

2020 年四川省德阳市中考数学真题及答案

(满分 150 分，考试时间 120 分钟)

一、选择题 (本大题共 12 个小题，每小题 4 分，共 48 分。在每小题给出的四个选项中，有且仅有一项是符合题目要求的)

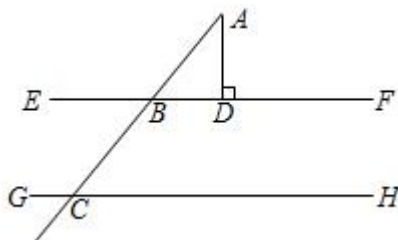
1. $\frac{1}{3}$ 的相反数是 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

2. 下列运算正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $(3a)^3 = 9a^3$ C. $3a - 2a = 1$ D. $(-2a^2)^3 = -8a^6$

3. 如图所示，直线 $EF \parallel GH$ ，射线 AC 分别交直线 EF 、 GH 于点 B 和点 C ， $AD \perp EF$ 于点 D ，如果 $\angle A = 20^\circ$ ，则 $\angle ACG =$ ()



- A. 160° B. 110° C. 100° D. 70°

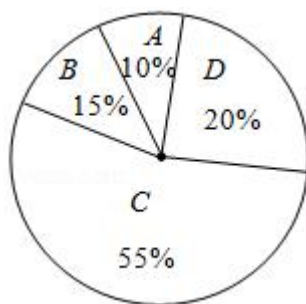
4. 下列说法错误的是 ()

- A. 方差可以衡量一组数据的波动大小
B. 抽样调查抽取的样本是否具有代表性，直接关系对总体估计的准确程度
C. 一组数据的众数有且只有一个
D. 抛掷一枚图钉针尖朝上的概率，不能用列举法求得

5. 多边形的内角和不可能为 ()

- A. 180° B. 540° C. 1080° D. 1200°

6. 某商场销售 A, B, C, D 四种商品，它们的单价依次是 50 元，30 元，20 元，10 元。某天这四种商品销售数量的百分比如图所示，则这天销售的四种商品的平均单价是 ()



- A. 19.5 元 B. 21.5 元 C. 22.5 元 D. 27.5 元

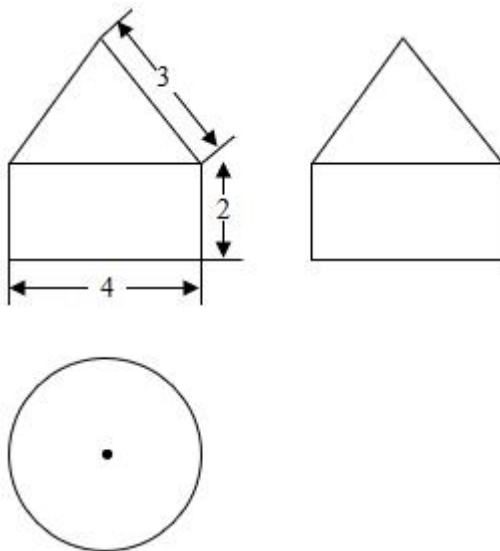
7. 半径为 R 的圆内接正三角形、正方形、正六边形的边心距分别为 a , b , c ，则 a , b , c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $c < b < a$

8. 已知函数 $y = \begin{cases} -x+1 & (x < 2) \\ -\frac{2}{x} & (x \geq 2) \end{cases}$ ，当函数值为 3 时，自变量 x 的值为 ()

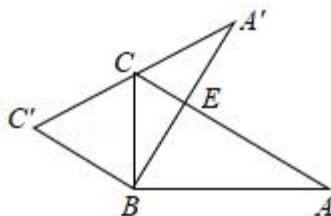
- A. -2 B. $-\frac{2}{3}$ C. -2 或 $-\frac{2}{3}$ D. -2 或 $-\frac{3}{2}$

9. 如图是一个几何体的三视图，根据图中所示数据计算这个几何体的表面积是 ()



- A. 20π B. 18π C. 16π D. 14π

10. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ 。将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针方向旋转得到 $\triangle A'BC'$ 。此时恰好点 C 在 $A'C'$ 上， $A'B$ 交 AC 于点 E ，则 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 ()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

11. 已知：等腰直角三角形 ABC 的腰长为 4，点 M 在斜边 AB 上，点 P 为该平面内一动点，且满足 $PC = 2$ ，则 PM 的最小值为 ()

- A. 2 B. $2\sqrt{2}-2$ C. $2\sqrt{2}+2$ D. $2\sqrt{2}$

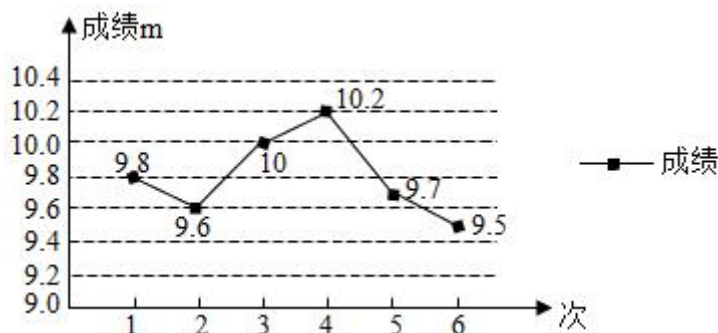
12. 已知不等式 $ax+b > 0$ 的解集为 $x < 2$ ，则下列结论正确的个数是 ()

- (1) $2a+b=0$;
- (2) 当 $c > a$ 时，函数 $y = ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴没有公共点;
- (3) 当 $c > 0$ 时，抛物线 $y = ax^2+bx+c$ 的顶点在直线 $y = ax+b$ 的上方;
- (4) 如果 $b < 3$ 且 $2a - mb - m = 0$ ，则 m 的取值范围是 $-\frac{3}{4} < m < 0$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

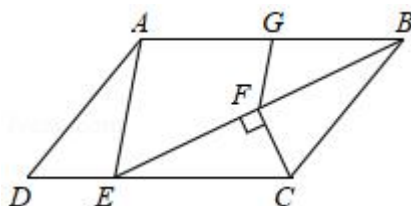
二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

13. 小明在体考时选择了投掷实心球, 如图是体育老师记录的小明在训练时投掷实心球的 6 次成绩的折线统计图. 这 6 次成绩的中位数是_____.



14. 把 $ax^2 - 4a$ 分解因式的结果是_____.

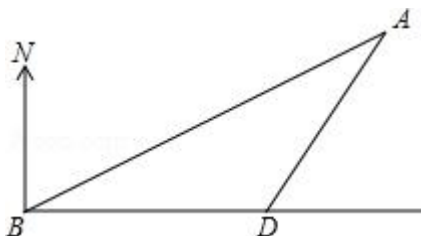
15. 如图, 在平行四边形 ABCD 中, BE 平分 $\angle ABC$, $CF \perp BE$, 连接 AE, G 是 AB 的中点, 连接 GF, 若 $AE = 4$, 则 $GF =$ _____.



16. 将正偶数按照如下规律进行分组排列, 依次为 (2), (4, 6), (8, 10, 12), (14, 16, 18, 20) ..., 我们称“4”是第 2 组第 1 个数字, “16”是第 4 组第 2 个数字, 若 2020 是第 m 组第 n 个数字, 则 $m+n =$ _____.

17. 若实数 x, y 满足 $x+y^2=3$, 设 $s=x^2+8y^2$, 则 s 的取值范围是_____.

18. 如图, 海中有一小岛 A, 它周围 10.5 海里内有暗礁, 渔船跟踪鱼群由西向东航行. 在 B 点测得小岛 A 在北偏东 60° 方向上, 航行 12 海里到达 D 点, 这时测得小岛 A 在北偏东 30° 方向上. 如果渔船不改变航线继续向东航行, 那么渔船还需航行_____海里就开始有触礁的危险.



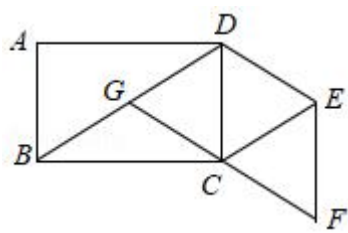
三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 78 分. 答应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

19. (7 分) 计算: $(-2)^{-2} - |\sqrt{3} - 2| + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^0 - \sqrt[3]{8} - 2\cos 30^\circ$.

20. (8 分) 如图, 四边形 ABCD 为矩形, G 是对角线 BD 的中点. 连接 GC 并延长至 F, 使 $CF = GC$, 以 DC, CF 为邻边作菱形 DCFE, 连接 CE.

(1) 判断四边形 CEDG 的形状, 并证明你的结论.

(2) 连接 DF，若 $BC = \sqrt{3}$ ，求 DF 的长.



21. (13 分) 为了加强学生的垃圾分类意识，某校对学生进行了一次系统全面的垃圾分类宣传. 为了解这次宣传的效果，从全校学生中随机抽取部分学生进行了一次测试，测试结果共分为四个等级：A. 优秀；B. 良好；C. 及格；D. 不及格. 根据调查统计结果，绘制了如图所示的不完整的统计表.

垃圾分类知识测试成绩统计表

测试等级	百分比	人数
A. 优秀	5%	20
B. 良好		60
C. 及格	45%	m
D. 不及格	n	

请结合统计表，回答下列问题：

(1) 求本次参与调查的学生人数及 m, n 的值；

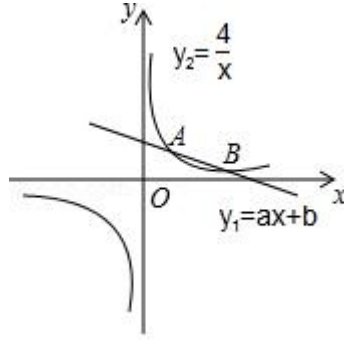
(2) 如果测试结果为“良好”及以上即为对垃圾分类知识比较了解，已知该校学生总数为 5600 人，请根据本次抽样调查的数据估计全校比较了解垃圾分类知识的学生人数；

(3) 为了进一步在学生中普及垃圾分类知识，学校准备再开展一次关于垃圾分类的知识竞赛，要求每班派一人参加. 某班要从在这次测试成绩为优秀的小明和小亮中选一人参加. 班长设计了如下游戏来确定人选，具体规则是：把四个完全相同的乒乓球分别标上数字 1, 2, 3, 4. 然后放到一个不透明的袋中充分摇匀，两人同时从袋中各摸出一个球. 若摸出的两个球上的数字和为奇数，则小明参加，否则小亮参加. 请用树状图或列表法说明这个游戏规则是否公平.

22. (11 分) 如图，一次函数 $y_1 = ax + b$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{4}{x}$ 的图象交于 A、B 两点. 点 A 的横坐标为 2，点 B 的纵坐标为 1.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 在反比例 $y_2 = \frac{4}{x}$ 第三象限的图象上找一点 P，使点 P 到直线 AB 的距离最短，求点 P 的坐标.



23. (12 分) 推进农村土地集约式管理, 提高土地的使用效率是新农村建设的一项重要举措. 某村在小城镇建设中集约了 2400 亩土地, 计划对其进行平整. 经投标, 由甲乙两个工程队来完成平整任务. 甲工程队每天可平整土地 45 亩, 乙工程队每天可平整土地 30 亩. 已知乙工程队每天的工程费比甲工程队少 500 元, 当甲工程队所需工程费为 12000 元, 乙工程队所需工程费为 9000 元时, 两工程队工作天数刚好相同.

(1) 甲乙两个工程队每天各需工程费多少元?

(2) 现由甲乙两个工程队共同参与土地平整, 已知两个工程队工作天数均为正整数, 且所有土地刚好平整完, 总费用不超过 110000 元.

①甲乙两工程队分别工作的天数共有多少种可能?

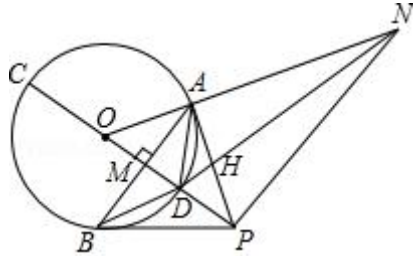
②写出其中费用最少的一种方案, 并求出最低费用.

24. (13 分) 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 AB 与直径 CD 垂直, 垂足为 M , CD 的延长线上有一点 P , 满足 $\angle PBD = \angle DAB$. 过点 P 作 $PN \perp CD$, 交 OA 的延长线于点 N , 连接 DN 交 AP 于点 H .

(1) 求证: BP 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 如果 $OA = 5$, $AM = 4$, 求 PN 的值;

(3) 如果 $PD = PH$, 求证: $AH \cdot OP = HP \cdot AP$.

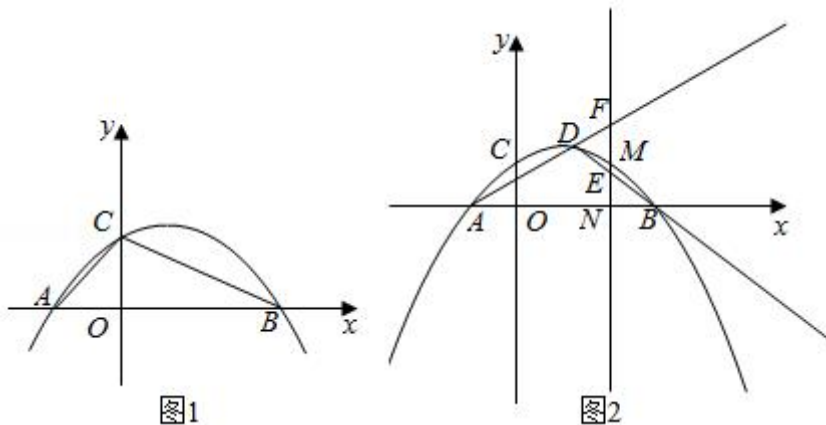


25. (14 分) 如图 1, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 A , B . 与 y 轴交于点 C . 连接 AC , BC . 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 2.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 平行于 x 轴的直线与抛物线从左到右依次交于 P , Q 两点. 过 P , Q 向 x 轴作垂线, 垂足分别为 G , H . 若四边形 $PGHQ$ 为正方形, 求正方形的边长;

(3) 如图 2, 平行于 y 轴的直线交抛物线于点 M , 交 x 轴于点 N ($2, 0$). 点 D 是抛物线上 A , M 之间的一动点, 且点 D 不与 A , M 重合, 连接 DB 交 MN 于点 E . 连接 AD 并延长交 MN 于点 F . 在点 D 运动过程中, $3NE + NF$ 是否为定值? 若是, 求出这个定值; 若不是, 请说明理由.



答案与解析

一、选择题 (本大题共 12 个小题，每小题 4 分，共 48 分。在每小题给出的四个选项中，有且仅有一项是符合题目要求的)

1. $\frac{1}{3}$ 的相反数是 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

【知识点】相反数.

【思路分析】在一个数前面放上“-”，就是该数的相反数.

【解题过程】解： $\frac{1}{3}$ 的相反数为 $-\frac{1}{3}$.

故选：D.

【总结归纳】本题考查了相反数的概念，求一个数的相反数只要改变这个数的符号即可.

2. 下列运算正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $(3a)^3 = 9a^3$ C. $3a - 2a = 1$ D. $(-2a^2)^3 = -8a^6$

【知识点】合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

【思路分析】利用同底数幂的乘法法则、积的乘方运算法则、合并同类项法则、幂的乘方运算法则分别进行计算即可.

【解题过程】解：A、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故原题计算错误；

B、 $(3a)^3 = 27a^3$ ，故原题计算错误；

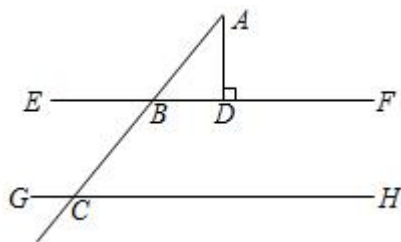
C、 $3a - 2a = a$ ，故原题计算错误；

D、 $(-2a^2)^3 = -8a^6$ ，故原题计算正确；

故选：D.

【总结归纳】此题主要考查了同底数幂的乘法、积的乘方运算、合并同类项、幂的乘方运算，关键是掌握各计算法则.

3. 如图所示，直线 $EF \parallel GH$ ，射线 AC 分别交直线 EF 、 GH 于点 B 和点 C ， $AD \perp EF$ 于点 D ，如果 $\angle A = 20^\circ$ ，则 $\angle ACG =$ ()



- A. 160° B. 110° C. 100° D. 70°

【知识点】垂线；平行线的性质.

【思路分析】利用三角形的内角和定理，由 $AD \perp EF$ ， $\angle A = 20^\circ$ 可得 $\angle ABD = 70^\circ$ ，由平行线的性质定理可得 $\angle ACH$ ，易得 $\angle ACG$.

【解题过程】解： $\because AD \perp EF$ ， $\angle A = 20^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \angle A - \angle ADB = 180^\circ - 20^\circ - 90^\circ = 70^\circ,$$

$$\because EF \parallel GH,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle ABD = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle ACG = 180^\circ - \angle ACH = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ,$$

故选：B.

【总结归纳】本题主要考查了三角形的内角和定理和平行线的性质定理，熟记定理是解答此题的关键.

4. 下列说法错误的是 ()

- A. 方差可以衡量一组数据的波动大小
B. 抽样调查抽取的样本是否具有代表性，直接关系对总体估计的准确程度
C. 一组数据的众数有且只有一个
D. 抛掷一枚图钉针尖朝上的概率，不能用列举法求得

【知识点】抽样调查的可靠性；用样本估计总体；众数；方差；列表法与树状图法.

【思路分析】根据各个选项中的说法，可以判断是否正确，从而可以解答本题.

【解题过程】解：方差可以衡量一组数据的波动大小，故选项 A 正确；

抽样调查抽取的样本是否具有代表性，直接关系对总体估计的准确程度，故选项 B 正确；

一组数据的众数有一个或者几个或者没有，故选项 C 错误；

抛掷一枚图钉针尖朝上的概率，不能用列举法求得，故选项 D 正确；

故选：C.

【总结归纳】本题考查抽样调查、用样本估计总体、众数和方差，解答本题的关键是明确题意，可以判断各个选项中的说法是否正确.

5. 多边形的内角和不可能为 ()

- A. 180° B. 540° C. 1080° D. 1200°

【知识点】多边形内角与外角.

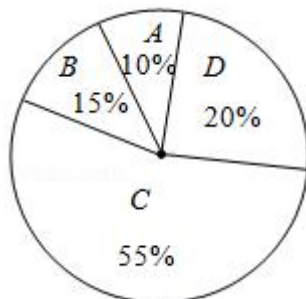
【思路分析】多边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ($n \geq 3$ 且 n 是整数)，所以多边形的内角能被 180° 整除，由此即可求出答案.

【解题过程】解：多边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ($n \geq 3$ 且 n 是整数)， n 应为整数，所以 $n-2$ 也是整数，所以多边形的内角能被 180 整除，因为在这四个选项中不是 180° 的倍数的只有 1200° .

故选：D.

【总结归纳】本题主要考查多边形的内角和定理，牢记定理是解答本题的关键，难度不大.

6. 某商场销售 A, B, C, D 四种商品，它们的单价依次是 50 元，30 元，20 元，10 元. 某天这四种商品销售数量的百分比如图所示，则这天销售的四种商品的平均单价是 ()



- A. 19.5 元 B. 21.5 元 C. 22.5 元 D. 27.5 元

【知识点】扇形统计图；加权平均数.

【思路分析】根据加权平均数定义即可求出这天销售的四种商品的平均单价.

【解题过程】解：这天销售的四种商品的平均单价是：

$$50 \times 10\% + 30 \times 15\% + 20 \times 55\% + 10 \times 20\% = 22.5 \text{ (元)},$$

故选：C.

【总结归纳】本题考查了加权平均数、扇形统计图，解决本题的关键是掌握加权平均数的定义.

7. 半径为 R 的圆内接正三角形、正方形、正六边形的边心距分别为 a, b, c, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $c < b < a$

【知识点】等边三角形的性质；正方形的性质；三角形的外接圆与外心；正多边形和圆.

【思路分析】根据三角函数即可求解.

【解题过程】解：设圆的半径为 R,

$$\text{则正三角形的边心距为 } a = R \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}R.$$

$$\text{四边形的边心距为 } b = R \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}R,$$

$$\text{正六边形的边心距为 } c = R \times \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

$$\therefore \frac{1}{2}R < \frac{\sqrt{2}}{2}R < \frac{\sqrt{3}}{2}R,$$

$$\therefore a < b < c,$$

故选：D.

【总结归纳】此题主要考查了正多边形和圆的性质，解决本题的关键是构造直角三角形，得到用半径表示的边心距；注意：正多边形的计算一般要转化为解直角三角形的问题来解决.

8. 已知函数 $y = \begin{cases} -x+1 & (x < 2) \\ -\frac{2}{x} & (x \geq 2) \end{cases}$ ，当函数值为 3 时，自变量 x 的值为 ()

- A. -2 B. $-\frac{2}{3}$ C. -2 或 $-\frac{2}{3}$ D. -2 或 $-\frac{3}{2}$

【知识点】一次函数的性质；一次函数图象上点的坐标特征；反比例函数的性质.

【思路分析】根据分段函数的解析式分别计算，即可得出结论.

【解题过程】解：若 $x < 2$ ，当 $y = 3$ 时， $-x + 1 = 3$ ，

解得： $x = -2$ ；

若 $x \geq 2$ ，当 $y = 3$ 时， $-\frac{2}{x} = 3$ ，

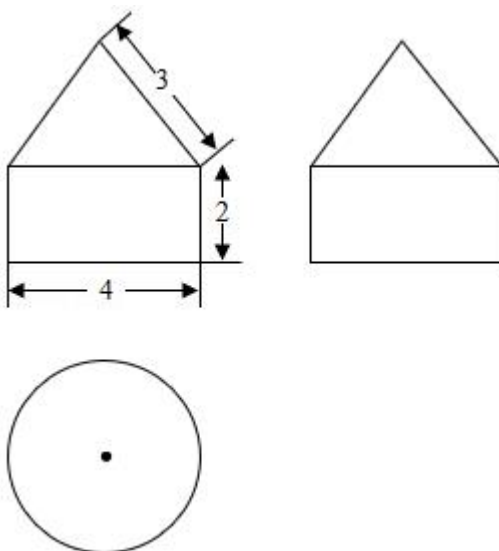
解得： $x = -\frac{2}{3}$ ，不合题意舍去；

$\therefore x = -2$ ，

故选：A.

【总结归纳】本题考查反比例函数的性质、一次函数的图象上点的坐标特征；根据分段函数进行分段求解是解题的关键.

9. 如图是一个几何体的三视图，根据图中所示数据计算这个几何体的表面积是（ ）



- A. 20π B. 18π C. 16π D. 14π

【知识点】几何体的表面积；由三视图判断几何体.

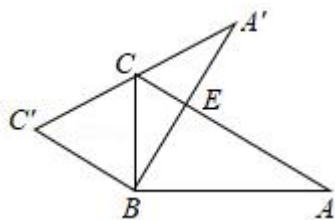
【思路分析】由几何体的三视图可得出原几何体为圆锥和圆柱组合体，根据图中给定数据求出表面积即可.

【解题过程】解：这个几何体的表面积 $= \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 3 \cdot 2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 18\pi$ ，

故选：B.

【总结归纳】本题考查了由三视图判断几何体、圆锥和圆柱的计算以及勾股定理，由几何体的三视图可得出原几何体为圆锥和圆柱组合体是解题的关键.

10. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$. 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针方向旋转得到 $\triangle A'BC'$. 此时恰好点 C 在 $A'C'$ 上， $A'B$ 交 AC 于点 E，则 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为（ ）



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【知识点】三角形的面积；含 30 度角的直角三角形；旋转的性质.

【思路分析】由旋转的性质得出 $BC = BC'$, $\angle ACB = \angle A'C'B = 60^\circ$, 则 $\triangle BCC'$ 是等边三角形, $\angle CBC' = 60^\circ$, 得出 $\angle BEA = 90^\circ$, 设 $CE = a$, 则 $BE = \sqrt{3}a$, $AE = 3a$, 求出 $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{4}$, 可求出答案.

【解题过程】解: $\because \angle A = 30^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACB = 60^\circ$,

$\therefore$ 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针方向旋转得到 $\triangle A'BC'$,

$\therefore BC = BC'$, $\angle ACB = \angle A'C'B = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BCC'$ 是等边三角形,

$\therefore \angle CBC' = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABA' = 60^\circ$,

$\therefore \angle BEA = 90^\circ$,

设 $CE = a$, 则 $BE = \sqrt{3}a$, $AE = 3a$,

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{3}{4},$$

$\therefore \triangle ABE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $\frac{3}{4}$.

故选: D.

【总结归纳】本题考查了旋转的性质, 直角三角形的性质, 等边三角形的判定与性质; 熟练掌握旋转的性质是解题的关键.

11. 已知: 等腰直角三角形 ABC 的腰长为 4, 点 M 在斜边 AB 上, 点 P 为该平面内一动点, 且满足 $PC = 2$, 则 PM 的最小值为 ()

- A. 2 B. $2\sqrt{2} - 2$ C. $2\sqrt{2} + 2$ D. $2\sqrt{2}$

【知识点】等腰直角三角形.

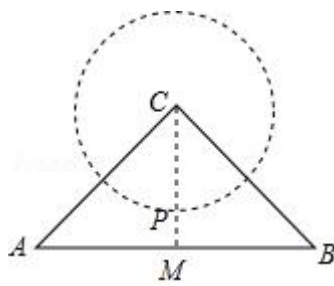
【思路分析】根据等腰直角三角形的性质得到斜边 $AB = 4\sqrt{2}$, 由已知条件得到点 P 在以 C 为圆心, PC 为半径的圆上, 当点 P 在斜边 AB 的中线上时, PM 的值最小, 于是得出结论.

【解题过程】解: $\because$ 等腰直角三角形 ABC 的腰长为 4,

$\therefore$ 斜边 $AB = 4\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 P 为该平面内一动点, 且满足 $PC = 2$,

$\therefore$ 点 P 在以 C 为圆心, PC 为半径的圆上,



当点 P 在斜边 AB 的中线上时, PM 的值最小,

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CM = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore PC = 2,$$

$$\therefore PM = CM - CP = 2\sqrt{2} - 2,$$

故选: B.

【总结归纳】 本题考查了等腰直角三角形, 最短路线问题, 正确的作出图形是解题的关键.

12. 已知不等式 $ax+b>0$ 的解集为 $x<2$, 则下列结论正确的个数是 ()

(1) $2a+b=0$;

(2) 当 $c>a$ 时, 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴没有公共点;

(3) 当 $c>0$ 时, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在直线 $y=ax+b$ 的上方;

(4) 如果 $b<3$ 且 $2a-mb-m=0$, 则 m 的取值范围是 $-\frac{3}{4}<m<0$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【知识考点】 一次函数的性质; 一次函数图象上点的坐标特征; 二次函数的性质; 二次函数图象上点的坐标特征; 抛物线与 x 轴的交点.

【思路分析】 由不等式的解集得出 $a<0$, $-\frac{b}{a}=2$, 即 $b=-2a$, 从而得出 $2a+b=0$, 即可判断 (1); 根

据 $\Delta=4a(a-c)>0$ 即可判断 (2); 求得抛物线的顶点为 $(1, a-c)$ 即可判断 (3); 求得 $0<-\frac{m}{m+1}<$

3, 得出不等式组的解集为 $-\frac{3}{4}<m<0$ 即可判断 (4).

【解题过程】 解: (1) $\because$ 不等式 $ax+b>0$ 的解集为 $x<2$,

$$\therefore a<0, \quad -\frac{b}{a}=2, \quad \text{即 } b=-2a,$$

$\therefore 2a+b=0$, 故结论正确;

(2) 函数 $y=ax^2+bx+c$ 中, 令 $y=0$, 则 $ax^2+bx+c=0$,

$$\therefore \text{即 } b=-2a,$$

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-2a)^2-4ac=4a(a-c),$$

$$\therefore a<0, \quad c>a,$$

$$\therefore \Delta=4a(a-c)>0,$$

$\therefore$ 当 $c>a$ 时, 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个公共点, 故结论错误;

(3) $\because b=-2a$,

$$\therefore -\frac{b}{2a}=1, \quad \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4ac-4a^2}{4a}=c-a,$$

$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $(1, c-a)$,

当 $x=1$ 时, 直线 $y=ax+b=a+b=a-2a=-a>0$

当 $c>0$ 时, $c-a>-a>0$,

∴ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点在直线 $y = ax + b$ 的上方，故结论正确；

(4) ∵ $b = -2a$,

∴ 由 $2a - mb - m = 0$, 得到 $-b - mb - m = 0$,

$$\therefore b = -\frac{m}{m+1},$$

如果 $b < 3$, 则 $0 < -\frac{m}{m+1} < 3$,

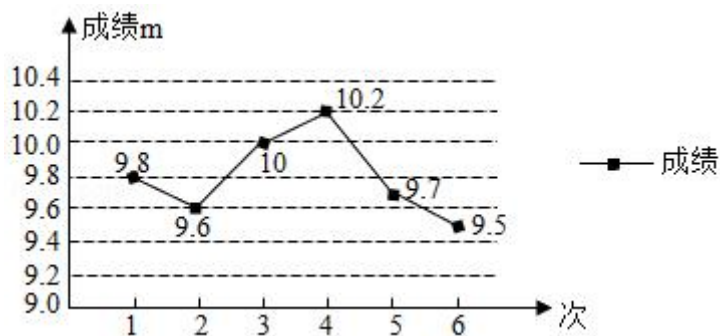
∴ $-\frac{3}{4} < m < 0$, 故结论正确；

故选: C.

【总结归纳】 本题考查了抛物线与 x 轴的交点, 一次函数的性质, 二次函数的性质, 一次函数图象上点的坐标特征, 二次函数图象上点的坐标特征, 有一定难度.

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

13. 小明在体考时选择了投掷实心球, 如图是体育老师记录的小明在训练时投掷实心球的 6 次成绩的折线统计图. 这 6 次成绩的中位数是_____.



【知识考点】 VD: 折线统计图; W4: 中位数.

【思路分析】 根据中位数定义: 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数. 即可得解.

【解题过程】 解: 由 6 次成绩的折线统计图可知:

这 6 次成绩从小到大排列为:

9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 10, 10.2,

所以这 6 次成绩的中位数是: $\frac{9.7+9.8}{2} = 9.75$.

故答案为: 9.75.

【总结归纳】 本题考查了折线统计图、中位数, 解决本题的关键是掌握中位数的定义.

14. 把 $ax^2 - 4a$ 分解因式的结果是_____.

【知识考点】 提公因式法与公式法的综合运用.

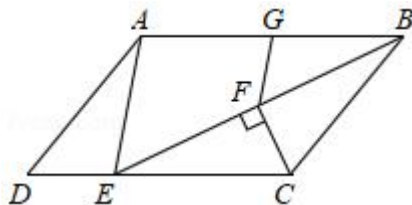
【思路分析】 先提出公因式 a , 再利用平方差公式因式分解.

【解题过程】 解: $ax^2 - 4a = a(x^2 - 4) = a(x+2)(x-2)$.

故答案为: $a(x+2)(x-2)$.

【总结归纳】 本题考查了提公因式法和公式法进行因式分解，解决本题的关键是熟记提公因式法和公式法.

15. 如图，在平行四边形 ABCD 中，BE 平分 $\angle ABC$ ， $CF \perp BE$ ，连接 AE，G 是 AB 的中点，连接 GF，若 $AE = 4$ ，则 $GF =$ _____.



【知识考点】 等腰三角形的判定与性质；三角形中位线定理；平行四边形的性质.

【思路分析】 根据平行四边形的性质结合角平分线的定义可求解 $\angle CBE = \angle BEC$ ，即可得 $CB = CE$ ，利用等腰三角形的性质可怎么 $BF = EF$ ，进而可得 GF 是 $\triangle ABE$ 的中位线，根据三角形的中位线的性质可求解.

【解题过程】 解：在平行四边形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle ABE = \angle BEC.$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle BEC,$$

$$\therefore CB = CE.$$

$$\because CF \perp BE,$$

$$\therefore BF = EF.$$

$$\because G \text{ 是 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore GF \text{ 是 } \triangle ABE \text{ 的中位线},$$

$$\therefore GF = \frac{1}{2}BE,$$

$$\because BE = 4,$$

$$\therefore GF = 2.$$

故答案为 2.

【总结归纳】 本题主要考查平行四边形的性质，等腰三角形的性质与判定，三角形中位线的性质，证明 GF 是 $\triangle ABE$ 的中位线是解题的关键.

16. 将正偶数按照如下规律进行分组排列，依次为 (2)，(4, 6)，(8, 10, 12)，(14, 16, 18, 20) …，我们称“4”是第 2 组第 1 个数字，“16”是第 4 组第 2 个数字，若 2020 是第 m 组第 n 个数字，则 $m+n =$ _____.

【知识考点】 规律型：数字的变化类.

【思路分析】 根据题目中数字的特点，可知每组的个数依次增大，每组中的数字都是连续的偶数，然后即可求出 2020 是多少组第多少个，从而可以得到 m、n 的值，然后即可得到 $m+n$ 的值.

【解题过程】 解： $\because$ 将正偶数按照如下规律进行分组排列，依次为 (2)，(4, 6)，(8, 10, 12)，(14, 16, 18, 20) …，

$\therefore$ 第 m 组有 m 个连续的偶数，

$$\therefore 2020 = 2 \times 1010,$$

$\therefore 2020$ 是第 1010 个偶数,

$$\therefore 1+2+3+\cdots+44 = \frac{44 \times (44+1)}{2} = 990, \quad 1+2+3+\cdots+45 = \frac{45 \times (45+1)}{2} = 1035,$$

$\therefore 2020$ 是第 45 组第 $1010 - 990 = 20$ 个数,

$$\therefore m = 45, \quad n = 20,$$

$$\therefore m+n = 65,$$

故答案为: 65.

【总结归纳】本题考查数字的变化类, 解答本题的关键是明确题意, 发现数字的变化特点, 求出 m 、 n 的值.

17. 若实数 x , y 满足 $x+y^2=3$, 设 $s=x^2+8y^2$, 则 s 的取值范围是_____.

【知识考点】二次函数的最值.

【思路分析】由已知等式表示出 y^2 , 代入 s 中利用二次函数最值即可确定出 s 范围.

【解题过程】解: 由 $x+y^2=3$, 得: $y^2 = -x+3 \geq 0$,

$$\therefore x \leq 3,$$

$$\text{代入得: } s = x^2 + 8y^2 = x^2 + 8(-x+3) = x^2 - 8x + 24 = (x-4)^2 + 8,$$

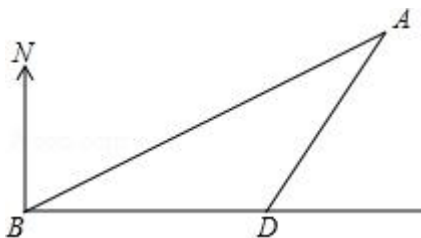
$$\text{当 } x=3 \text{ 时, } s = (3-4)^2 + 8 = 9,$$

$$\therefore s \geq 9;$$

故答案为: $s \geq 9$.

【总结归纳】此题考查了非负数的性质, 用一个未知数表示另一个未知数, 二次函数的最值, 熟练掌握二次函数的性质是关键.

18. 如图, 海中有一小岛 A , 它周围 10.5 海里内有暗礁, 渔船跟踪鱼群由西向东航行. 在 B 点测得小岛 A 在北偏东 60° 方向上, 航行 12 海里到达 D 点, 这时测得小岛 A 在北偏东 30° 方向上. 如果渔船不改变航线继续向东航行, 那么渔船还需航行_____海里就开始有触礁的危险.



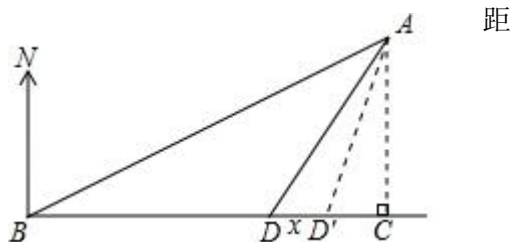
【知识考点】解直角三角形的应用 - 方向角问题.

【思路分析】过 A 作 $AC \perp BD$ 于点 C , 求出 $\angle CAD$ 、 $\angle CAB$ 的度数, 求出 $\angle BAD$ 和 $\angle ABD$, 根据等角对等边得出 $AD = BD = 12$, 根据含 30° 度角的直角三角形性质求出 CD , 根据勾股定理求出 AC 即可.

【解题过程】解: 只要求出 A 到 BD 的最短距离是否在以 A 为圆心, 以 10.5 海里的圆内或圆上即可, 如图, 过 A 作 $AC \perp BD$ 于点 C , 则 AC 的长是 A 到 BD 的最短距离,

$$\therefore \angle CAD = 30^\circ, \quad \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ, \quad \angle ABD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$



$$\therefore \angle ABD = \angle BAD,$$

$$\therefore BD = AD = 12 \text{ 海里},$$

$$\because \angle CAD = 30^\circ, \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AD = 6 \text{ 海里},$$

$$\text{由勾股定理得: } AC = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3} \text{ (海里)},$$

如图, 设渔船还需航行 x 海里就开始有触礁的危险, 即到达点 D' 时有触礁的危险,

$$\text{在直角 } \triangle AD'C \text{ 中, 由勾股定理得: } (6-x)^2 + (6\sqrt{3})^2 = 10.5^2.$$

$$\text{解得 } x = 4.5.$$

渔船还需航行 4.5 海里就开始有触礁的危险.

故答案是: 4.5.

【总结归纳】考查了勾股定理的应用和解直角三角形, 此题是一道方向角问题, 结合航海中的实际问题, 将解直角三角形的相关知识有机结合, 体现了数学应用于实际生活的思想.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 78 分. 答应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

$$19. (7 \text{ 分}) \text{ 计算: } (-2)^{-2} - \sqrt{3} - 2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 - \sqrt[3]{8} - 2\cos 30^\circ.$$

【知识考点】实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂; 特殊角的三角函数值.

【思路分析】首先计算乘方、开方, 然后计算乘法, 最后从左向右依次计算, 求出算式的值是多少即可.

$$\text{【解题过程】解: } (-2)^{-2} - \sqrt{3} - 2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 - \sqrt[3]{8} - 2\cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{4} - 2 + \sqrt{3} + 1 - 2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

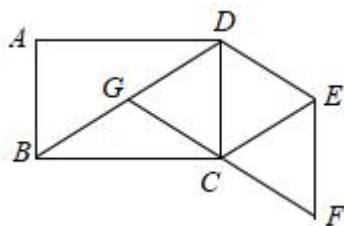
$$= -2\frac{3}{4}.$$

【总结归纳】此题主要考查了实数的运算, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: 在进行实数运算时, 和有理数运算一样, 要从高级到低级, 即先算乘方、开方, 再算乘除, 最后算加减, 有括号的要先算括号里面的, 同级运算要按照从左到右的顺序进行. 另外, 有理数的运算律在实数范围内仍然适用. 正确化简各数是解题关键.

20. (8 分) 如图, 四边形 ABCD 为矩形, G 是对角线 BD 的中点. 连接 GC 并延长至 F, 使 $CF = GC$, 以 DC, CF 为邻边作菱形 DCFE, 连接 CE.

(1) 判断四边形 CEDG 的形状, 并证明你的结论.

(2) 连接 DF, 若 $BC = \sqrt{3}$, 求 DF 的长.



【知识考点】菱形的判定与性质; 矩形的性质.

【思路分析】(1) 证出 $GB = GC = GD = CF$ ，由菱形的性质的 $CD = CF = DE$ ， $DE \parallel CG$ ，则 $DE = GC$ ，证出四边形 $CEDG$ 是平行四边形，进而得出结论；

(2) 过点 G 作 $GH \perp BC$ 于 H ，设 DF 交 CE 于点 N ，由等腰三角形的性质得 $CH = BH = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，证出 $\triangle CDG$ 是等边三角形，得 $\angle GCD = 60^\circ$ ，由三角函数定义求出 $CG = 1$ ，则 $CD = 1$ ，由菱形的性质得 $DN = FN$ ， $CN \perp DF$ ， $\angle DCE = \angle FCE = 60^\circ$ ，由三角函数定义求出 $DN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $DF = 2DN = \sqrt{3}$ 。

【解题过程】解：(1) 四边形 $CEDG$ 是菱形，理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， G 是对角线 BD 的中点，

$\therefore GB = GC = GD$ ，

$\therefore CF = GC$ ，

$\therefore GB = GC = GD = CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $DCFE$ 是菱形，

$\therefore CD = CF = DE$ ， $DE \parallel CG$ ，

$\therefore DE = GC$ ，

$\therefore$ 四边形 $CEDG$ 是平行四边形，

$\therefore GD = GC$ ，

$\therefore$ 四边形 $CEDG$ 是菱形；

(2) 过点 G 作 $GH \perp BC$ 于 H ，设 DF 交 CE 于点 N ，如图所示：

$\therefore CD = CF$ ， $GB = GD = GC = CF$ ，

$\therefore CH = BH = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\triangle CDG$ 是等边三角形，

$\therefore \angle GCD = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DCF = 180^\circ - \angle GCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle GCH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore CG = \frac{CH}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$ ，

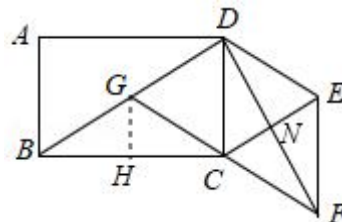
$\therefore CD = 1$ ，

$\therefore$ 四边形 $DCFE$ 是菱形，

$\therefore DN = FN$ ， $CN \perp DF$ ， $\angle DCE = \angle FCE = \frac{1}{2}\angle DCF = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$ ，

在 $Rt\triangle CND$ 中， $DN = CD \cdot \sin \angle DCE = 1 \times \sin 60^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore DF = 2DN = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 。



【总结归纳】本题考查了矩形的性质、菱形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、等边三角形的判

定与性质、等腰三角形的性质以及三角函数等知识；熟练掌握矩形的性质和菱形的性质是解题的关键.

21. (13 分) 为了加强学生的垃圾分类意识, 某校对学生进行了一次系统全面的垃圾分类宣传. 为了解这次宣传的效果, 从全校学生中随机抽取部分学生进行了一次测试, 测试结果共分为四个等级: A. 优秀; B. 良好; C. 及格; D. 不及格. 根据调查统计结果, 绘制了如图所示的不完整的统计表.

垃圾分类知识测试成绩统计表

测试等级	百分比	人数
A. 优秀	5%	20
B. 良好		60
C. 及格	45%	m
D. 不及格	n	

请结合统计表, 回答下列问题:

- (1) 求本次参与调查的学生人数及 m, n 的值;
- (2) 如果测试结果为“良好”及以上即为对垃圾分类知识比较了解, 已知该校学生总数为 5600 人, 请根据本次抽样调查的数据估计全校比较了解垃圾分类知识的学生人数;
- (3) 为了进一步在学生中普及垃圾分类知识, 学校准备再开展一次关于垃圾分类的知识竞赛, 要求每班派一人参加. 某班要从在这次测试成绩为优秀的小明和小亮中选一人参加. 班长设计了如下游戏来确定人选, 具体规则是: 把四个完全相同的乒乓球分别标上数字 1, 2, 3, 4. 然后放到一个不透明的袋中充分摇匀, 两人同时从袋中各摸出一个球. 若摸出的两个球上的数字和为奇数, 则小明参加, 否则小亮参加. 请用树状图或列表法说明这个游戏规则是否公平.

【知识考点】 全面调查与抽样调查; 用样本估计总体; 统计表; 列表法与树状图法; 游戏公平性.

【思路分析】 (1) 由优秀的人数除以所占比例得出本次参与调查的学生人数; 进而求出 m 和 n 的值;

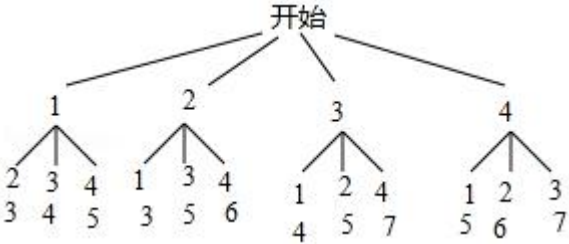
(2) 由总人数乘以良好和优秀所占比例即可;

(3) 先画树状图展示所有 12 种等可能的结果, 找出和为奇数的结果有 8 种, 再计算出小明参加和小亮参加的概率, 比较两概率的大小可判断这个游戏规则是否公平.

【解题过程】 解: (1) 本次参与调查的学生人数为: $20 \div 5\% = 400$ (人), $m = 400 \times 45\% = 180$,
 $\therefore 400 - 20 - 60 - 180 = 140$,
 $\therefore n = 140 \div 400 \times 100\% = 35\%$;

(2) $5600 \times \frac{20+60}{400} = 1120$ (人),
即估计全校比较了解垃圾分类知识的学生人数为 1120 人;

(3) 画树状图为:



共有 12 种等可能的结果，其中和为奇数的结果有 8 种，

$$\therefore P(\text{小明参加}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},$$

$$P(\text{小亮参加}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{2}{3} \neq \frac{1}{3},$$

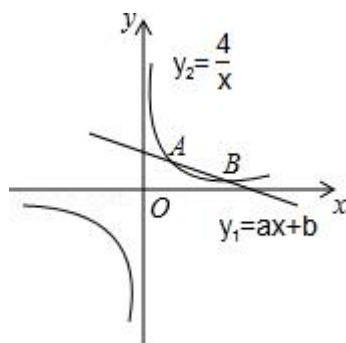
$\therefore$ 这个游戏规则不公平.

【总结归纳】 本题考查了列表法与树状图法、游戏的公平性、统计表、样本估计总体以及概率公式等知识；画出树状图是解题的关键.

22. (11 分) 如图，一次函数 $y_1 = ax + b$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{4}{x}$ 的图象交于 A、B 两点. 点 A 的横坐标为 2，点 B 的纵坐标为 1.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 在反比例 $y_2 = \frac{4}{x}$ 第三象限的图象上找一点 P，使点 P 到直线 AB 的距离最短，求点 P 的坐标.



【知识考点】 反比例函数与一次函数的交点问题.

【思路分析】 (1) 首先确定 A, B 两点坐标，再利用待定系数法求解即可.

(2) 过点 P 作直线 $PM \parallel AB$ ，当直线 PM 与反比例函数只有一个交点时，点 P 到直线 AB 的距离最短，构建方程组把问题转化为一元二次方程，利用判别式 $= 0$ ，构建方程求解即可.

【解题过程】 解：(1) $\because$ 一次函数 $y_1 = ax + b$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{4}{x}$ 的图象交于 A、B 两点. 点 A 的横坐标为 2，点 B 的纵坐标为 1，
 $\therefore A(2, 2), B(4, 1)$,

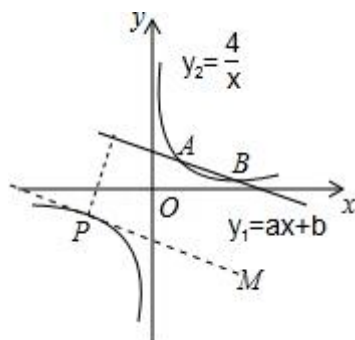
$$\text{则有} \begin{cases} 2a + b = 2 \\ 4a + b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases}.$$

(2) 过点 P 作直线 $PM \parallel AB$,

当直线 PM 与反比例函数只有一个交点时，点 P 到直线 AB

设直线 PM 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + n$,



的距离最短，

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = \frac{1}{2}x + n \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 得到, } x^2 - 2nx + 8 = 0,$$

由题意, $\Delta = 0$,

$$\therefore 4n^2 - 32 = 0,$$

$$\therefore n = -2\sqrt{2} \text{ 或 } 2\sqrt{2} \text{ (舍去)},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases},$$

$$\therefore P(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

【总结归纳】本题考查反比例函数与一次函数的交点问题, 二元一次方程的根的判别式等知识, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

23. (12 分) 推进农村土地集约化管理, 提高土地的使用效率是新农村建设的一项重要举措. 某村在小城镇建设中集约了 2400 亩土地, 计划对其进行平整. 经投标, 由甲乙两个工程队来完成平整任务. 甲工程队每天可平整土地 45 亩, 乙工程队每天可平整土地 30 亩. 已知乙工程队每天的工程费比甲工程队少 500 元, 当甲工程队所需工程费为 12000 元, 乙工程队所需工程费为 9000 元时, 两工程队工作天数刚好相同.

(1) 甲乙两个工程队每天各需工程费多少元?

(2) 现由甲乙两个工程队共同参与土地平整, 已知两个工程队工作天数均为正整数, 且所有土地刚好平整完, 总费用不超过 110000 元.

①甲乙两工程队分别工作的天数共有多少种可能?

②写出其中费用最少的一种方案, 并求出最低费用.

【知识考点】二元一次方程的应用; 分式方程的应用; 一次函数的应用.

【思路分析】(1) 设甲每天需工程费 x 元、乙工程队每天需工程费 $(x - 500)$ 元, 构建方程求解即可.

(2) ①设甲平整 x 天, 则乙平整 y 天. 由题意, $45x + 30y = 2400$ ①, 且 $2000x + 1500y \leq 110000$ ②把问题转化为不等式解决即可.

②总费用 $w = 2000x + 1500(80 - 1.5x) = -250x + 120000$, 利用函数的性质解答即可.

【解题过程】解: (1) 设甲每天需工程费 x 元、乙工程队每天需工程费 $(x - 500)$ 元,

$$\text{由题意, } \frac{12000}{x} = \frac{9000}{x-500},$$

解得 $x = 2000$,

经检验, $x = 2000$ 是分式方程的解.

答: 甲每天需工程费 2000 元、乙工程队每天需工程费 1500 元.

(2) ①设甲平整 x 天, 则乙平整 y 天.

由题意, $45x + 30y = 2400$ ①, 且 $2000x + 1500y \leq 110000$ ②,

由①得到 $y = 80 - 1.5x$ ③,

把③代入②得到, $2000x + 1500(80 - 1.5x) \leq 110000$,

解得, $x \geq 40$,

$$\because y > 0,$$

$$\therefore 80 - 1.5x > 0,$$

$$x < 53.3,$$

$$\therefore 40 \leq x < 53.3,$$

$\because x, y$ 是正整数,

$\therefore x = 40, y = 20$ 或 $x = 42, y = 17$ 或 $x = 44, y = 14$ 或 $x = 46, y = 11$ 或 $x = 48, y = 8$, 或 $x = 50, y = 5$ 或 $x = 52, y = 2$.

$\therefore$ 甲乙两工程队分别工作的天数共有 7 种可能.

$$\textcircled{2} \text{总费用 } w = 2000x + 1500(80 - 1.5x) = -250x + 120000,$$

$$\because -250 < 0,$$

$\therefore w$ 随 x 的增大而减小,

$\therefore x = 52$ 时, w 的最小值 = 107000 (元).

答: 最低费用为 107000 元.

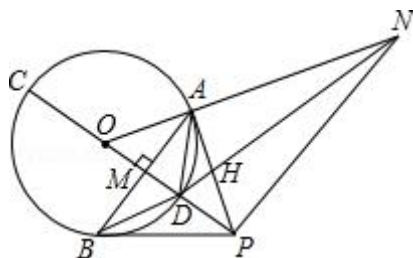
【总结归纳】 本题考查一次函数的应用, 二元一次方程的应用, 分式方程的应用等知识, 解题的关键是理解题意, 学会利用参数构建方程解决问题, 属于中考常考题型.

24. (13 分) 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 AB 与直径 CD 垂直, 垂足为 M , CD 的延长线上有一点 P , 满足 $\angle PBD = \angle DAB$. 过点 P 作 $PN \perp CD$, 交 OA 的延长线于点 N , 连接 DN 交 AP 于点 H .

(1) 求证: BP 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 如果 $OA = 5, AM = 4$, 求 PN 的值;

(3) 如果 $PD = PH$, 求证: $AH \cdot OP = HP \cdot AP$.



【知识点】 圆的综合题.

【思路分析】 (1) 连接 BC, OB , 证明 $OB \perp PB$ 即可.

(2) 解直角三角形求出 OM , 利用相似三角形的性质求出 OP , 再利用平行线分线段成比例定理求出 PN 即可.

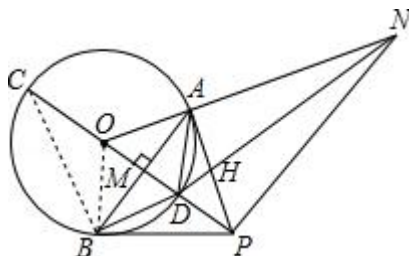
(3) 证明 $\triangle NAH \sim \triangle NPD$, 推出 $\frac{AH}{PD} = \frac{NA}{NP}$, 证明 $\triangle PAN \sim \triangle OAP$, 推出 $\frac{PN}{OP} = \frac{AN}{AP}$, 推出 $\frac{NA}{NP} = \frac{AP}{OP}$ 可得结论.

【解题过程】 (1) 证明: 如图, 连接 BC, OB .

$\because CD$ 是直径,

$$\therefore \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\because OC = OB,$$



$$\therefore \angle C = \angle CBO,$$

$$\because \angle C = \angle BAD, \quad \angle PBD = \angle DAB,$$

$$\therefore \angle CBO = \angle PBD,$$

$$\therefore \angle OBP = \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore PB \perp OB,$$

$\therefore PB$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 解: $\because CD \perp AB,$

$$\therefore PA = PB,$$

$$\because OA = OB, \quad OP = OP,$$

$$\therefore \triangle PAO \cong \triangle PBO \quad (SSS),$$

$$\therefore \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ,$$

$$\because \angle AMO = 90^\circ,$$

$$\therefore OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\because \angle AOM = \angle AOP, \quad \angle OAP = \angle AMO,$$

$$\therefore \triangle AOM \sim \triangle POA,$$

$$\therefore \frac{OA}{OP} = \frac{OM}{OA},$$

$$\therefore \frac{5}{OP} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore OP = \frac{25}{3},$$

$$\because PN \perp PC,$$

$$\therefore \angle NPC = \angle AMO = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{AM}{PN} = \frac{OM}{OP},$$

$$\therefore \frac{4}{PN} = \frac{3}{\frac{25}{3}},$$

$$\therefore PN = \frac{100}{9}.$$

(3) 证明: $\because PD = PH,$

$$\therefore \angle PDH = \angle PHD,$$

$$\because \angle PDH = \angle POA + \angle OND, \quad \angle PHD = \angle APN + \angle PND,$$

$$\therefore \angle POA + \angle APO = 90^\circ, \quad \angle APN + \angle APO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle POA = \angle ANP,$$

$$\therefore \angle ANH = \angle PND,$$

$$\because \angle PDN = \angle PHD = \angle AHN,$$

$$\therefore \triangle NAH \sim \triangle NPD,$$

$$\therefore \frac{AH}{PD} = \frac{NA}{NP},$$

$$\because \angle APN = \angle POA, \angle PAN = \angle PAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PAN \sim \triangle OAP,$$

$$\therefore \frac{PN}{OP} = \frac{AN}{AP},$$

$$\therefore \frac{NA}{NP} = \frac{AP}{OP},$$

$$\therefore \frac{AH}{PD} = \frac{AH}{PH} = \frac{AP}{OP},$$

$$\therefore AH \cdot OP = HP \cdot AP.$$

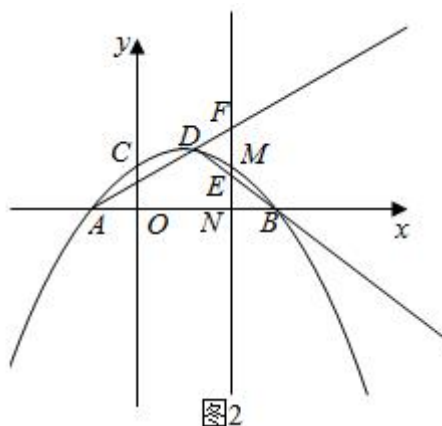
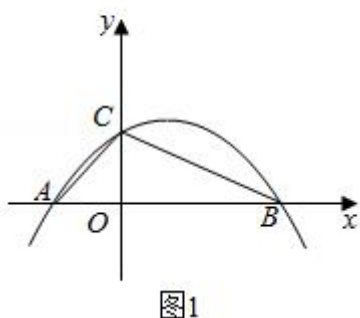
【总结归纳】本题属于圆综合题，考查了垂径定理，圆周角定理，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题，属于中考压轴题.

25. (14分) 如图1, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 A, B . 与 y 轴交于点 C . 连接 AC, BC . 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 2.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 平行于 x 轴的直线与抛物线从左到右依次交于 P, Q 两点. 过 P, Q 向 x 轴作垂线, 垂足分别为 G, H . 若四边形 $PGHQ$ 为正方形, 求正方形的边长;

(3) 如图2, 平行于 y 轴的直线交抛物线于点 M , 交 x 轴于点 N ($2, 0$). 点 D 是抛物线上 A, M 之间的一动点, 且点 D 不与 A, M 重合, 连接 DB 交 MN 于点 E . 连接 AD 并延长交 MN 于点 F . 在点 D 运动过程中, $3NE + NF$ 是否为定值? 若是, 求出这个定值; 若不是, 请说明理由.



【知识考点】二次函数综合题.

【思路分析】(1) 先将抛物线解析式变形, 可得 A 和 B 的坐标, 从而得 $AB = 1 + 3 = 4$, 根据三角形 ABC 的面积为 2 可得 OC 的长, 确定点 C 的坐标, 根据点 C 的坐标, 利用待定系数法即可求出二次函数的解析式;

(2) 设点 P 的纵坐标为 m , 当 $y = m$ 时, $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = m$, 解方程可得 P 和 Q 两点的坐标, 从而得 G 和 H 的坐标, 再利用正方形的性质可得出关于 m 的方程, 解之即可得出结论;

(3) 设点 D ($n, -\frac{1}{3}n^2 + \frac{2}{3}n + 1$), 利用待定系数法求直线 AD 和 BD 的解析式, 表示 FN 和 OK 的长, 直

接代入计算可得结论.

【解题过程】解: (1) 如图 1, $y = ax^2 - 2ax - 3a = a(x^2 - 2x - 3) = a(x - 3)(x + 1)$,

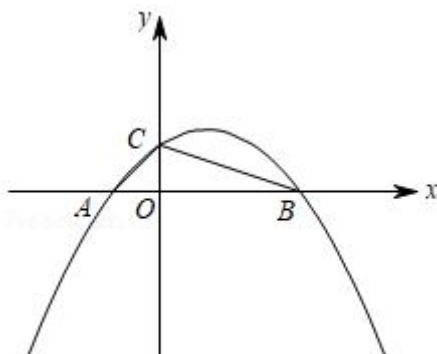


图1

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0),$$

$$\therefore AB = 4,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 的面积为 } 2, \text{ 即 } \frac{1}{2}AB \cdot OC = 2,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times OC = 2,$$

$$\therefore OC = 1,$$

$$\therefore C(0, 1),$$

将 $C(0, 1)$ 代入 $y = ax^2 - 2ax - 3a$, 得: $-3a = 1$,

$$\therefore a = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{该二次函数的解析式为 } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1;$$

$$(2) \text{ 如图 2, 设点 P 的纵坐标为 } m, \text{ 当 } y = m \text{ 时, } -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = m,$$

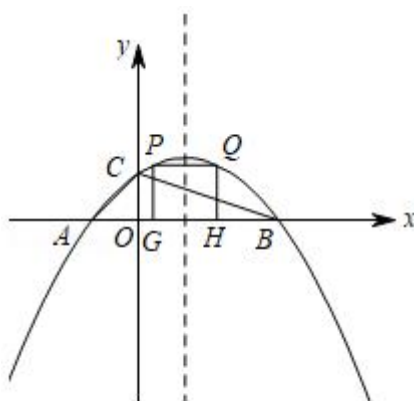


图2

$$\text{解得: } x_1 = 1 + \sqrt{4 - 3m}, x_2 = 1 - \sqrt{4 - 3m},$$

$$\therefore \text{点 P 的坐标为 } (1 - \sqrt{4 - 3m}, m), \text{ 点 Q 的坐标为 } (1 + \sqrt{4 - 3m}, m),$$

$$\therefore \text{点 G 的坐标为 } (1 - \sqrt{4 - 3m}, 0), \text{ 点 H 的坐标为 } (1 + \sqrt{4 - 3m}, 0),$$

$\therefore$ 矩形 PGHQ 为正方形,

$$\therefore 1 + \sqrt{4-3m} - (1 - \sqrt{4-3m}) = m,$$

$$\text{解得: } m_1 = -6 - 2\sqrt{13}, m_2 = -6 + 2\sqrt{13},$$

$\therefore$ 当四边形 PGHQ 为正方形时, 边长为 $6+2\sqrt{13}$ 或 $2\sqrt{13}-6$;

(3) 如图 3, 设点 D $(n, -\frac{1}{3}n^2 + \frac{2}{3}n + 1)$, 延长 BD 交 y 轴于 K,

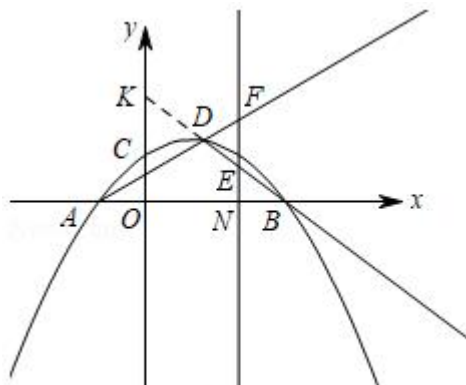


图3

$$\therefore A(-1, 0),$$

设 AD 的解析式为: $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} -k + b = 0 \\ nk + b = -\frac{1}{3}n^2 + \frac{2}{3}n + 1 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{3}n + 1 \\ b = -\frac{1}{3}n + 1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{AD 的解析式为: } y = (-\frac{1}{3}n + 1)x - \frac{1}{3}n + 1,$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = -\frac{2}{3}n + 2 - \frac{1}{3}n + 1 = -n + 3,$$

$$\therefore F(2, 3 - n),$$

$$\therefore FN = 3 - n,$$

$$\text{同理得直线 BD 的解析式为: } y = (-\frac{1}{3}n - \frac{1}{3})x + n + 1,$$

$$\therefore K(0, n + 1),$$

$$\therefore OK = n + 1,$$

$$\therefore N(2, 0), B(3, 0),$$

$$\therefore \frac{BN}{OB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EN \parallel OK,$$

$$\therefore \frac{EN}{OK} = \frac{BN}{OB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore OK = 3EN,$$

$$\therefore 3EN + FN = OK + FN = n + 1 + 3 - n = 4,$$

$\therefore$ 在点 D 运动过程中, $3NE + NF$ 为定值 4.

【总结归纳】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式、二次函数图象上点的坐标特征、正方形的性质、待定系数法求一次函数解析式以及平行线分线段成比例定理等知识，解题的关键是：（1）根据点的坐标，利用待定系数法求出二次函数解析式；（2）利用正方形的性质，找出关于 m 的方程；（3）利用 AD 和 BD 的解析式确定 FN 和 OK 的长，可解决问题.