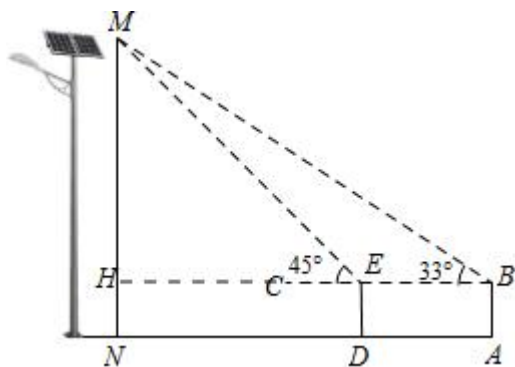


【分析】设 $MH = x$ ， $\angle MEC = 45^\circ$ ，故 $EH = x$ ，则 $\tan \angle MBH = \frac{MH}{HE+EB} = \frac{x}{x+3.5} \approx 0.65$ ，

进而求解。

【解答】解：延长 BC 交 MN 于点 H ， $CD = BE = 3.5$ ，

设 $MH = x$ ，



$\because \angle MEC = 45^\circ$ ，故 $EH = x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle MHB$ 中， $\tan \angle MBH = \frac{MH}{HE+EB} = \frac{x}{x+3.5} \approx 0.65$ ，解得 $x = 6.5$ ，

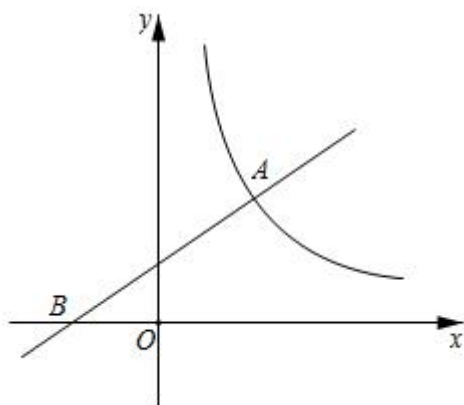
则 $MN = 1.6 + 6.5 = 8.1 \approx 8$ （米），

$\therefore$ 电池板离地面的高度 MN 的长约为 8 米。

19.（10 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象相交于点 $A(a, 3)$ ，与 x 轴相交于点 B 。

（1）求反比例函数的表达式；

（2）过点 A 的直线交反比例函数的图象于另一点 C ，交 x 轴正半轴于点 D ，当 $\triangle ABD$ 是以 BD 为底的等腰三角形时，求直线 AD 的函数表达式及点 C 的坐标。



【分析】（1）根据一次函数 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ 的图象经过点 $A(a, 3)$ ，求出点 A 的坐标，再代入 $y = \frac{k}{x}$ ，即可求得答案；

（2）过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E ，先求出点 B 的坐标，再根据 $\triangle ABD$ 是以 BD 为底边的等腰三角形，可求出点 D 的坐标，利用待定系数法即可求出直线 AD 的解析式，联立直线 AD 解析式和反比例函数解析式并求解即可得出点 C 的坐标。

【解答】（1） $\because$ 一次函数 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ 的图象经过点 $A(a, 3)$ ，

$$\therefore \frac{3}{4}a + \frac{3}{2} = 3,$$

解得： $a = 2$,

$$\therefore A(2, 3),$$

将 $A(2, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$,

$$\text{得： } 3 = \frac{k}{2},$$

$$\therefore k = 6,$$

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{6}{x}$;

(2) 如图，过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E ,

在 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ 中，令 $y = 0$ ，得 $\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} = 0$,

解得： $x = -2$,

$$\therefore B(-2, 0),$$

$$\therefore E(2, 0),$$

$$\therefore BE = 2 - (-2) = 4,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是以 BD 为底边的等腰三角形，

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore AE \perp BD,$$

$$\therefore DE = BE = 4,$$

$$\therefore D(6, 0),$$

设直线 AD 的函数表达式为 $y = mx + n$,

$$\therefore A(2, 3), D(6, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} 2m + n = 3 \\ 6m + n = 0 \end{cases},$$

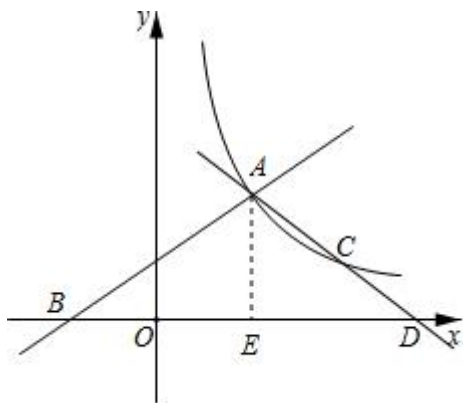
$$\text{解得： } \begin{cases} m = -\frac{3}{4} \\ n = \frac{9}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 的函数表达式为 } y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2},$$

$$\text{联立方程组： } \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2} \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=3 \end{cases}$ (舍去), $\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=\frac{3}{2} \end{cases}$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(4, \frac{3}{2})$.

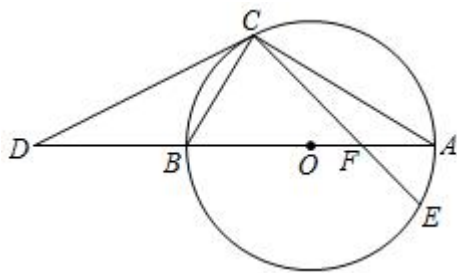


20. (10分) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 连接 AC , BC , D 为 AB 延长线上一点, 连接 CD , 且 $\angle BCD = \angle A$.

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{5}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{5}$, 求 CD 的长;

(3) 在 (2) 的条件下, E 为 $\odot O$ 上一点, 连接 CE 交线段 OA 于点 F , 若 $\frac{EF}{CF} = \frac{1}{2}$, 求 BF 的长.



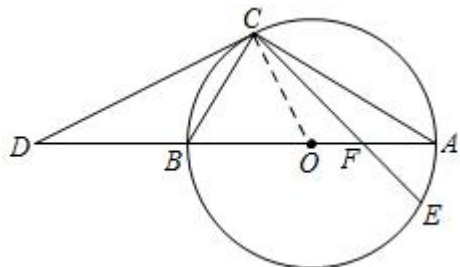
【分析】 (1) 连接 OC , 由 AB 为 $\odot O$ 的直径, 可得 $\angle A + \angle ABC = 90^\circ$, 再证明 $\angle ABC = \angle BCO$, 结合已知 $\angle BCD = \angle A$, 可得 $\angle ACB = 90^\circ$, 从而证明 CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M , 过 B 作 $BN \perp CD$ 于 N , 由 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{5}$, 可得 $CM = 2$, 由 $\angle BCM = \angle A$ 得 $\frac{BM}{CM} = \frac{CM}{AM}$, 可解得 $BM = \sqrt{5} - 1$, 根据 $\triangle BCM \cong \triangle BCN$, 可得 $CN = CM = 2$, 再由 $\triangle DBN \sim \triangle DCM$, 得 $\frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CM} = \frac{DN}{DM}$ 即 $\frac{BD}{DN+2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{DN}{BD+\sqrt{5}-1}$, 解 $DN = 2\sqrt{5} - 2$, 故 $CD = DN + CN = 2\sqrt{5}$;

(3) 过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M , 过 E 作 $EH \perp AB$ 于 H , 连接 OE , 由 $CM \perp AB$, $EH \perp AB$, 可得 $\frac{EF}{CF}$

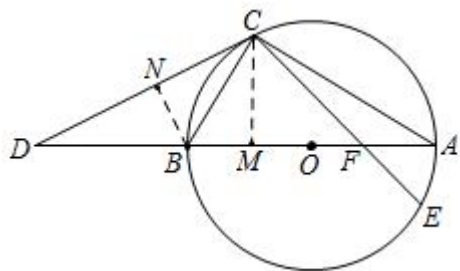
$= \frac{HE}{CM} = \frac{HF}{MF}$, 而 $\frac{EF}{CF} = \frac{1}{2}$, 故 $HE = 1$, $MF = 2HF$, Rt $\triangle OEH$ 中, $OH = 2$, 可得 $AH = OA - OH$
 $= \sqrt{5} - 2$, 设 $HF = x$, 则 $MF = 2x$, 则 $(\sqrt{5} - 1) + 2x + x + (\sqrt{5} - 2) = 2\sqrt{5}$, 可解得 $HF = 1$, $MF = 2$,
 从而 $BF = BM + MF = (\sqrt{5} - 1) + 2 = \sqrt{5} + 1$.

【解答】(1) 证明: 连接 OC , 如图:



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A + \angle ABC = 90^\circ$,
 $\because OB = OC$,
 $\therefore \angle ABC = \angle BCO$,
 又 $\angle BCD = \angle A$,
 $\therefore \angle BCD + \angle BCO = 90^\circ$, 即 $\angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore OC \perp CD$,
 $\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M , 过 B 作 $BN \perp CD$ 于 N , 如图:



$\because \odot O$ 的半径为 $\sqrt{5}$,
 $\therefore AB = 2\sqrt{5}$,
 $\because \triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{5}$,
 $\therefore \frac{1}{2} AB \cdot CM = 2\sqrt{5}$, 即 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \cdot CM = 2\sqrt{5}$,
 $\therefore CM = 2$,
 Rt $\triangle BCM$ 中, $\angle BCM = 90^\circ - \angle CBA$,
 Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ - \angle CBA$,

$$\therefore \angle BCM = \angle A,$$

$$\therefore \tan \angle BCM = \tan A, \text{ 即 } \frac{BM}{CM} = \frac{CM}{AM},$$

$$\therefore \frac{BM}{2} = \frac{2}{2\sqrt{5}-BM},$$

$$\text{解得 } BM = \sqrt{5} - 1, (BM = \sqrt{5} + 1 \text{ 已舍去}),$$

$$\therefore \angle BCD = \angle A, \angle BCM = \angle A,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BCM,$$

$$\text{而 } \angle BMC = \angle BNC = 90^\circ, BC = BC,$$

$$\therefore \triangle BCM \cong \triangle BCN (AAS),$$

$$\therefore CN = CM = 2, BN = BM = \sqrt{5} - 1,$$

$$\therefore \angle DNB = \angle DMC = 90^\circ, \angle D = \angle D,$$

$$\therefore \triangle DNB \sim \triangle DCM,$$

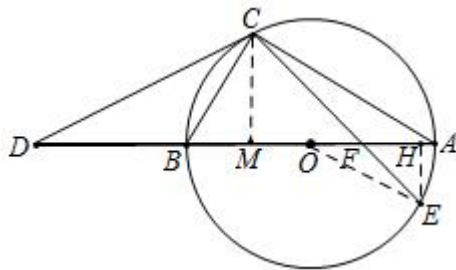
$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CM} = \frac{DN}{DM},$$

$$\text{即 } \frac{BD}{DN+2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{DN}{BD+\sqrt{5}-1},$$

$$\text{解得 } DN = 2\sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore CD = DN + CN = 2\sqrt{5};$$

(3) 过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M , 过 E 作 $EH \perp AB$ 于 H , 连接 OE , 如图:



$$\therefore CM \perp AB, EH \perp AB,$$

$$\therefore \frac{EF}{CF} = \frac{HE}{CM} = \frac{HF}{MF},$$

$$\therefore \frac{EF}{CF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{HE}{CM} = \frac{HF}{MF} = \frac{1}{2},$$

$$\text{由 (2) 知 } CM = 2, BM = \sqrt{5} - 1,$$

$$\therefore HE = 1, MF = 2HF,$$

$$\text{Rt}\triangle OEH \text{ 中, } OH = \sqrt{OE^2 - HE^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2,$$

$$\therefore AH = OA - OH = \sqrt{5} - 2,$$

设 $HF = x$, 则 $MF = 2x$,

$$\text{由 } AB = 2\sqrt{5} \text{ 可得: } BM + MF + HF + AH = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore (\sqrt{5} - 1) + 2x + x + (\sqrt{5} - 2) = 2\sqrt{5},$$

解得: $x = 1$,

$$\therefore HF = 1, MF = 2,$$

$$\therefore BF = BM + MF = (\sqrt{5} - 1) + 2 = \sqrt{5} + 1.$$

一、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分, 答案写在答题卡上)

21. (4 分) 在正比例函数 $y = kx$ 中, y 的值随着 x 值的增大而增大, 则点 $P(3, k)$ 在第 一 象限.

【分析】 因为在正比例函数 $y = kx$ 中, y 的值随着 x 值的增大而增大, 所以 $k > 0$, 所以点 $P(3, k)$ 在第一象限.

【解答】 解: $\because$ 在正比例函数 $y = kx$ 中, y 的值随着 x 值的增大而增大,

$$\therefore k > 0,$$

$\therefore$ 点 $P(3, k)$ 在第一象限.

故答案为: 一.

22. (4 分) 若 m, n 是一元二次方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 的两个实数根, 则 $m^2 + 4m + 2n$ 的值是 -3.

【分析】 先根据一元二次方程的解的定义得到 $m^2 + 2m - 1 = 0$, 则 $m^2 + 2m = 1$, 根据根与系数的关系得出 $m + n = -2$, 再将其代入整理后的代数式计算即可.

【解答】 解: $\because m$ 是一元二次方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 的根,

$$\therefore m^2 + 2m - 1 = 0,$$

$$\therefore m^2 + 2m = 1,$$

$\because m, n$ 是一元二次方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 的两个根,

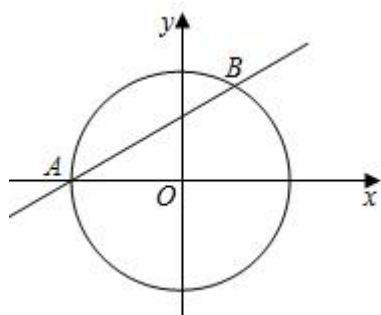
$$\therefore m + n = -2,$$

$$\therefore m^2 + 4m + 2n = m^2 + 2m + 2m + 2n = 1 + 2 \times (-2) = -3.$$

故答案为: -3.

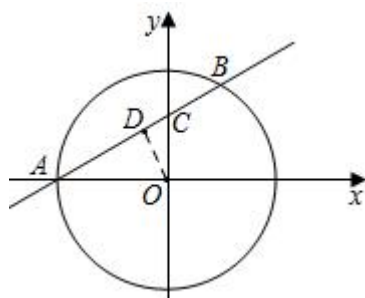
23. (4 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 与 $\odot O$ 相交于 A, B 两点,

且点 A 在 x 轴上，则弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ 。



【分析】 设直线 AB 交 y 轴于 C ，过 O 作 $OD \perp AB$ 于 D ，先求出 A 、 C 坐标，得到 OA 、 OC 长度，可得 $\angle CAO = 30^\circ$ ， $\text{Rt}\triangle AOD$ 中求出 AD 长度，从而根据垂径定理可得答案。

【解答】 解：设直线 AB 交 y 轴于 C ，过 O 作 $OD \perp AB$ 于 D ，如图：



在 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 中，令 $x = 0$ 得 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore C(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, $OC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

在 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 中令 $y = 0$ 得 $\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$ ，

解得 $x = -2$ ，

$\therefore A(-2, 0)$, $OA = 2$ ，

$\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $\tan \angle CAO = \frac{OC}{OA} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore \angle CAO = 30^\circ$ ，

$\text{Rt}\triangle AOD$ 中， $AD = OA \cdot \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ，

$\because OD \perp AB$ ，

$\therefore AD = BD = \sqrt{3}$ ，

$\therefore AB = 2\sqrt{3}$ ，

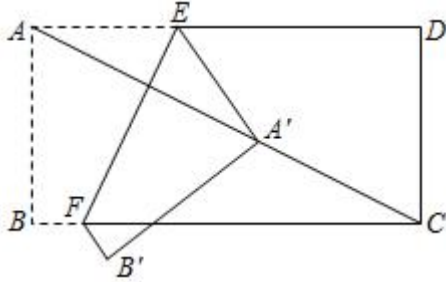
故答案为： $2\sqrt{3}$ 。

24. (4 分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 8$ ，点 E ， F 分别在边 AD ， BC 上，且

$AE = 3$ ，按以下步骤操作：

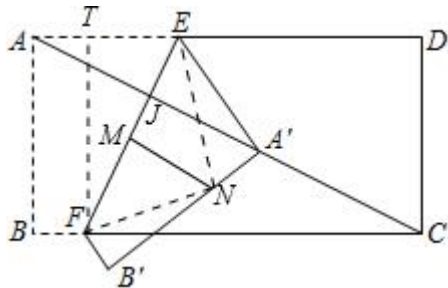
第一步，沿直线 EF 翻折，点 A 的对应点 A' 恰好落在对角线 AC 上，点 B 的对应点为 B' ，则线段 BF 的长为 1；

第二步，分别在 EF ， $A'B'$ 上取点 M ， N ，沿直线 MN 继续翻折，使点 F 与点 E 重合，则线段 MN 的长为 $\sqrt{5}$ 。



【分析】如图，过点 F 作 $FT \perp AD$ 于 T ，则四边形 $ABFT$ 是矩形，连接 FN, EN ，设 AC 交 EF 于 J 。证明 $\triangle FTE \sim \triangle ADC$ ，求出 $ET = 2, EF = 2\sqrt{5}$ ，设 $A'N = x$ ，根据 $NF = NE$ ，可得 $1^2 + (4 - x)^2 = 3^2 + x^2$ ，解方程求出 x ，可得结论。

【解答】解：如图，过点 F 作 $FT \perp AD$ 于 T ，则四边形 $ABFT$ 是矩形，连接 FN, EN ，设 AC 交 EF 于 J 。



$\because$ 四边形 $ABFT$ 是矩形，

$\therefore AB = FT = 4, BF = AT$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = CD = 4, AD = BC = 8, \angle B = \angle D = 90^\circ$

$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ ，

$\because \angle TFE + \angle AEJ = 90^\circ, \angle DAC + \angle AEJ = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle TFE = \angle DAC$ ，

$\because \angle FTE = \angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle FTE \sim \triangle ADC$ ，

$$\therefore \frac{FT}{AD} = \frac{TE}{CD} = \frac{EF}{AC},$$

$$\therefore \frac{4}{8} = \frac{TE}{4} = \frac{EF}{4\sqrt{5}},$$

$$\therefore TE = 2, EF = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BF = AT = AE - ET = 3 - 2 = 1,$$

设 $A'N = x$,

$\because NM$ 垂直平分线段 EF ,

$$\therefore NF = NE,$$

$$\therefore 1^2 + (4 - x)^2 = 3^2 + x^2,$$

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore FN = \sqrt{B'F^2 + B'N^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore MN = \sqrt{FN^2 - FM^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}.$$

故答案为: 1, $\sqrt{5}$ 。

25. (4 分) 我们对一个三角形的顶点和边都赋给一个特征值, 并定义: 从任意顶点出发, 沿顺时针或逆时针方向依次将顶点和边的特征值相乘, 再把三个乘积相加, 所得之和称为此三角形的顺序旋转和或逆序旋转和. 如图 1, $ar+cq+bp$ 是该三角形的顺序旋转和, $ap+bq+cr$ 是该三角形的逆序旋转和. 已知某三角形的特征值如图 2, 若从 1, 2, 3 中任取一个数作为 x , 从 1, 2, 3, 4 中任取一个数作为 y , 则对任意正整数 z , 此三角形的顺序旋转和与逆序旋转和的差都小于 4 的概率是 $\frac{3}{4}$.

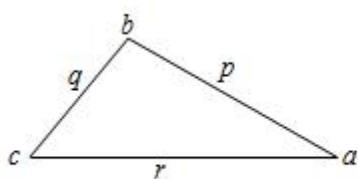


图 1

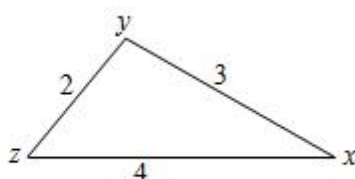
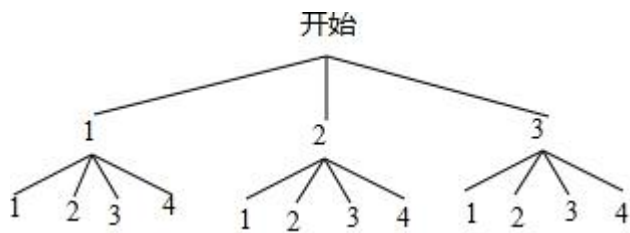


图 2

【分析】 先根据题意计算出该三角形的顺序旋转和与逆序旋转和的差为 $x+y-2z$, 再画树状图展示所有 12 种等可能的结果, 找出此三角形的顺序旋转和与逆序旋转和的差都小于 4 的结果数, 然后根据概率公式求解.

【解答】 解: 该三角形的顺序旋转和与逆序旋转和的差为 $(4x+2z+3y) - (3x+2y-4z)$
 $= x+y-2z$,

画树状图为：



共有 12 种等可能的结果，其中此三角形的顺序旋转和与逆序旋转和的差都小于 4 的结果数为 9，

所以三角形的顺序旋转和与逆序旋转和的差都小于 4 的概率 $= \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

故答案为 $\frac{3}{4}$.

二、解答题（本大题共 3 个小题，共 30 分，答过程写在答题卡上）

26.（8 分）为改善城市人居环境，《成都市生活垃圾管理条例》（以下简称《条例》）于 2021 年 3 月 1 日起正式施行．某区域原来每天需要处理生活垃圾 920 吨，刚好被 12 个 A 型和 10 个 B 型预处置点位进行初筛、压缩等处理．已知一个 A 型点位比一个 B 型点位每天多处理 7 吨生活垃圾．

（1）求每个 B 型点位每天处理生活垃圾的吨数；

（2）由于《条例》的施行，垃圾分类要求提高，在每个点位每天将少处理 8 吨生活垃圾，同时由于市民环保意识增强，该区域每天需要处理的生活垃圾比原来少 10 吨．若该区域计划增设 A 型、 B 型点位共 5 个，试问至少需要增设几个 A 型点位才能当日处理完所有生活垃圾？

【分析】（1）每个 B 型点位每天处理生活垃圾 x 吨，根据“每天需要处理生活垃圾 920 吨，刚好被 12 个 A 型和 10 个 B 型预处置点位进行初筛、压缩等处理”，可列方程，即可解得答案；

（2）设需要增设 y 个 A 型点位才能当日处理完所有生活垃圾，《条例》施行后，每个 A 型点位每天处理生活垃圾 37 吨，每个 B 型点位每天处理生活垃圾 30 吨，根据题意列出不等式： $37(12+y) + 30(10+5-y) \geq 920 - 10$ ，可解得 y 的范围，在求得的范围内取最小正整数值即得到答案．

【解答】解：（1）设每个 B 型点位每天处理生活垃圾 x 吨，则每个 A 型点位每天处理生活垃圾 $(x+7)$ 吨，根据题意可得：

$$12(x+7) + 10x = 920,$$

解得： $x = 38$ ，

答：每个 B 型点位每天处理生活垃圾 38 吨；

(2) 设需要增设 y 个 A 型点位才能当日处理完所有生活垃圾，

由 (1) 可知：《条例》施行前，每个 A 型点位每天处理生活垃圾 45 吨，则《条例》施行后，每个 A 型点位每天处理生活垃圾 $45 - 8 = 37$ (吨)，

《条例》施行前，每个 B 型点位每天处理生活垃圾 38 吨，则《条例》施行后，每个 B 型点位每天处理生活垃圾 $38 - 8 = 30$ (吨)，

根据题意可得： $37(12+y) + 30(10+5-y) \geq 920 - 10$ ，

解得 $y \geq \frac{16}{7}$ ，

$\because y$ 是正整数，

$\therefore$ 符合条件的 y 的最小值为 3，

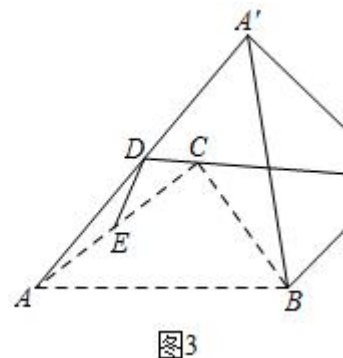
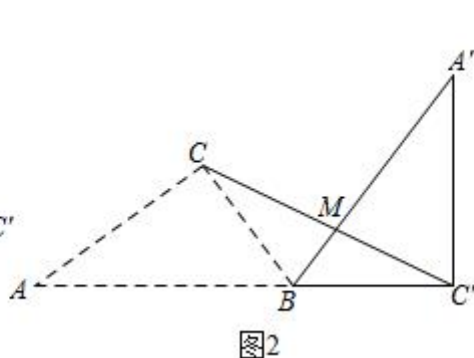
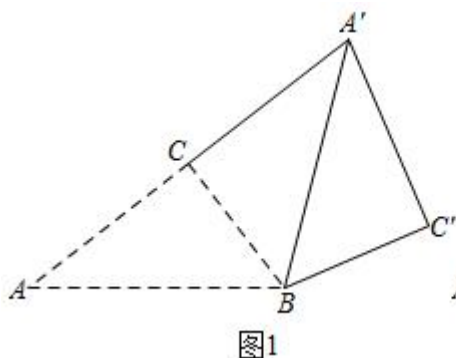
答：至少需要增设 3 个 A 型点位才能当日处理完所有生活垃圾。

27. (10 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，将 ABC 绕点 B 顺时针旋转得到 $\triangle A'BC'$ ，其中点 A ， C 的对应点分别为点 A' ， C' 。

(1) 如图 1，当点 A' 落在 AC 的延长线上时，求 AA' 的长；

(2) 如图 2，当点 C' 落在 AB 的延长线上时，连接 CC' ，交 $A'B$ 于点 M ，求 BM 的长；

(3) 如图 3，连接 AA' ， CC' ，直线 CC' 交 AA' 于点 D ，点 E 为 AC 的中点，连接 DE 。在旋转过程中， DE 是否存在最小值？若存在，求出 DE 的最小值；若不存在，请说明理由。



【分析】 (1) 先求出 $AC = 4$ ，再在 $\text{Rt}\triangle A'BC$ 中，求出 $A'C = \sqrt{A'B^2 - BC^2} = 4$ ，从而可得 $AA' = 8$ ；

(2) 过 C 作 $CE \parallel A'B$ 交 AB 于 E ，过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D ，先证明 $CE = BC = 3$ ，再根据 $S_{\triangle ABC}$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CD, \text{ 求出 } CD, \text{ 进而可得 } DE \text{ 和 } BE \text{ 及 } CE, \text{ 由 } CE \parallel A'B \text{ 得 } \frac{BM}{CE} = \frac{BC'}{C'E},$$

即可得 $BM = \frac{15}{11}$;

(3) 过 A 作 $AP \parallel A'C$ 交 CD 延长线于 P , 连接 $A'C$, 先证明 $\angle ACP = \angle A'CD = \angle P$, 得 $AP = AC = A'C$, 再证明 $\triangle APD \cong \triangle A'CD$ 得 $AD = A'D$, DE 是 $\triangle AA'C$ 的中位线, $DE = \frac{1}{2}A'C$, 要使 DE 最小, 只需 $A'C$ 最小, 此时 A' 、 C 、 B 共线, $A'C$ 的最小值为 $A'B - BC = AB - BC = 2$, 即可得 DE 最小值为 $\frac{1}{2}A'C = 1$.

【解答】解: (1) $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4,$$

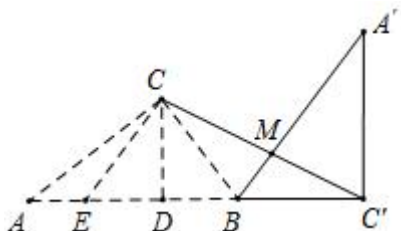
$\because \angle ACB = 90^\circ$, $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转得到 $\triangle A'BC'$, 点 A' 落在 AC 的延长线上,

$$\therefore \angle A'CB = 90^\circ, A'B = AB = 5,$$

$$\text{Rt}\triangle A'BC \text{ 中, } A'C = \sqrt{A'B^2 - BC^2} = 4,$$

$$\therefore AA' = AC + A'C = 8;$$

(2) 过 C 作 $CE \parallel A'B$ 交 AB 于 E , 过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D , 如图:



$\because \triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转得到 $\triangle A'BC'$,

$$\therefore \angle A'BC = \angle ABC, BC' = BC = 3,$$

$\because CE \parallel A'B$,

$$\therefore \angle A'BC = \angle CEB,$$

$$\therefore \angle CEB = \angle ABC,$$

$$\therefore CE = BC = 3,$$

$$\text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CD, AC = 4, BC = 3, AB = 5,$$

$$\therefore CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12}{5},$$

$$\text{Rt}\triangle CED \text{ 中, } DE = \sqrt{CE^2 - CD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{9}{5},$$

$\therefore AD = A'D$, 即 D 是 AA' 中点,

$\because$ 点 E 为 AC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle AA'C$ 的中位线,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}A'C,$$

要使 DE 最小, 只需 $A'C$ 最小, 此时 A' 、 C 、 B 共线, $A'C$ 的最小值为 $A'B - BC = AB - BC = 2$,

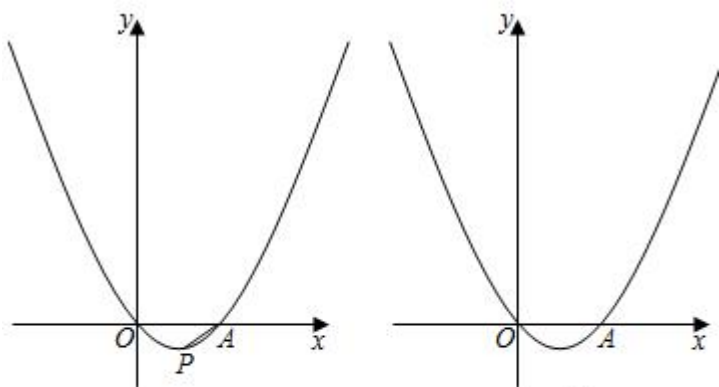
$$\therefore DE \text{ 最小为 } \frac{1}{2}A'C = 1.$$

28. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$ 与 x 轴相交于 O , A 两点, 顶点 P 的坐标为 $(2, -1)$. 点 B 为抛物线上一动点, 连接 AP , AB , 过点 B 的直线与抛物线交于另一点 C .

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 若点 B 的横坐标与纵坐标相等, $\angle ABC = \angle OAP$, 且点 C 位于 x 轴上方, 求点 C 的坐标;

(3) 若点 B 的横坐标为 t , $\angle ABC = 90^\circ$, 请用含 t 的代数式表示点 C 的横坐标, 并求出当 $t < 0$ 时, 点 C 的横坐标的取值范围.



备用图

【分析】 (1) 由抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$, 顶点 P 的坐标为 $(2, -1)$, 可得 $h = 2, k = -1$, 又 $y = a(x-2)^2 - 1$ 的图象过 $(0, 0)$, 即可解得 $a = \frac{1}{4}$, 从而得到抛物线表达式为 $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1 = \frac{1}{4}x^2 - x$;

(2) 在 $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ 中, 令 $y = x$ 得 $x = \frac{1}{4}x^2 - x$, 可得 $B(0, 0)$ 或 $B(8, 8)$, 分两种情况分别求 C ,

① 当 $B(0, 0)$ 时, 过 B 作 $BC \parallel AP$ 交抛物线于 C , 此时 $\angle ABC = \angle OAP$, 先求出直线 AP 解

析式为 $y = \frac{1}{2}x - 2$, 再求得直线 BC 解析式为 $y = \frac{1}{2}x$, 由 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{4}x^2 - x \end{cases}$ 得 $C(6, 3)$; ②当 $B(8, 8)$

时, 过 P 作 $PQ \perp x$ 轴于 Q , 过 B 作 $BH \perp x$ 轴于 H , 作 H 关于 AB 的对称点 M , 作直线 BM 交抛物线于 C , 由 $\tan \angle OAP = \frac{PQ}{AQ} = \frac{1}{2}$, $\tan \angle ABH = \frac{AH}{BH} = \frac{1}{2}$, 可知 $\angle OAP = \angle ABH$, 而 H 关于 AB 的对称点 M , 有 $\angle ABH = \angle ABM$, 故 $\angle ABM = \angle OAP$, C 是满足条件的点, 设 $M(x, y)$, 根据

$AM = AH = 4$, $BM = BH = 8$, 可得 $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-0)^2 = 4^2 \\ (x-8)^2 + (y-8)^2 = 8^2 \end{cases}$ 解得 $M(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$, 从而求得直线

BM 解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 2$, 再解 $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 2 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - x \end{cases}$ 得 $C(-1, \frac{5}{4})$;

(3) 设 BC 交 y 轴于 M , 过 B 作 $BH \perp x$ 轴于 H , 过 M 作 $MN \perp BH$ 于 N , 证明 $\triangle ABH \sim$

$\triangle BMN$, 可得 $\frac{AH}{BN} = \frac{BH}{MN}$, 即 $\frac{|t-4|}{BN} = \frac{|\frac{1}{4}t^2 - t|}{|t|}$, $BN = \frac{|t^2 - 4t|}{|\frac{1}{4}t^2 - t|} = 4$, 故 $M(0, \frac{1}{4}t^2 - t + 4)$,

设直线 BM 解析式为 $y = ex + \frac{1}{4}t^2 - t + 4$, 将 $B(t, \frac{1}{4}t^2 - t)$ 代入得 $e = -\frac{4}{t}$, 可得直线 BM 解析式

为 $y = -\frac{4}{t}x + \frac{1}{4}t^2 - t + 4$, 由 $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x \\ y = -\frac{4}{t}x + \frac{1}{4}t^2 - t + 4 \end{cases}$ 得 $\frac{1}{4}x^2 - x = -\frac{4}{t}x + \frac{1}{4}t^2 - t + 4$, 解得点 C

的横坐标为 $-t - \frac{16}{t} + 4$; 当 $t < 0$ 时, $x_C = -t - \frac{16}{t} + 4 = (\sqrt{-t} - \frac{4}{\sqrt{-t}})^2 + 12$, 可知 $\sqrt{-t} = \frac{4}{\sqrt{-t}}$

时, x_C 最小值是 12, 故当 $t < 0$ 时, 点 C 的横坐标的取值范围是 $x_C \geq 12$.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$, 顶点 P 的坐标为 $(2, -1)$,

$\therefore h = 2, k = -1$, 即抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$ 为 $y = a(x-2)^2 - 1$,

$\because$ 抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$ 经过 O , 即 $y = a(x-2)^2 - 1$ 的图象过 $(0, 0)$,

$\therefore 0 = a(0-2)^2 - 1$, 解得 $a = \frac{1}{4}$,

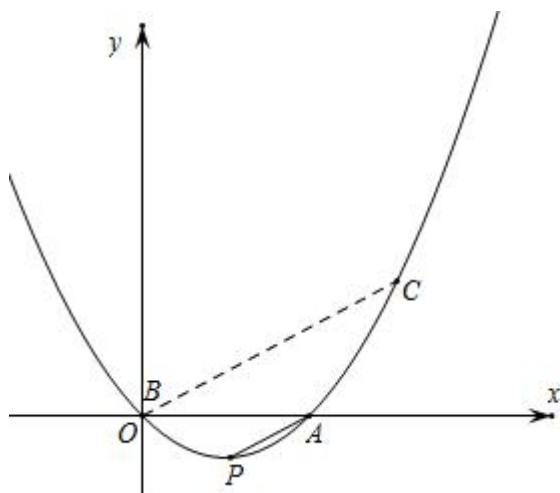
$\therefore$ 抛物线表达式为 $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1 = \frac{1}{4}x^2 - x$;

(2) 在 $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ 中, 令 $y = x$ 得 $x = \frac{1}{4}x^2 - x$,

解得 $x = 0$ 或 $x = 8$,

$\therefore B(0, 0)$ 或 $B(8, 8)$,

①当 $B(0, 0)$ 时, 过 B 作 $BC \parallel AP$ 交抛物线于 C , 此时 $\angle ABC = \angle OAP$, 如图:



在 $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ 中, 令 $y = 0$, 得 $\frac{1}{4}x^2 - x = 0$,

解得 $x = 0$ 或 $x = 4$,

$\therefore A(4, 0)$,

设直线 AP 解析式为 $y = kx + b$, 将 $A(4, 0)$ 、 $P(2, -1)$ 代入得:

$$\begin{cases} 0 = 4k + b \\ -1 = 2k + b \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AP 解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 2$,

$\because BC \parallel AP$,

$\therefore$ 设直线 BC 解析式为 $y = \frac{1}{2}x + b'$, 将 $B(0, 0)$ 代入得 $b' = 0$,

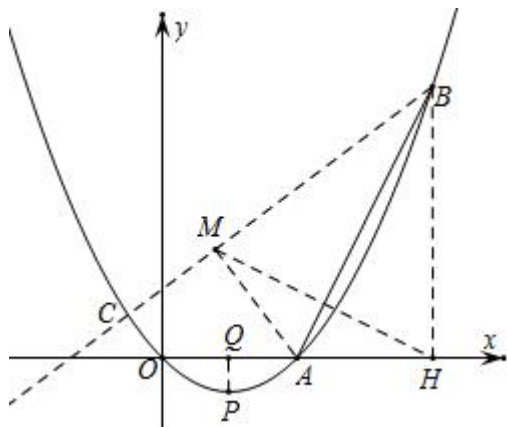
$\therefore$ 直线 BC 解析式为 $y = \frac{1}{2}x$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{4}x^2 - x \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (此时为点 } O, \text{ 舍去) 或 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

$\therefore C(6, 3)$;

②当 $B(8, 8)$ 时, 过 P 作 $PQ \perp x$ 轴于 Q , 过 B 作 $BH \perp x$ 轴于 H , 作 H 关于 AB 的对称点 M ,

作直线 BM 交抛物线于 C , 连接 AM , 如图:



$$\because P(2, -1), A(4, 0),$$

$$\therefore PQ = 1, AQ = 2,$$

$$\text{Rt}\triangle APQ \text{ 中, } \tan \angle OAP = \frac{PQ}{AQ} = \frac{1}{2},$$

$$\because B(8, 8), A(4, 0),$$

$$\therefore AH = 4, BH = 8,$$

$$\text{Rt}\triangle ABH \text{ 中, } \tan \angle ABH = \frac{AH}{BH} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle OAP = \angle ABH,$$

$$\because H \text{ 关于 } AB \text{ 的对称点 } M,$$

$$\therefore \angle ABH = \angle ABM,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle OAP, \text{ 即 } C \text{ 是满足条件的点,}$$

$$\text{设 } M(x, y),$$

$$\because H \text{ 关于 } AB \text{ 的对称点 } M,$$

$$\therefore AM = AH = 4, BM = BH = 8,$$

$$\therefore \begin{cases} (x-4)^2 + (y-0)^2 = 4^2 \\ (x-8)^2 + (y-8)^2 = 8^2 \end{cases},$$

$$\text{两式相减变形可得 } x = 8 - 2y, \text{ 代入即可解得 } \begin{cases} x=8 \\ y=0 \end{cases} \text{ (此时为 } H, \text{ 舍去) 或 } \begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{16}{5} \end{cases},$$

$$\therefore M\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right),$$

$$\text{设直线 } BM \text{ 解析式为 } y = cx + d, \text{ 将 } M\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right), B(8, 8) \text{ 代入得;}$$

$$\begin{cases} 8=8c+d \\ \frac{16}{5}=\frac{8}{5}c+d \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} c=\frac{3}{4}, \\ d=2 \end{cases}$$

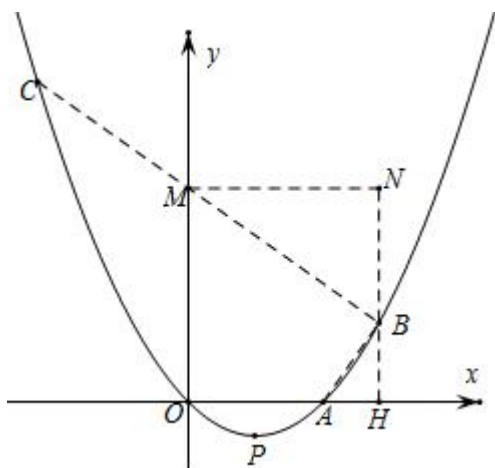
$\therefore$ 直线 BM 解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 2$,

$$\text{解} \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 2 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - x \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{5}{4} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases} \text{ (此时为 } B, \text{舍去),}$$

$\therefore C(-1, \frac{5}{4})$,

综上所述, C 坐标为 $(6, 3)$ 或 $(-1, \frac{5}{4})$;

(3) 设 BC 交 y 轴于 M , 过 B 作 $BH \perp x$ 轴于 H , 过 M 作 $MN \perp BH$ 于 N , 如图:



$\because$ 点 B 的横坐标为 t ,

$\therefore B(t, \frac{1}{4}t^2 - t)$, 又 $A(4, 0)$,

$\therefore AH = |t - 4|, BH = |\frac{1}{4}t^2 - t|, OH = |t| = MN$,

$\because \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle MBN = 90^\circ - \angle ABH = \angle BAH$,

且 $\angle N = \angle AHB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABH \sim \triangle BMN$,

$$\therefore \frac{AH}{BN} = \frac{BH}{MN}, \text{即} \frac{|t-4|}{BN} = \frac{|\frac{1}{4}t^2 - t|}{|t|}$$

$$\therefore BN = \frac{|t^2 - 4t|}{|\frac{1}{4}t^2 - t|} = 4,$$

$$\therefore NH = \frac{1}{4}t^2 - t + 4,$$

$$\therefore M(0, \frac{1}{4}t^2 - t + 4),$$

$$\text{设直线 } BM \text{ 解析式为 } y = ex + \frac{1}{4}t^2 - t + 4,$$

$$\text{将 } B(t, \frac{1}{4}t^2 - t) \text{ 代入得 } \frac{1}{4}t^2 - t = et + \frac{1}{4}t^2 - t + 4,$$

$$\therefore e = -\frac{4}{t},$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 解析式为 } y = -\frac{4}{t}x + \frac{1}{4}t^2 - t + 4,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x \\ y = -\frac{4}{t}x + \frac{1}{4}t^2 - t + 4 \end{cases} \text{ 得 } \frac{1}{4}x^2 - x = -\frac{4}{t}x + \frac{1}{4}t^2 - t + 4,$$

$$\text{解得 } x_1 = t(B \text{ 的横坐标}), x_2 = -\frac{t^2 - 4t + 16}{t} = -t - \frac{16}{t} + 4,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的横坐标为 } -t - \frac{16}{t} + 4;$$

当 $t < 0$ 时,

$$x_C = -t - \frac{16}{t} + 4$$

$$= (\sqrt{-t})^2 + (\frac{4}{\sqrt{-t}})^2 + 4$$

$$= (\sqrt{-t} - \frac{4}{\sqrt{-t}})^2 + 12,$$

$$\therefore \sqrt{-t} = \frac{4}{\sqrt{-t}} \text{ 时, } x_C \text{ 最小值是 } 12, \text{ 此时 } t = -4,$$

$\therefore$ 当 $t < 0$ 时, 点 C 的横坐标的取值范围是 $x_C \geq 12$.