

2020 年四川省达州市中考数学试卷

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

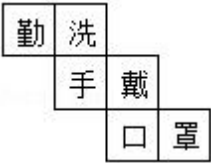
1. (3 分) 人类与病毒的斗争是长期的，不能松懈．据中央电视台报道，截止北京时间 2020 年 6 月 30 日凌晨，全球新冠肺炎患者确诊病例达到 1002 万．1002 万用科学记数法表示，正确的是()

- A. 1.002×10^7 B. 1.002×10^6 C. 1002×10^4 D. 1.002×10^2 万

2. (3 分) 下列各数中，比 3 大比 4 小的无理数是()

- A. 3.14 B. $\frac{10}{3}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{17}$

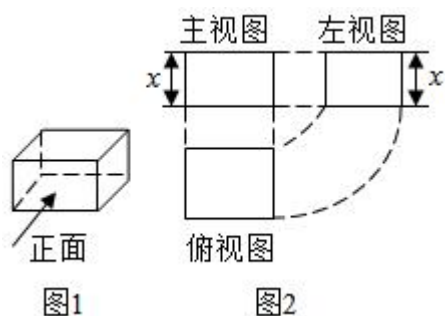
3. (3 分) 下列正方体的展开图上每个面上都有一个汉字．其中，手的对面是口的是()

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

4. (3 分) 下列说法正确的是()

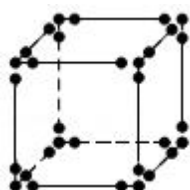
- A. 为了解全国中小学生的心理健康状况，应采用普查
- B. 确定事件一定会发生
- C. 某校 6 位同学在新冠肺炎防疫知识竞赛中成绩分别为 98、97、99、99、98、96，那么这组数据的众数为 98
- D. 数据 6、5、8、7、2 的中位数是 6

5. (3 分) 图 2 是图 1 中长方体的三视图，用 S 表示面积， $S_{\text{主}} = x^2 + 3x$ ， $S_{\text{左}} = x^2 + x$ ，则 $S_{\text{俯}} = ($



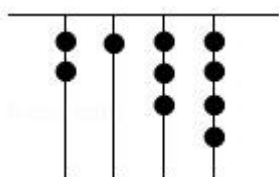
- A. $x^2 + 3x + 2$ B. $x^2 + 2x + 1$ C. $x^2 + 4x + 3$ D. $2x^2 + 4x$

6. (3分) 如图，正方体的每条棱上放置相同数目的小球，设每条棱上的小球数为 m ，下列代数式表示正方体上小球总数，则表达错误的是()



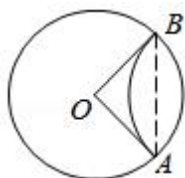
- A. $12(m-1)$ B. $4m + 8(m-2)$ C. $12(m-2) + 8$ D. $12m - 16$

7. (3分) 中国奇书《易经》中记载，远古时期，人们通过在绳子上打结来计数，即“结绳计数”。如图，一位母亲在从右到左依次排列的绳子上打结，满5进1，用来记录孩子自出生后的天数。由图可知，孩子自出生后的天数是()



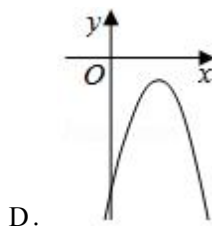
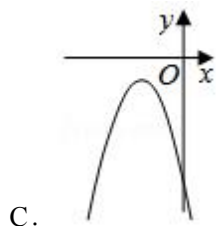
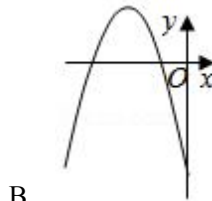
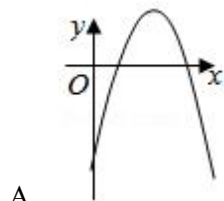
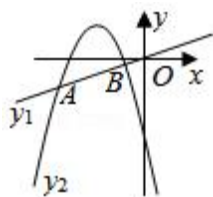
- A. 10 B. 89 C. 165 D. 294

8. (3分) 如图，在半径为5的 $\odot O$ 中，将劣弧 AB 沿弦 AB 翻折，使折叠后的 $\widehat{AB}$ 恰好与 OA 、 OB 相切，则劣弧 AB 的长为()

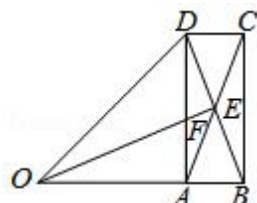


- A. $\frac{5}{3}\pi$ B. $\frac{5}{2}\pi$ C. $\frac{5}{4}\pi$ D. $\frac{5}{6}\pi$

9. (3分) 如图，直线 $y_1 = kx$ 与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx + c$ 交于 A 、 B 两点，则 $y = ax^2 + (b-k)x + c$ 的图象可能是()



10. (3分) 如图, $\angle BOD = 45^\circ$, $BO = DO$, 点 A 在 OB 上, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 连接 AC 、 BD 交于点 E , 连接 OE 交 AD 于点 F . 下列 4 个判断: ① OE 平分 $\angle BOD$; ② $OF = BD$; ③ $DF = \sqrt{2}AF$; ④ 若点 G 是线段 OF 的中点, 则 $\triangle AEG$ 为等腰直角三角形. 正确判断的个数是 ()



- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

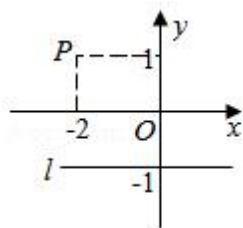
二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

11. (3分) 2019 年是中华人民共和国成立 70 周年, 天安门广场举行了盛大的国庆阅兵式和群众游行活动. 其中, 群众游行队伍以“同心共筑中国梦”为主题, 包含有“建国创业”“改革开放”“伟大复兴”三个部分, 某同学要统计本班学生最喜欢哪个部分, 制作扇形统计图. 以下是打乱了的统计步骤:

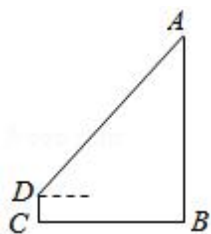
- ① 绘制扇形统计图
- ② 收集三个部分本班学生喜欢的人数
- ③ 计算扇形统计图中三个部分所占的百分比

其中正确的统计顺序是_____.

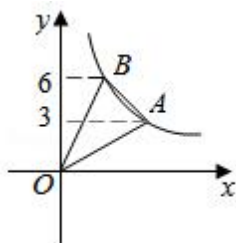
12. (3分) 如图, 点 $P(-2,1)$ 与点 $Q(a,b)$ 关于直线 $l(y=-1)$ 对称, 则 $a+b=$ ____.



13. (3分) 小明为测量校园里一棵大树 AB 的高度, 在树底部 B 所在的水平面内, 将测角仪 CD 竖直放在与 B 相距 $8m$ 的位置, 在 D 处测得树顶 A 的仰角为 52° . 若测角仪的高度是 $1m$, 则大树 AB 的高度约为 _____. (结果精确到 $1m$. 参考数据: $\sin 52^\circ \approx 0.78$, $\cos 52^\circ \approx 0.61$, $\tan 52^\circ \approx 1.28$)



14. (3分) 如图, 点 A 、 B 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上, A 、 B 的纵坐标分别是 3 和 6 , 连接 OA 、 OB , 则 $\triangle OAB$ 的面积是 ____.



15. (3分) 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a 、 b 、 c 满足 $b+|c-3|+a^2-8a=4\sqrt{b-1}-19$, 则 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 = ____.

16. (3分) 已知 k 为正整数, 无论 k 取何值, 直线 $l_1: y = kx + k + 1$ 与直线 $l_2: y = (k+1)x + k + 2$ 都交于一个固定的点, 这个点的坐标是 ____; 记直线 l_1 和 l_2 与 x 轴围成的三角形面积为 S_k , 则 $S_1 =$ ____, $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$ 的值为 ____.

三、解答题: 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤 (共 72 分)

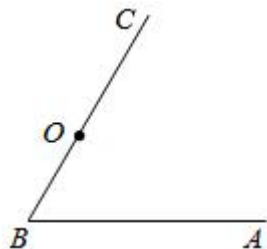
17. (5分) 计算: $-2^2 + (\frac{1}{3})^{-2} + (\pi - \sqrt{5})^0 + \sqrt[3]{-125}$.

18. (7分) 求代数式 $(\frac{2x-1}{x-1} - x - 1) \div \frac{x-2}{x^2-2x+1}$ 的值, 其中 $x = \sqrt{2} + 1$.

19. (7分) 如图, 点 O 在 $\angle ABC$ 的边 BC 上, 以 OB 为半径作 $\odot O$, $\angle ABC$ 的平分线 BM 交 $\odot O$ 于点 D , 过点 D 作 $DE \perp BA$ 于点 E .

(1) 尺规作图 (不写作法, 保留作图痕迹), 补全图形;

(2) 判断 $\odot O$ 与 DE 交点的个数, 并说明理由.



20. (7分) 争创全国文明城市, 从我做起. 尚理中学在八年级开设了文明礼仪校本课程, 为了解学生的学习情况, 随机抽取了 20 名学生的测试成绩, 分数如下:

94 83 90 86 94 88 96 100 89 82

94 82 84 89 88 93 98 94 93 92

整理上面的数据, 得到频数分布表和扇形统计图:

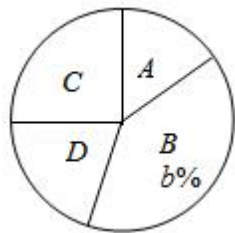
等级	成绩 / 分	频数
A	$95 \leq x \leq 100$	a
B	$90 \leq x < 95$	8
C	$85 \leq x < 90$	5
D	$80 \leq x < 85$	4

根据以上信息, 解答下列问题.

(1) 填空: $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$;

(2) 若成绩不低于 90 分为优秀, 估计该校 1200 名八年级学生中, 达到优秀等级的人数;

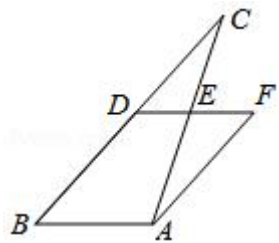
(3) 已知 A 等级中有 2 名女生, 现从 A 等级中随机抽取 2 名同学, 试用列表或画树状图的方法求出恰好抽到一男一女的概率.



21. (8分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $BC = 2AB$, D 、 E 分别是边 BC 、 AC 的中点. 将 $\triangle CDE$ 绕

点 E 旋转 180° 度，得 $\triangle AFE$.

- (1) 判断四边形 $ABDF$ 的形状，并证明；
- (2) 已知 $AB=3$, $AD+BF=8$, 求四边形 $ABDF$ 的面积 S .



22. (8分) 某家具商场计划购进某种餐桌、餐椅进行销售，有关信息如下表：

	原进价 (元/张)	零售价 (元/张)	成套售价 (元/套)
餐桌	a	380	940
餐椅	$a-140$	160	

已知用 600 元购进的餐椅数量与用 1300 元购进的餐桌数量相同 .

- (1) 求表中 a 的值；
- (2) 该商场计划购进餐椅的数量是餐桌数量的 5 倍还多 20 张，且餐桌和餐椅的总数量不超过 200 张 . 若将一半的餐桌成套 (一张餐桌和四张餐椅配成一套) 销售，其余餐桌、餐椅以零售方式销售，请问怎样进货，才能获得最大利润？最大利润是多少？

23. (8分) 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$, $\angle B=90^\circ$, $AB=6cm$, $CD=2cm$. P 为线段 BC 上的一动点，且和 B 、 C 不重合，连接 PA , 过点 P 作 $PE \perp PA$ 交射线 CD 于点 E . 聪聪根据学习函数的经验，对这个问题进行了研究：

- (1) 通过推理，他发现 $\triangle ABP \sim \triangle PCE$, 请你帮他完成证明 .
- (2) 利用几何画板，他改变 BC 的长度，运动点 P , 得到不同位置时， CE 、 BP 的长度的对应值：

当 $BC=6cm$ 时，得表 1：

BP/cm	...	1	2	3	4	5	...
CE/cm	...	0.83	1.33	1.50	1.33	0.83	...

当 $BC=8cm$ 时，得表 2：

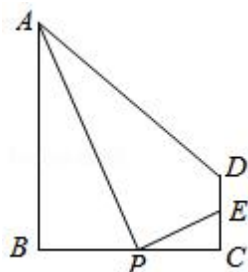
BP/cm	...	1	2	3	4	5	6	7	...
CE/cm	...	1.17	2.00	2.50	2.67	2.50	2.00	1.17	...

这说明，点 P 在线段 BC 上运动时，要保证点 E 总在线段 CD 上， BC 的长度应有一定的限

制.

①填空：根据函数的定义，我们可以确定，在 BP 和 CE 的长度这两个变量中，____ 的长度为自变量，____ 的长度为因变量；

②设 $BC = m$ cm，当点 P 在线段 BC 上运动时，点 E 总在线段 CD 上，求 m 的取值范围.



24. (10 分) (1) [阅读与证明]

如图 1，在正 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CAH$ 内引射线 AM ，作点 C 关于 AM 的对称点 E （点 E 在 $\angle CAH$ 内），连接 BE ， BE 、 CE 分别交 AM 于点 F 、 G 。

①完成证明： $\because$ 点 E 是点 C 关于 AM 的对称点，

$\therefore \angle AGE = 90^\circ$ ， $AE = AC$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。

$\because$ 正 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $AB = AC$ ，

$\therefore AE = AB$ ，得 $\angle 3 = \angle 4$ 。

在 $\triangle ABE$ 中， $\angle 1 + \angle 2 + 60^\circ + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ， $\therefore \angle 1 + \angle 3 = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ 。

在 $\triangle AEG$ 中， $\angle FEG + \angle 3 + \angle 1 = 90^\circ$ ， $\therefore \angle FEG = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ 。

②求证： $BF = AF + 2FG$ 。

(2) [类比与探究]

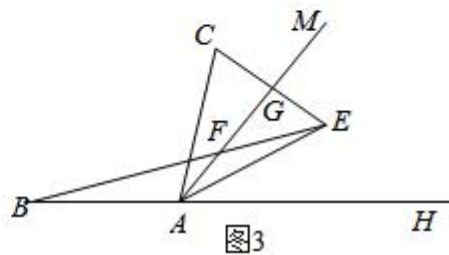
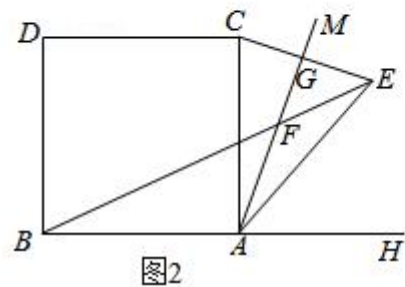
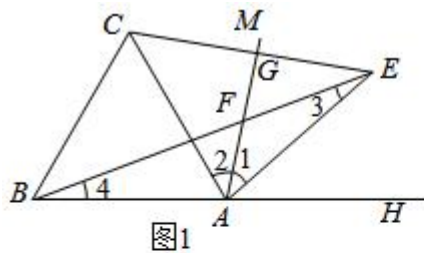
把 (1) 中的“正 $\triangle ABC$ ”改为“正方形 $ABDC$ ”，其余条件不变，如图 2。类比探究，可得：

① $\angle FEG = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ ；

② 线段 BF 、 AF 、 FG 之间存在数量关系_____。

(3) [归纳与拓展]

如图 3，点 A 在射线 BH 上， $AB = AC$ ， $\angle BAC = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)，在 $\angle CAH$ 内引射线 AM ，作点 C 关于 AM 的对称点 E （点 E 在 $\angle CAH$ 内），连接 BE ， BE 、 CE 分别交 AM 于点 F 、 G 。则线段 BF 、 AF 、 GF 之间的数量关系为_____。

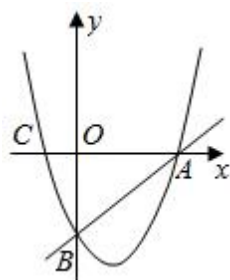


25. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 过 A 、 B 两点的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于另一点 $C(-1, 0)$.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在抛物线上是否存在一点 P , 使 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle OAB}$? 若存在, 请求出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由;

(3) 点 M 为直线 AB 下方抛物线上一点, 点 N 为 y 轴上一点, 当 $\triangle MAB$ 的面积最大时, 求 $MN + \frac{1}{2}ON$ 的最小值.



2020 年四川省达州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) 人类与病毒的斗争是长期的，不能松懈．据中央电视台报道，截止北京时间 2020 年 6 月 30 日凌晨，全球新冠肺炎患者确诊病例达到 1002 万．1002 万用科学记数法表示，正确的是()

- A. 1.002×10^7 B. 1.002×10^6 C. 1002×10^4 D. 1.002×10^2 万

【解答】解：1002 万用科学记数法表示为 1.002×10^7 ，

故选：A．

2. (3 分) 下列各数中，比 3 大比 4 小的无理数是()

- A. 3.14 B. $\frac{10}{3}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{17}$

【解答】解： $3 = \sqrt{9}$ ， $4 = \sqrt{16}$ ，

A、3.14 是有理数，故此选项不合题意；

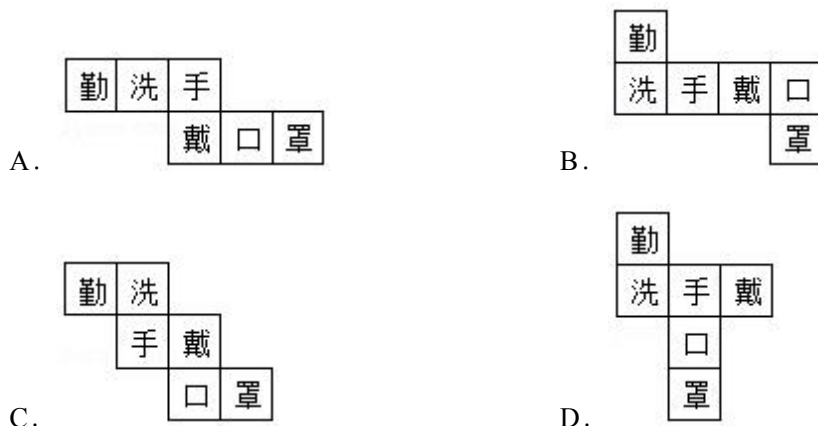
B、 $\frac{10}{3}$ 是有理数，故此选项不符合题意；

C、 $\sqrt{12}$ 是比 3 大比 4 小的无理数，故此选项符合题意；

D、 $\sqrt{17}$ 比 4 大的无理数，故此选项不合题意；

故选：C．

3. (3 分) 下列正方体的展开图上每个面上都有一个汉字．其中，手的对面是口的是()



【解答】解：A、手的对面是勤，不符合题意；

B、手的对面是口，符合题意；

C、手的对面是罩，不符合题意；

D、手的对面是罩，不符合题意；

故选：B。

4. (3分) 下列说法正确的是()

A. 为了解全国中小学生的心理健康状况，应采用普查

B. 确定事件一定会发生

C. 某校6位同学在新冠肺炎防疫知识竞赛中成绩分别为98、97、99、99、98、96，那么这组数据的众数为98

D. 数据6、5、8、7、2的中位数是6

【解答】解：A. 为了解全国中小学生的心理健康状况，应采用抽样调查，此选项错误；

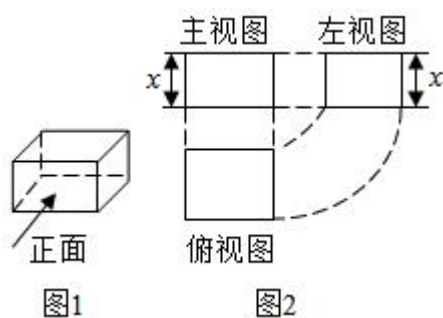
B. 确定事件一定会发生，或一定不会发生，此选项错误；

C. 某校6位同学在新冠肺炎防疫知识竞赛中成绩分别为98、97、99、99、98、96，那么这组数据的众数为98和99，此选项错误；

D. 数据6、5、8、7、2的中位数是6，此选项正确；

故选：D。

5. (3分) 图2是图1中长方体的三视图，用 S 表示面积， $S_{\text{主}} = x^2 + 3x$ ， $S_{\text{左}} = x^2 + x$ ，则 $S_{\text{俯}} =$ ()



A. $x^2 + 3x + 2$

B. $x^2 + 2x + 1$

C. $x^2 + 4x + 3$

D. $2x^2 + 4x$

【解答】解： $\because S_{\text{主}} = x^2 + 3x = x(x+3)$ ， $S_{\text{左}} = x^2 + x = x(x+1)$ ，

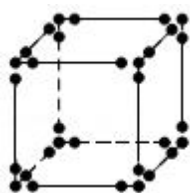
$\therefore$ 俯视图的长为 $x+3$ ，宽为 $x+1$ ，

则俯视图的面积 $S_{\text{俯}} = (x+3)(x+1) = x^2 + 4x + 3$ ，

故选：C。

6. (3分) 如图，正方体的每条棱上放置相同数目的小球，设每条棱上的小球数为 m ，下列

代数式表示正方体上小球总数，则表达错误的是()



- A. $12(m-1)$ B. $4m+8(m-2)$ C. $12(m-2)+8$ D. $12m-16$

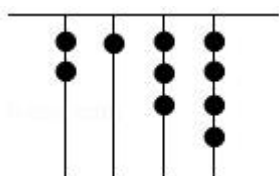
【解答】解：由题意得，当每条棱上的小球数为 m 时，正方体上的所有小球数为 $12m-8\times 2=12m-16$.

而 $12(m-1)=12m-12\neq 12m-16$, $4m+8(m-2)=12m-16$, $12(m-2)+8=12m-16$, 所以 A 选项表达错误，符合题意；

B 、 C 、 D 选项表达正确，不符合题意；

故选： A .

7. (3分) 中国奇书《易经》中记载，远古时期，人们通过在绳子上打结来计数，即“结绳计数”. 如图，一位母亲在从右到左依次排列的绳子上打结，满5进1，用来记录孩子自出生后的天数. 由图可知，孩子自出生后的天数是()

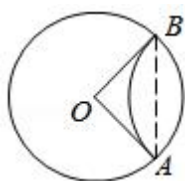


- A. 10 B. 89 C. 165 D. 294

【解答】解： $2\times 5^3+1\times 5^2+3\times 5^1+4\times 5^0=294$,

故选： D .

8. (3分) 如图，在半径为5的 $\odot O$ 中，将劣弧 AB 沿弦 AB 翻折，使折叠后的 $\widehat{AB}$ 恰好与 OA 、 OB 相切，则劣弧 AB 的长为()



- A. $\frac{5}{3}\pi$ B. $\frac{5}{2}\pi$ C. $\frac{5}{4}\pi$ D. $\frac{5}{6}\pi$

【解答】解：如图，作 O 点关于 AB 的对称点 O' ，连接 $O'A$ 、 $O'B$ ，

$\because OA=OB=O'A=O'B$,

∴ 四边形 $OAO'B$ 为菱形,

∵ 折叠后的 $\widehat{AB}$ 与 OA 、 OB 相切,

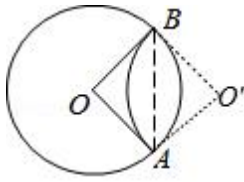
∴ $O'A \perp OA$, $O'B \perp OB$,

∴ 四边形 $OAO'B$ 为正方形,

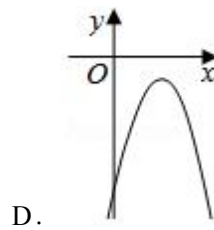
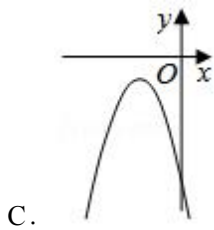
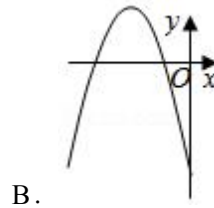
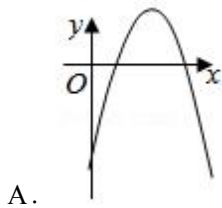
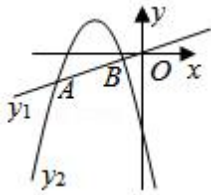
∴ $\angle AOB = 90^\circ$,

∴ 劣弧 AB 的长 $= \frac{90 \cdot \pi \cdot 5}{180} = \frac{5}{2}\pi$.

故选: B .



9. (3分) 如图, 直线 $y_1 = kx$ 与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx + c$ 交于 A 、 B 两点, 则 $y = ax^2 + (b-k)x + c$ 的图象可能是 ()



【解答】 解: 设 $y = y_2 - y_1$,

∵ $y_1 = kx$, $y_2 = ax^2 + bx + c$,

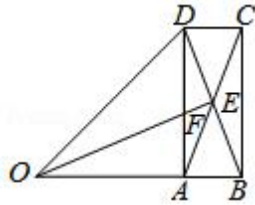
∴ $y = ax^2 + (b-k)x + c$,

由图象可知, 在点 A 和点 B 之间, $y > 0$, 在点 A 的左侧或点 B 的右侧, $y < 0$,

故选项 B 符合题意，选项 A 、 C 、 D 不符合题意；

故选： B ．

10. (3 分) 如图， $\angle BOD = 45^\circ$ ， $BO = DO$ ，点 A 在 OB 上，四边形 $ABCD$ 是矩形，连接 AC 、 BD 交于点 E ，连接 OE 交 AD 于点 F ．下列 4 个判断：① OE 平分 $\angle BOD$ ；② $OF = BD$ ；③ $DF = \sqrt{2}AF$ ；④ 若点 G 是线段 OF 的中点，则 $\triangle AEG$ 为等腰直角三角形．正确判断的个数是 ()



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【解答】解：① $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore EB = ED ,$$

$$\because BO = DO ,$$

$$\therefore OE \text{ 平分 } \angle BOD ,$$

故①正确；

② $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle OAD = \angle BAD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle ADB = 90^\circ ,$$

$$\because OB = OD , \quad BE = DE ,$$

$$\therefore OE \perp BD ,$$

$$\therefore \angle BOE + \angle OBE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BOE = \angle BDA ,$$

$$\because \angle BOD = 45^\circ , \quad \angle OAD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADO = 45^\circ ,$$

$$\therefore AO = AD ,$$

$$\therefore \triangle AOF \cong \triangle ABD (ASA) ,$$

$$\therefore OF = BD ,$$

故②正确；

③ $\because \triangle AOF \cong \triangle ABD$,

$$\therefore AF = AB ,$$

连接 BF , 如图 1,

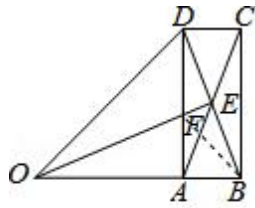


图1

$$\therefore BF = \sqrt{2}AF ,$$

$$\because BE = DE , \quad OE \perp BD ,$$

$$\therefore DF = BF ,$$

$$\therefore DF = \sqrt{2}AF ,$$

故③正确;

④根据题意作出图形, 如图 2,

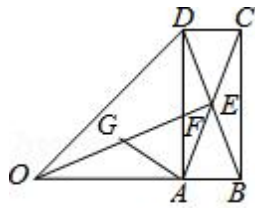


图2

$$\because G \text{ 是 } OF \text{ 的中点}, \quad \angle OAF = 90^\circ ,$$

$$\therefore AG = OG ,$$

$$\therefore \angle AOG = \angle OAG ,$$

$$\because \angle AOD = 45^\circ , \quad OE \text{ 平分 } \angle AOD ,$$

$$\therefore \angle AOG = \angle OAG = 22.5^\circ ,$$

$$\therefore \angle FAG = 67.5^\circ , \quad \angle ADB = \angle AOF = 22.5^\circ ,$$

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是矩形},$$

$$\therefore EA = ED ,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle EDA = 22.5^\circ ,$$

$$\therefore \angle EAG = 90^\circ ,$$

$$\because \angle AGE = \angle AOG + \angle OAG = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle AEG = 45^\circ ,$$

$$\therefore AE = AG,$$

$\therefore \triangle AEG$ 为等腰直角三角形,

故④正确;

故选: A .

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

11. (3 分) 2019 年是中华人民共和国成立 70 周年, 天安门广场举行了盛大的国庆阅兵式和群众游行活动. 其中, 群众游行队伍以“同心共筑中国梦”为主题, 包含有“建国创业”“改革开放”“伟大复兴”三个部分, 某同学要统计本班学生最喜欢哪个部分, 制作扇形统计图. 以下是打乱了的统计步骤:

①绘制扇形统计图

②收集三个部分本班学生喜欢的人数

③计算扇形统计图中三个部分所占的百分比

其中正确的统计顺序是 ②③①.

【解答】解: 正确的统计顺序是:

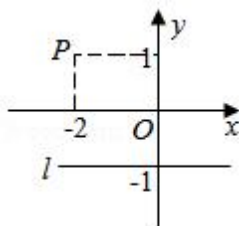
②收集三个部分本班学生喜欢的人数;

③计算扇形统计图中三个部分所占的百分比;

①绘制扇形统计图;

故答案为: ②③①.

12. (3 分) 如图, 点 $P(-2, 1)$ 与点 $Q(a, b)$ 关于直线 $l(y = -1)$ 对称, 则 $a + b =$ -5.



【解答】解: $\because$ 点 $P(-2, 1)$ 与点 $Q(a, b)$ 关于直线 $l(y = -1)$ 对称,

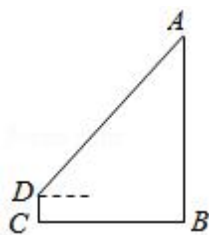
$$\therefore a = -2, \quad b = -3,$$

$$\therefore a + b = -2 - 3 = -5,$$

故答案为 -5.

13. (3 分) 小明为测量校园里一棵大树 AB 的高度, 在树底部 B 所在的水平面内, 将测角仪 CD 竖直放在与 B 相距 $8m$ 的位置, 在 D 处测得树顶 A 的仰角为 52° . 若测角仪的高度是 $1m$, 则大树 AB 的高度约为 11. (结果精确到 $1m$. 参考数据: $\sin 52^\circ \approx 0.78$, $\cos 52^\circ \approx 0.61$,

$\tan 52^\circ \approx 1.28$)

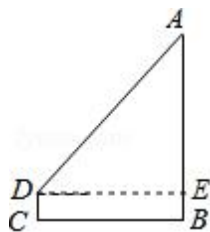


【解答】解：如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，由题意得， $BC = DE = 8$ ， $\angle ADE = 52^\circ$ ， $DE = CD = 1$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中， $AD = DE \cdot \tan \angle ADE = 8 \times \tan 52^\circ \approx 10.24$ ，

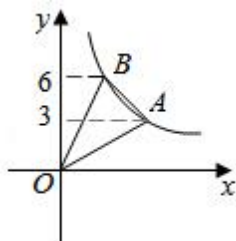
$\therefore AB = AE + BE = 10.24 + 1 \approx 11$ （米）

故答案为：11.



14.（3分）如图，点 A 、 B 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上， A 、 B 的纵坐标分别是 3 和 6，

连接 OA 、 OB ，则 $\triangle OAB$ 的面积是 9。



【解答】解： $\because$ 点 A 、 B 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上， A 、 B 的纵坐标分别是 3 和 6，

$\therefore A(4, 3)$ ， $B(2, 6)$ ，

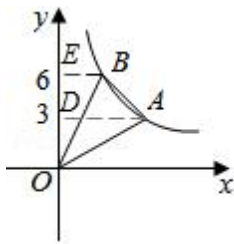
作 $AD \perp y$ 轴于 D ， $BE \perp y$ 轴于 E ，

$\therefore S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOE} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ ，

$\therefore S_{\triangle OAB} = S_{\triangle AOD} + S_{\text{梯形} ABED} - S_{\triangle BOE} = S_{\text{梯形} ABED}$ ，

$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} (4 + 2) \times (6 - 3) = 9$ ，

故答案为 9.



15. (3分) 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a 、 b 、 c 满足 $b+|c-3|+a^2-8a=4\sqrt{b-1}-19$ ，则 $\triangle ABC$ 的内切圆半径= 1 .

【解答】解： $\because b+|c-3|+a^2-8a=4\sqrt{b-1}-19$ ，

$$\therefore |c-3|+(a-4)^2+(\sqrt{b-1}-2)^2=0，$$

$$\therefore c=3，a=4，b=5，$$

$$\because 3^2+4^2=25=5^2，$$

$$\therefore c^2+a^2=b^2，$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC=90^\circ$ ，

设内切圆的半径为 r ，

$$\text{根据题意，得 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 3 \times r + \frac{1}{2} \times 4 \times r + \frac{1}{2} \times r \times 5，$$

$$\therefore r=1，$$

故答案为：1.

16. (3分) 已知 k 为正整数，无论 k 取何值，直线 $l_1: y=kx+k+1$ 与直线 $l_2: y=(k+1)x+k+2$ 都交于一个固定的点，这个点的坐标是 $(-1,1)$ ；记直线 l_1 和 l_2 与 x 轴围成的三角形面积为 S_k ，则 $S_1=$ ， $S_1+S_2+S_3+\dots+S_{100}$ 的值为 .

【解答】解： $\because$ 直线 $l_1: y=kx+k+1=k(x+1)+1$ ，

$\therefore$ 直线 $l_2: y=(k+1)x+k+2$ 经过点 $(-1,1)$ ；

$\because$ 直线 $l_2: y=(k+1)x+k+2=k(x+1)+(x+1)+1=(k+1)(x+1)+1$ ，

$\therefore$ 直线 $l_2: y=(k+1)x+k+2$ 经过点 $(-1,1)$.

$\therefore$ 无论 k 取何值，直线 l_1 与 l_2 的交点均为定点 $(-1,1)$.

$\because$ 直线 $l_1: y=kx+k+1$ 与 x 轴的交点为 $(-\frac{k+1}{k}, 0)$ ，

直线 $l_2: y = (k+1)x + k + 2$ 与 x 轴的交点为 $(-\frac{k+2}{k+1}, 0)$,

$$\therefore S_k = \frac{1}{2} \times |-\frac{k+1}{k} + \frac{k+2}{k+1}| \times 1 = \frac{1}{2k(k+1)},$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{4};$$

$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100} = \frac{1}{2} [\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{100 \times 101}]$$

$$= \frac{1}{2} [(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{100} - \frac{1}{101})]$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{101})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{100}{101}$$

$$= \frac{50}{101}.$$

故答案为 $(-1, 1)$; $\frac{1}{4}$; $\frac{50}{101}$.

三、解答题：解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤（共 72 分）

17.（5 分）计算： $-2^2 + (\frac{1}{3})^{-2} + (\pi - \sqrt{5})^0 + \sqrt[3]{-125}$.

【解答】解：原式 $= -4 + 9 + 1 - 5$

$$= 1.$$

18.（7 分）求代数式 $(\frac{2x-1}{x-1} - x - 1) \div \frac{x-2}{x^2-2x+1}$ 的值，其中 $x = \sqrt{2} + 1$.

【解答】解：原式 $= (\frac{2x-1}{x-1} - \frac{x^2-1}{x-1}) \div \frac{x-2}{(x-1)^2}$

$$= \frac{-x^2+2x}{x-1} \div \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-x(x-2)}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x-2}$$

$$= -x(x-1)$$

当 $x = \sqrt{2} + 1$ 时，

$$\text{原式} = -(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1 - 1)$$

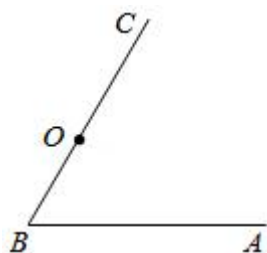
$$= -(\sqrt{2} + 1) \times \sqrt{2}$$

$$= -2 - \sqrt{2}.$$

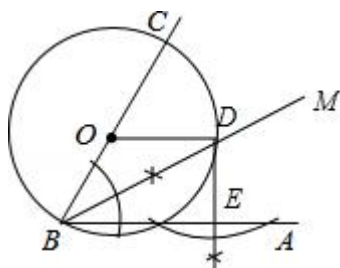
19.（7 分）如图，点 O 在 $\angle ABC$ 的边 BC 上，以 OB 为半径作 $\odot O$ ， $\angle ABC$ 的平分线 BM 交 $\odot O$ 于点 D ，过点 D 作 $DE \perp BA$ 于点 E .

(1) 尺规作图 (不写作法, 保留作图痕迹), 补全图形;

(2) 判断 $\odot O$ 与 DE 交点的个数, 并说明理由.



【解答】解: (1) 如图, $\odot O$, 射线 BM , 直线 DE 即为所求.



(2) 直线 DE 与 $\odot O$ 相切, 交点只有一个.

理由: $\because OB = OD$,

$\therefore \angle ODB = \angle OBD$,

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABM = \angle CBM$,

$\therefore \angle ODB = \angle ABD$,

$\therefore OD \parallel AB$,

$\because DE \perp AB$,

$\therefore DE \perp OD$,

$\therefore$ 直线 AE 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \odot O$ 与直线 DE 只有一个交点.

20. (7 分) 争创全国文明城市, 从我做起. 尚理中学在八年级开设了文明礼仪校本课程,

为了解学生的学习情况, 随机抽取了 20 名学生的测试成绩, 分数如下:

94 83 90 86 94 88 96 100 89 82

94 82 84 89 88 93 98 94 93 92

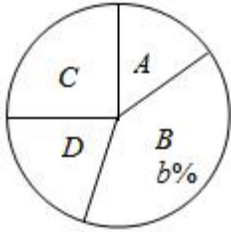
整理上面的数据, 得到频数分布表和扇形统计图:

等级	成绩 / 分	频数
----	--------	----

A	$95 \leq x \leq 100$	a
B	$90 \leq x < 95$	8
C	$85 \leq x < 90$	5
D	$80 \leq x < 85$	4

根据以上信息，解答下列问题．

- (1) 填空： $a = \underline{3}$ ， $b = \underline{\quad}$ ；
- (2) 若成绩不低于 90 分为优秀，估计该校 1200 名八年级学生中，达到优秀等级的人数；
- (3) 已知 A 等级中有 2 名女生，现从 A 等级中随机抽取 2 名同学，试用列表或画树状图的方法求出恰好抽到一男一女的概率．



【解答】解：(1) 由题意知 $a = 20 - (8 + 5 + 4) = 3$ ， $b\% = \frac{8}{20} \times 100\% = 40\%$ ，即 $b = 40$ ；

故答案为：3、40；

(2) 估计该校 1200 名八年级学生中，达到优秀等级的人数为 $1200 \times \frac{8+3}{20} = 660$ （人）；

(3) 列表如下：

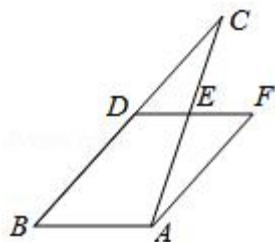
	男	女	女
男		(男，女)	(男，女)
女	(男，女)		(女，女)
女	(男，女)	(女，女)	

所有等可能的结果有 6 种，其中恰好是一名男生和一名女生的情况有 4 种，

$\therefore$ 恰好抽到一男一女的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ．

21. (8 分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $BC = 2AB$ ， D 、 E 分别是边 BC 、 AC 的中点．将 $\triangle CDE$ 绕点 E 旋转 180 度，得 $\triangle AFE$ ．

- (1) 判断四边形 $ABDF$ 的形状，并证明；
- (2) 已知 $AB = 3$ ， $AD + BF = 8$ ，求四边形 $ABDF$ 的面积 S ．



【解答】解：（1）结论：四边形 $ABDF$ 是菱形．

$$\because CD = DB, CE = EA,$$

$$\therefore DE \parallel AB, AB = 2DE,$$

由旋转的性质可知， $DE = EF$ ，

$$\therefore AB = DF, AB \parallel DF,$$

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形，

$$\because BC = 2AB, BD = DC,$$

$$\therefore BA = BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是菱形．

（2）连接 BF ， AD 交于点 O ．

$\because$ 四边形 $ABDF$ 是菱形，

$$\therefore AD \perp BF, OB = OF, AO = OD, \text{ 设 } OA = x, OB = y,$$

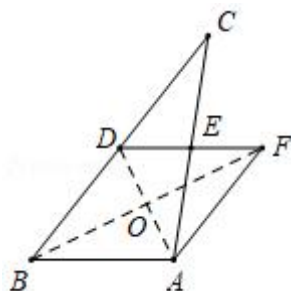
$$\text{则有 } \begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases},$$

$$\therefore x + y = 4,$$

$$\therefore x^2 + 2xy + y^2 = 16,$$

$$\therefore 2xy = 7,$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABDF} = \frac{1}{2} \times BF \times AD = 2xy = 7.$$



22.（8分）某家具商场计划购进某种餐桌、餐椅进行销售，有关信息如下表：

	原进价（元/张）	零售价（元/张）	成套售价（元/套）
餐桌	a	380	940
餐椅	$a - 140$	160	

已知用 600 元购进的餐椅数量与用 1300 元购进的餐桌数量相同.

(1) 求表中 a 的值;

(2) 该商场计划购进餐椅的数量是餐桌数量的 5 倍还多 20 张, 且餐桌和餐椅的总数量不超过 200 张. 若将一半的餐桌成套 (一张餐桌和四张餐椅配成一套) 销售, 其余餐桌、餐椅以零售方式销售, 请问怎样进货, 才能获得最大利润? 最大利润是多少?

【解答】 解: (1) 根据题意得: $\frac{600}{a-140} = \frac{1300}{a}$,

解得 $a = 260$,

经检验, $a = 260$ 是原分式方程的解.

答: 表中 a 的值为 260.

(2) 设购进餐桌 x 张, 则购进餐椅 $(5x + 20)$ 张,

根据题意得: $x + 5x + 20 \leq 200$,

解得: $x \leq 30$.

设销售利润为 y 元,

根据题意得:

$$y = [940 - 260 - 4 \times (260 - 140)] \times \frac{1}{2}x + (380 - 260) \times \frac{1}{2}x + [160 - (260 - 140)] \times (5x + 20 - 4 \times \frac{1}{2}x) = 280x + 800$$

,

$\therefore k = 280 > 0$,

$\therefore$ 当 $x = 30$ 时, y 取最大值, 最大值为: $280 \times 30 + 800 = 9200$.

答: 当购进餐桌 30 张、餐椅 170 张时, 才能获得最大利润, 最大利润是 9200 元.

23. (8 分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 6\text{cm}$, $CD = 2\text{cm}$. P 为线段 BC 上的一动点, 且和 B 、 C 不重合, 连接 PA , 过点 P 作 $PE \perp PA$ 交射线 CD 于点 E . 聪聪根据学习函数的经验, 对这个问题进行了研究:

(1) 通过推理, 他发现 $\triangle ABP \sim \triangle PCE$, 请你帮他完成证明.

(2) 利用几何画板, 他改变 BC 的长度, 运动点 P , 得到不同位置时, CE 、 BP 的长度的

对应值：

当 $BC = 6\text{cm}$ 时，得表 1：

BP / cm	...	1	2	3	4	5	...
CE / cm	...	0.83	1.33	1.50	1.33	0.83	...

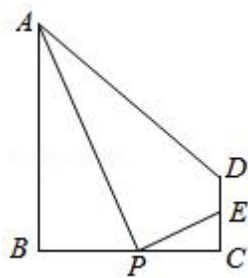
当 $BC = 8\text{cm}$ 时，得表 2：

BP / cm	...	1	2	3	4	5	6	7	...
CE / cm	...	1.17	2.00	2.50	2.67	2.50	2.00	1.17	...

这说明，点 P 在线段 BC 上运动时，要保证点 E 总在线段 CD 上， BC 的长度应有一定的限制。

①填空：根据函数的定义，我们可以确定，在 BP 和 CE 的长度这两个变量中， BP 的长度为自变量， 的长度为因变量；

②设 $BC = m\text{cm}$ ，当点 P 在线段 BC 上运动时，点 E 总在线段 CD 上，求 m 的取值范围。



【解答】（1）证明： $\because AB \perp CD$ ，

$$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

$$\because AP \perp PE,$$

$$\therefore \angle APE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB + \angle EPC = 90^\circ,$$

$$\because \angle EPC + \angle PEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle PEC,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCE.$$

（2）解：①根据函数的定义，我们可以确定，在 BP 和 CE 的长度这两个变量中， BP 的长

度为自变量， EC 的长度为因变量，

故答案为： BP ， EC 。

②设 $BP = xcm$ ， $CE = ycm$ 。

$\because \triangle ABP \sim \triangle PCE$ ，

$$\therefore \frac{AB}{PC} = \frac{BP}{CE},$$

$$\therefore \frac{6}{m-x} = \frac{x}{y},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}mx = -\frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}m\right)^2 + \frac{m^2}{24},$$

$$\therefore -\frac{1}{6} < 0,$$

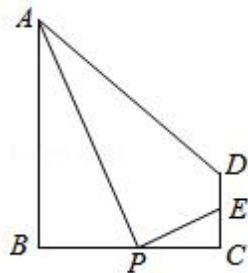
$$\therefore x = \frac{1}{2}m \text{ 时, } y \text{ 有最大值 } \frac{m^2}{24},$$

$\because$ 点 E 在线段 CD 上， $CD = 2cm$ ，

$$\therefore \frac{m^2}{24} \leq 2,$$

$$\therefore m \leq 4\sqrt{3},$$

$$\therefore 0 < m \leq 4\sqrt{3}.$$



24. (10分)(1) [阅读与证明]

如图 1，在正 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CAH$ 内引射线 AM ，作点 C 关于 AM 的对称点 E （点 E 在 $\angle CAH$ 内），连接 BE ， BE 、 CE 分别交 AM 于点 F 、 G 。

①完成证明： $\because$ 点 E 是点 C 关于 AM 的对称点，

$$\therefore \angle AGE = 90^\circ, \quad AE = AC, \quad \angle 1 = \angle 2.$$

$\because$ 正 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $AB = AC$ ，

$$\therefore AE = AB, \quad \text{得 } \angle 3 = \angle 4.$$

在 $\triangle ABE$ 中， $\angle 1 + \angle 2 + 60^\circ + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ， $\therefore \angle 1 + \angle 3 = \underline{60}^\circ$ 。

在 $\triangle AEG$ 中, $\angle FEG + \angle 3 + \angle 1 = 90^\circ$, $\therefore \angle FEG = \underline{\quad}^\circ$.

②求证: $BF = AF + 2FG$.

(2) [类比与探究]

把(1)中的“正 $\triangle ABC$ ”改为“正方形 $ABDC$ ”, 其余条件不变, 如图 2. 类比探究, 可得:

① $\angle FEG = \underline{\quad}^\circ$;

② 线段 BF 、 AF 、 FG 之间存在数量关系 $\underline{\quad}$.

(3) [归纳与拓展]

如图 3, 点 A 在射线 BH 上, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$, 在 $\angle CAH$ 内引射线 AM , 作点 C 关于 AM 的对称点 E (点 E 在 $\angle CAH$ 内), 连接 BE , BE 、 CE 分别交 AM 于点 F 、 G . 则线段 BF 、 AF 、 GF 之间的数量关系为 $\underline{\quad}$.

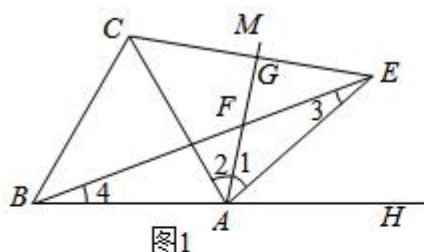


图1

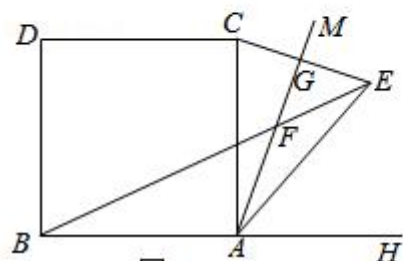


图2

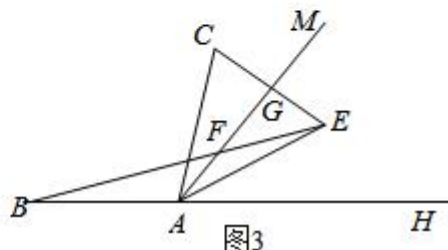


图3

【解答】(1) ①解: 如图 1 中, $\because$ 点 E 是点 C 关于 AM 的对称点,

$\therefore \angle AGE = 90^\circ$, $AE = AC$, $\angle 1 = \angle 2$.

$\because$ 正 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore AE = AB$, 得 $\angle 3 = \angle 4$.

在 $\triangle ABE$ 中, $\angle 1 + \angle 2 + 60^\circ + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$,

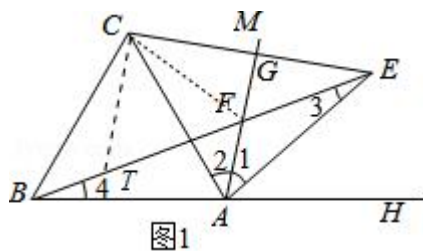
$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 60^\circ$.

在 $\triangle AEG$ 中, $\angle FEG + \angle 3 + \angle 1 = 90^\circ$,

$\therefore \angle FEG = 30^\circ$.

故答案为 60, 30.

②证明：如图 1 中，连接 CF ，在 FB 上取一点 T ，使得 $FT = CF$ ，连接 CT 。



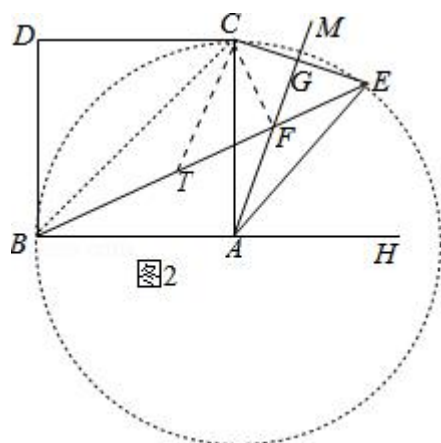
$\because C, E$ 关于 AM 对称,
 $\therefore AM$ 垂直平分线段 EC ,
 $\therefore FE = FC$,
 $\therefore \angle FEC = \angle FCE = 30^\circ$, $EF = 2FG$,
 $\therefore \angle CFT = \angle FEC + \angle FCE = 60^\circ$,
 $\because FC = FT$,
 $\therefore \triangle CFT$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle ACB = \angle FCT = 60^\circ$, $CF = CT = FT$,
 $\therefore \angle BCT = \angle ACF$,
 $\because CB = CA$,
 $\therefore \triangle BCT \cong \triangle ACF (SAS)$,
 $\therefore BT = AF$,
 $\therefore BF = BT + FT = AF + EF = AF + 2FG$.

(2) 解：①如图 2 中， $\because AB = AC = AE$,
 $\therefore$ 点 A 是 $\triangle ECB$ 的外接圆的圆心,
 $\therefore \angle BEC = \frac{1}{2} \angle BAC$,
 $\because \angle BAC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle FEG = 45^\circ$.

故答案为 45.

②结论： $BF = \sqrt{2}AF + \sqrt{2}FG$.

理由：如图 2 中，连接 CF ，在 FB 上取一点 T ，使得 $FT = CF$ ，连接 CT 。



$$\because AM \perp EC, \quad CG = CE,$$

$$\therefore FC = EF,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle FCE = 45^\circ, \quad EF = \sqrt{2}FG,$$

$$\therefore \angle CFT = \angle FEC + \angle FCE = 90^\circ,$$

$$\because CF = CT,$$

$\therefore \triangle CFT$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CT = \sqrt{2}CF,$$

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore BC = \sqrt{2}AC,$$

$$\therefore \frac{CT}{CF} = \frac{CB}{CA},$$

$$\because \angle BCA = \angle TCF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCT = \angle ACF,$$

$$\therefore \triangle BCT \sim \triangle ACF,$$

$$\therefore \frac{BT}{AF} = \frac{BC}{AC} = \sqrt{2},$$

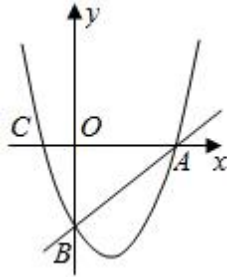
$$\therefore BT = \sqrt{2}AF,$$

$$\therefore BF = BT + TF = \sqrt{2}AF + \sqrt{2}FG \dots$$

(3) 如图 3 中, 连接 CF , BC , 在 BF 上取一点 T , 使得 $FT = CF$.

在，请说明理由；

(3) 点 M 为直线 AB 下方抛物线上一点，点 N 为 y 轴上一点，当 $\triangle MAB$ 的面积最大时，求 $MN + \frac{1}{2}ON$ 的最小值．



【解答】解：(1) $\because$ 直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，

$\therefore$ 点 $A(4,0)$ ，点 $B(0,-2)$ ，

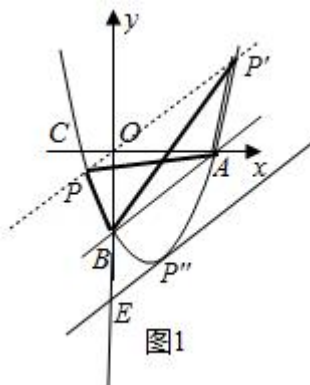
设抛物线解析式为： $y = a(x+1)(x-4)$ ，

$\therefore -2 = -4a$ ，

$\therefore a = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为： $y = \frac{1}{2}(x+1)(x-4) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ ；

(2) 如图，当点 P 在直线 AB 上方时，过点 O 作 $OP \parallel AB$ ，交抛物线于点 P ，



$\because OP \parallel AB$ ，

$\therefore \triangle ABP$ 和 $\triangle ABO$ 是等底等高的两个三角形，

$\therefore S_{\triangle PAB} = S_{\triangle ABO}$ ，

$\because OP \parallel AB$ ，

$\therefore$ 直线 PO 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x$ ，

$$\text{联立方程组可得} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 - 2\sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 点 $P(2 + 2\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ 或 $(2 - 2\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$;

当点 P'' 在直线 AB 下方时, 在 OB 的延长线上截取 $BE = OB = 2$, 过点 E 作 $EP'' \parallel AB$, 交抛物线于点 P'' ,

$\therefore AB \parallel EP'' \parallel OP$, $OB = BE$,

$$\therefore S_{\triangle ABP''} = S_{\triangle ABO},$$

$\because EP'' \parallel AB$, 且过点 $E(0, -4)$,

$\therefore$ 直线 EP'' 解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 4$,

$$\text{联立方程组可得} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 4 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 $P''(2, -3)$,

综上所述: 点 P 坐标为 $(2 + 2\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ 或 $(2 - 2\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ 或 $(2, -3)$;

(3) 如图 2, 过点 M 作 $MF \perp AC$, 交 AB 于 F ,

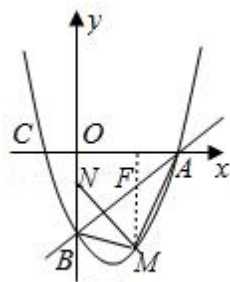


图2

设点 $M(m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m - 2)$, 则点 $F(m, \frac{1}{2}m - 2)$,

$$\therefore MF = \frac{1}{2}m - 2 - (\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m - 2) = -\frac{1}{2}(m - 2)^2 + 2,$$

$$\therefore \triangle MAB \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times 4 \times \left[-\frac{1}{2}(m-2)^2 + 2 \right] = -(m-2)^2 + 4,$$

$\therefore$ 当 $m=2$ 时, $\triangle MAB$ 的面积有最大值,

$\therefore$ 点 $M(2, -3)$,

如图 3, 过点 O 作 $\angle KOB = 30^\circ$, 过点 N 作 $KN \perp OK$ 于 K 点, 过点 M 作 $MR \perp OK$ 于 R , 延长 MF 交直线 KO 于 Q ,

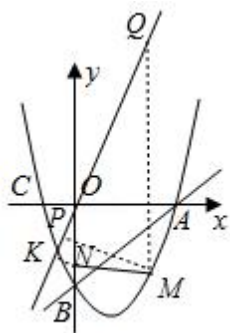


图3

$\because \angle KOB = 30^\circ$, $KN \perp OK$,

$$\therefore KN = \frac{1}{2}ON,$$

$$\therefore MN + \frac{1}{2}ON = MN + KN,$$

$\therefore$ 当点 M , 点 N , 点 K 三点共线, 且垂直于 OK 时, $MN + \frac{1}{2}ON$ 有最小值, 即最小值为 MP ,

$\because \angle KOB = 30^\circ$,

$\therefore$ 直线 OK 解析式为 $y = \sqrt{3}x$,

当 $x=2$ 时, 点 $Q(2, 2\sqrt{3})$,

$$\therefore QM = 2\sqrt{3} + 3,$$

$\because OB \parallel QM$,

$$\therefore \angle PQM = \angle PON = 30^\circ,$$

$$\therefore PM = \frac{1}{2}QM = \sqrt{3} + \frac{3}{2},$$

$$\therefore MN + \frac{1}{2}ON \text{ 的最小值为 } \sqrt{3} + \frac{3}{2}.$$