

2019 年四川省雅安市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分．不需写出解答过程，请把最后结果填在题后括号内．

1. (3 分) -2019 的倒数是 ()

A. -2019

B. 2019

C. $-\frac{1}{2019}$

D. $\frac{1}{2019}$

2. (3 分) 3^2 的结果等于 ()

A. 9

B. -9

C. 5

D. 6

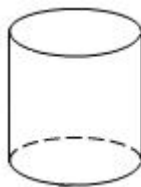
3. (3 分) 如图是下面哪个图形的俯视图 ()



A.



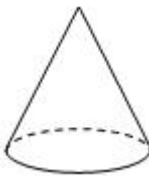
B.



C.



D.



4. (3 分) 不等式组 $\begin{cases} x-2 > 4 \\ \frac{x}{2} \leq 4 \end{cases}$ 的解集为 ()

A. $6 \leq x < 8$

B. $6 < x \leq 8$

C. $2 \leq x < 4$

D. $2 < x \leq 8$

5. (3 分) 已知一组数据 5, 4, x , 3, 9 的平均数为 5, 则这组数据的中位数是 ()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

6. (3 分) 下列计算中, 正确的是 ()

A. $a^4 + a^4 = a^8$

B. $a^4 \cdot a^4 = 2a^4$

C. $(a^3)^4 \cdot a^2 = a^{14}$

D. $(2x^2y)^3 \div 6x^3y^2 = x^3y$

7. (3 分) 若 $a:b=3:4$, 且 $a+b=14$, 则 $2a-b$ 的值是 ()

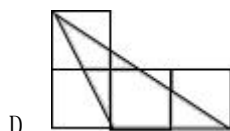
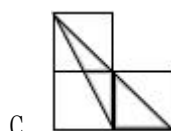
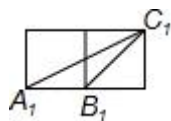
A. 4

B. 2

C. 20

D. 14

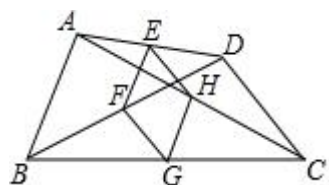
8. (3分) 如图, 每个小正方形的边长均为 1, 则下列图形中的三角形 (阴影部分) 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似的是 ()



9. (3分) 在平面直角坐标系中, 对于二次函数 $y = (x - 2)^2 + 1$, 下列说法中错误的是 ()

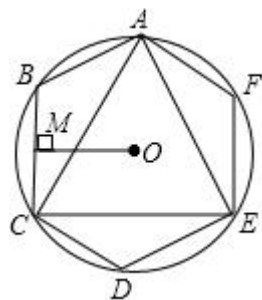
- A. y 的最小值为 1
 B. 图象顶点坐标为 $(2, 1)$, 对称轴为直线 $x = 2$
 C. 当 $x < 2$ 时, y 的值随 x 值的增大而增大, 当 $x \geq 2$ 时, y 的值随 x 值的增大而减小
 D. 它的图象可以由 $y = x^2$ 的图象向右平移 2 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度得到

10. (3分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, AC 、 BD 是对角线, E 、 F 、 G 、 H 分别是 AD 、 BD 、 BC 、 AC 的中点, 连接 EF 、 FG 、 GH 、 HE , 则四边形 $EFGH$ 的形状是 ()



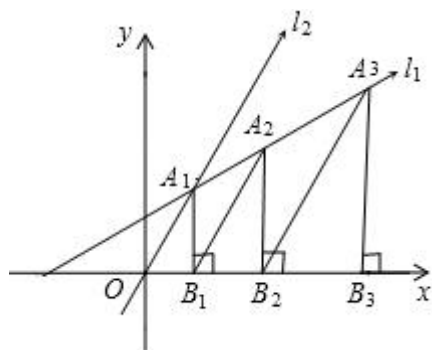
- A. 平行四边形 B. 矩形 C. 菱形 D. 正方形

11. (3分) 如图, 已知 $\odot O$ 的内接六边形 $ABCDEF$ 的边心距 $OM = 2$, 则该圆的内接正三角形 ACE 的面积为 ()



- A. 2 B. 4 C. $6\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

12. (3分) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $l_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 与直线 $l_2: y = \sqrt{3}x$ 交于点 A_1 , 过 A_1 作 x 轴的垂线, 垂足为 B_1 , 过 B_1 作 l_2 的平行线交 l_1 于 A_2 , 过 A_2 作 x 轴的垂线, 垂足为 B_2 , 过 B_2 作 l_2 的平行线交 l_1 于 A_3 , 过 A_3 作 x 轴的垂线, 垂足为 B_3 ... 按此规律, 则点 A_n 的纵坐标为 ()



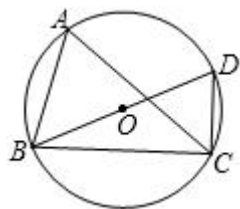
- A. $(\frac{3}{2})^n$ B. $(\frac{1}{2})^{n+1}$ C. $(\frac{3}{2})^{n-1} + \frac{1}{2}$ D. $\frac{3^n - 1}{2}$

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分. 不需写出解答过程, 请把最后结果填在题中横线上.

13. (3分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 4$, 则 $\sin A =$ _____.

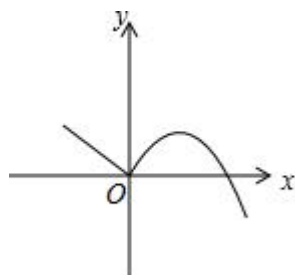
14. (3分) 化简 $x^2 - (x+2)(x-2)$ 的结果是 _____.

15. (3分) 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, BD 是 $\odot O$ 的直径, $\angle CBD = 21^\circ$, 则 $\angle A$ 的度数为 _____.



16. (3分) 在两个暗盒中, 各自装有编号为 1, 2, 3 的三个球, 球除编号外无其它区别, 则在两个暗盒中各取一个球, 两球上的编号的积为偶数的概率为 _____.

17. (3分) 已知函数 $y = \begin{cases} -x^2 + 2x & (x > 0) \\ x & (x \leq 0) \end{cases}$ 的图象如图所示, 若直线 $y = x + m$ 与该图象恰有三个不同的交点, 则 m 的取值范围为 _____.

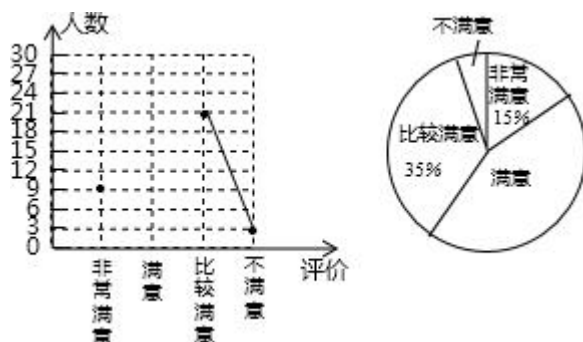


三、解答题（本大题共 7 小题，满分 69 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

18.（10 分）（1）计算： $|-2| + \sqrt{9} - 2019^0 - 2\sin 30^\circ$

（2）先化简，再求值： $(\frac{a^2-2a}{a^2-4a+4} - \frac{3}{a-2}) \div \frac{a^2-9}{a-2}$ ，其中 $a=1$ 。

19.（9 分）某校为了了解本校学生对课后服务情况的评价，随机抽取了部分学生进行调查，根据调查结果制成了如下不完整的统计图。



根据统计图：

- （1）求该校被调查的学生总数及评价为“满意”的人数；
- （2）补全折线统计图；
- （3）根据调查结果，若要在全校学生中随机抽 1 名学生，估计该学生的评价为“非常满意”或“满意”的概率是多少？

20.（9 分）某超市计划购进甲、乙两种商品，两种商品的进价、售价如下表：

商品	甲	乙
进价（元/件）	$x+60$	x
售价（元/件）	200	100

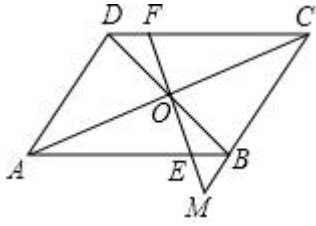
若用 360 元购进甲种商品的件数与用 180 元购进乙种商品的件数相同。

- （1）求甲、乙两种商品的进价是多少元？
- （2）若超市销售甲、乙两种商品共 50 件，其中销售甲种商品为 a 件（ $a \geq 30$ ），设销售完 50 件甲、乙两种商品的总利润为 w 元，求 w 与 a 之间的函数关系式，并求出 w 的最小值。

21.（10 分）如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， EF 经过 O ，分别交 AB 、 CD 于点 E 、 F ， EF 的延长线交 CB 的延长线于 M 。

- （1）求证： $OE = OF$ ；

(2) 若 $AD=4$, $AB=6$, $BM=1$, 求 BE 的长.

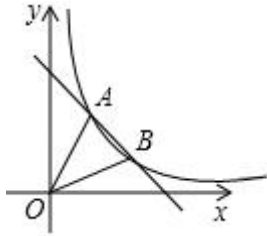


22. (9 分) 如图, 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y = -x + m$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象交于 A 、 B 两点, 已知 $A(2, 4)$

(1) 求一次函数和反比例函数的解析式;

(2) 求 B 点的坐标;

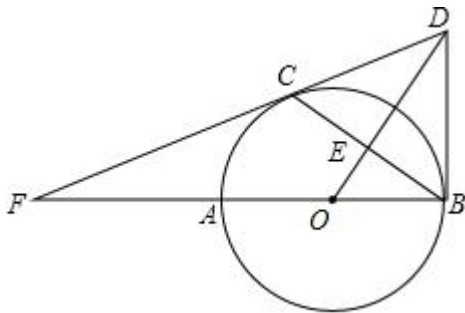
(3) 连接 AO 、 BO , 求 $\triangle AOB$ 的面积.



23. (10 分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, AC , BC 是 $\odot O$ 的弦, $OE \parallel AC$ 交 BC 于 E , 过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 OE 的延长线于点 D , 连接 DC 并延长交 BA 的延长线于点 F .

(1) 求证: DC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\angle ABC = 30^\circ$, $AB = 8$, 求线段 CF 的长.



24. (12 分) 已知二次函数 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象过点 $(2, -1)$, 点 P (P 与 O 不重合) 是图象上的一点, 直线 l 过点 $(0, 1)$ 且平行于 x 轴. $PM \perp l$ 于点 M , 点 $F(0, -1)$.

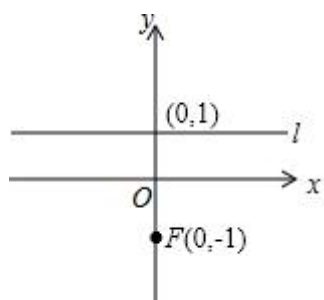
(1) 求二次函数的解析式;

(2) 求证: 点 P 在线段 MF 的中垂线上;

(3) 设直线 PF 交二次函数的图象于另一点 Q , $QN \perp l$ 于点 N , 线段 MF 的中垂线交 l 于点

R , 求 $\frac{MR}{RN}$ 的值;

(4) 试判断点 R 与以线段 PQ 为直径的圆的位置关系.



2019 年四川省雅安市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分．不需写出解答过程，请把最后结果填在题后括号内．

1. (3 分) -2019 的倒数是 ()

- A. -2019 B. 2019 C. $-\frac{1}{2019}$ D. $\frac{1}{2019}$

【分析】直接利用倒数的定义得出答案．

【解答】解： -2019 的倒数是： $-\frac{1}{2019}$ ．

故选：C．

【点评】此题主要考查了倒数，正确把握倒数的定义是解题关键．

2. (3 分) 3^2 的结果等于 ()

- A. 9 B. -9 C. 5 D. 6

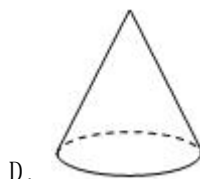
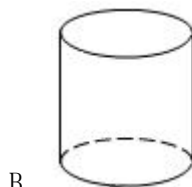
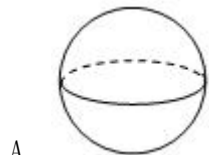
【分析】根据乘方的意义可得： $3^2 = 3 \times 3 = 9$ ；

【解答】解： $3^2 = 3 \times 3 = 9$ ；

故选：A．

【点评】本题考查有理数的乘方；熟练掌握乘方的运算法则是解题的关键．

3. (3 分) 如图是下面哪个图形的俯视图 ()



【分析】根据各选项的俯视图进行判断即可．

【解答】解：A. 球的俯视图为一个圆（不含圆心），不合题意；

B. 圆柱的俯视图为一个圆（不含圆心），不合题意；

C. 圆台的俯视图为两个同心圆，不合题意；

D. 圆锥的俯视图为一个圆（含圆心），符合题意；

故选：D.

【点评】本题主要考查了简单几何体的三视图，俯视图是从上往下看得到的平面图形.

4. (3分) 不等式组 $\begin{cases} x-2 > 4 \\ \frac{x}{2} \leq 4 \end{cases}$ 的解集为 ()

A. $6 \leq x < 8$

B. $6 < x \leq 8$

C. $2 \leq x < 4$

D. $2 < x \leq 8$

【分析】分别解出两不等式的解集，再求其公共解.

【解答】解： $\begin{cases} x-2 > 4 \text{ ①} \\ \frac{x}{2} \leq 4 \text{ ②} \end{cases}$

由①得 $x > 6$,

由②得 $x \leq 8$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $6 < x \leq 8$,

故选：B.

【点评】本题考查了解一元一次方程组，求不等式组的解集应遵循以下原则：同大取较大，同小取较小，小大大小中间找，大大小小解不了.

5. (3分) 已知一组数据 5, 4, x , 3, 9 的平均数为 5, 则这组数据的中位数是 ()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【分析】先根据平均数的定义求出 x 的值，再把这组数据从小到大排列，然后求出最中间两个数的平均数即可.

【解答】解： $\because$ 5, 4, x , 3, 9 的平均数为 5,

$$\therefore (5+4+x+3+9) \div 5 = 5,$$

解得： $x = 4$,

把这组数据从小到大排列为：3, 4, 4, 5, 9,

则这组数据的中位数是 4;

故选：B.

【点评】此题考查了平均数与中位数，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数，关键是

求出 x 的值.

6. (3分) 下列计算中, 正确的是 ()

A. $a^4 + a^4 = a^8$

B. $a^4 \cdot a^4 = 2a^4$

C. $(a^3)^4 \cdot a^2 = a^{14}$

D. $(2x^2y)^3 \div 6x^3y^2 = x^3y$

【分析】直接利用合并同类项法则以及同底数幂的乘除运算法则、积的乘方运算法则分别化简得出答案.

【解答】解: A、 $a^4 + a^4 = 2a^4$, 故此选项错误;

B、 $a^4 \cdot a^4 = a^8$, 故此选项错误;

C、 $(a^3)^4 \cdot a^2 = a^{14}$, 正确;

D、 $(2x^2y)^3 \div 6x^3y^2 = 8x^6y^3 \div 6x^3y^2 = \frac{4}{3}x^3y$, 故此选项错误;

故选: C.

【点评】此题主要考查了整式的混合运算, 正确掌握相关运算法则是解题关键.

7. (3分) 若 $a:b=3:4$, 且 $a+b=14$, 则 $2a-b$ 的值是 ()

A. 4

B. 2

C. 20

D. 14

【分析】根据比例的性质得到 $3b=4a$, 结合 $a+b=14$ 求得 a 、 b 的值, 代入求值即可.

【解答】解: 由 $a:b=3:4$ 知 $3b=4a$,

所以 $b = \frac{4a}{3}$.

所以由 $a+b=14$ 得到: $a + \frac{4a}{3} = 14$,

解得 $a=6$.

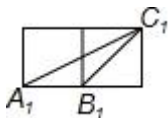
所以 $b=8$.

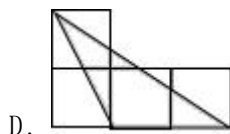
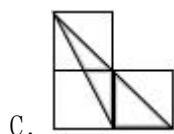
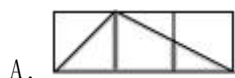
所以 $2a-b=2 \times 6 - 8 = 4$.

故选: A.

【点评】考查了比例的性质, 内项之积等于外项之积. 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $ad=bc$.

8. (3分) 如图, 每个小正方形的边长均为 1, 则下列图形中的三角形 (阴影部分) 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似的是 ()





【分析】根据相似三角形的判定方法一一判断即可．

【解答】解：因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 中有一个角是 135° ，选项中，有 135° 角的三角形只有B，且满足两边成比例夹角相等，

故选：B．

【点评】本题考查相似三角形的性质，解题的关键是学会利用数形结合的思想解决问题，属于中考常考题型．

9. (3分) 在平面直角坐标系中，对于二次函数 $y = (x - 2)^2 + 1$ ，下列说法中错误的是()

A. y 的最小值为1

B. 图象顶点坐标为(2, 1)，对称轴为直线 $x = 2$

C. 当 $x < 2$ 时， y 的值随 x 值的增大而增大，当 $x \geq 2$ 时， y 的值随 x 值的增大而减小

D. 它的图象可以由 $y = x^2$ 的图象向右平移2个单位长度，再向上平移1个单位长度得到

【分析】根据题目中的函数解析式，可以判断各个选项中的说法是否正确．

【解答】解：二次函数 $y = (x - 2)^2 + 1$ ， $a = 1 > 0$ ，

$\therefore$ 该函数的图象开口向上，对称轴为直线 $x = 2$ ，顶点为(2, 1)，当 $x = 2$ 时， y 有最小值1，当 $x > 2$ 时， y 的值随 x 值的增大而增大，当 $x < 2$ 时， y 的值随 x 值的增大而减小；

故选项A、B的说法正确，C的说法错误；

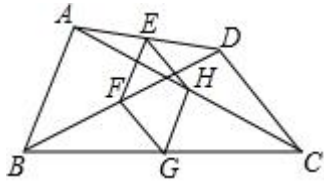
根据平移的规律， $y = x^2$ 的图象向右平移2个单位长度得到 $y = (x - 2)^2$ ，再向上平移1个单位长度得到 $y = (x - 2)^2 + 1$ ；

故选项D的说法正确，

故选：C．

【点评】本题考查二次函数的性质、二次函数的最值，二次函数图象与几何变换，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质解答．

10. (3分) 如图，在四边形ABCD中， $AB = CD$ ，AC、BD是对角线，E、F、G、H分别是AD、BD、BC、AC的中点，连接EF、FG、GH、HE，则四边形EFGH的形状是()



- A. 平行四边形 B. 矩形 C. 菱形 D. 正方形

【分析】根据三角形的中位线定理可得， EH 平行且等于 CD 的一半， FG 平行且等于 CD 的一半，根据等量代换和平行于同一条直线的两直线平行，得到 EH 和 FG 平行且相等，所以 $EFGH$ 为平行四边形，又因为 EF 等于 AB 的一半且 $AB = CD$ ，所以得到所证四边形的邻边 EH 与 EF 相等，所以四边形 $EFGH$ 为菱形。

【解答】解：∵ E 、 F 、 G 、 H 分别是 AD 、 BD 、 BC 、 AC 的中点，

∴ 在 $\triangle ADC$ 中， EH 为 $\triangle ADC$ 的中位线，所以 $EH \parallel CD$ 且 $EH = \frac{1}{2}CD$ ；同理 $FG \parallel CD$ 且 $FG = \frac{1}{2}CD$ ，

同理可得 $EF = \frac{1}{2}AB$ ，

则 $EH \parallel FG$ 且 $EH = FG$ ，

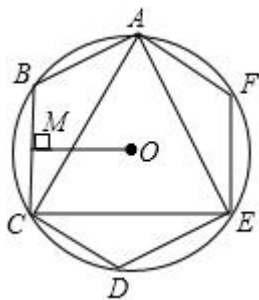
∴ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形，又 $AB = CD$ ，所以 $EF = EH$ ，

∴ 四边形 $EFGH$ 为菱形。

故选：C。

【点评】此题考查学生灵活运用三角形的中位线定理，平行四边形的判断及菱形的判断进行证明，是一道综合题。

11. (3分) 如图，已知 $\odot O$ 的内接六边形 $ABCDEF$ 的边心距 $OM = 2$ ，则该圆的内接正三角形 ACE 的面积为 ()



- A. 2 B. 4 C. $6\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

【分析】连接 OC 、 OB ，过 O 作 $ON \perp CE$ 于 N ，证出 $\triangle COB$ 是等边三角形，根据锐角三角函数的定义求解即可。

【解答】解：如图所示，连接 OC 、 OB ，过 O 作 $ON \perp CE$ 于 N ，

$\because$ 多边形 $ABCDEF$ 是正六边形,

$$\therefore \angle COB = 60^\circ,$$

$$\because OC = OB,$$

$\therefore \triangle COB$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle OCM = 60^\circ,$$

$$\therefore OM = OC \cdot \sin \angle OCM,$$

$$\therefore OC = \frac{OM}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}.$$

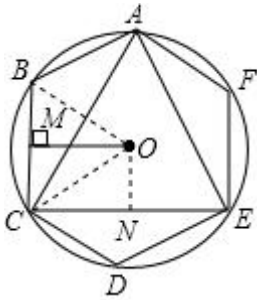
$$\because \angle OCN = 30^\circ,$$

$$\therefore ON = \frac{1}{2}OC = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad CN = 2,$$

$$\therefore CE = 2CN = 4,$$

$$\therefore \text{该圆的内接正三角形 } ACE \text{ 的面积} = 3 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

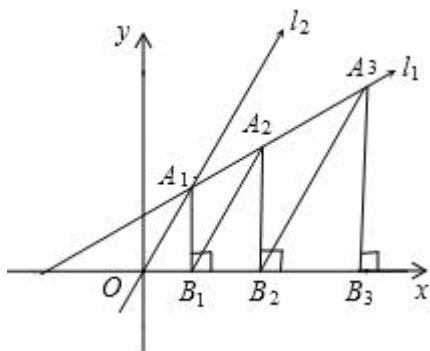
故选: D .



【点评】本题考查的是正六边形的性质、等边三角形的判定与性质、三角函数; 熟练掌握正六边形的性质, 由三角函数求出 OC 是解决问题的关键.

12. (3 分) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $l_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 与直线 $l_2: y = \sqrt{3}x$ 交于点

A_1 , 过 A_1 作 x 轴的垂线, 垂足为 B_1 , 过 B_1 作 l_2 的平行线交 l_1 于 A_2 , 过 A_2 作 x 轴的垂线, 垂足为 B_2 , 过 B_2 作 l_2 的平行线交 l_1 于 A_3 , 过 A_3 作 x 轴的垂线, 垂足为 B_3 ... 按此规律, 则点 A_n 的纵坐标为 ()



- A. $(\frac{3}{2})^n$ B. $(\frac{1}{2})^{n+1}$ C. $(\frac{3}{2})^{n-1} + \frac{1}{2}$ D. $\frac{3^n - 1}{2}$

【分析】联立直线 l_1 与直线 l_2 的表达式并解得： $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, 故 $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$, 依次求出：点 A_2 的纵坐标为 $\frac{9}{4}$ 、 A_3 的纵坐标为 $\frac{27}{8}$, 即可求解.

【解答】解：联立直线 l_1 与直线 l_2 的表达式并解得： $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, 故 $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$;
则点 $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, 则直线 B_1A_2 的表达式为： $y = \sqrt{3}x + b$,

将点 B_1 坐标代入上式并解得：直线 B_1A_2 的表达式为： $y_3 = \sqrt{3}x - \frac{3}{2}$,

将表达式 y_3 与直线 l_1 的表达式联立并解得： $x = \frac{5\sqrt{3}}{4}$, $y = \frac{9}{4}$, 即点 A_2 的纵坐标为 $\frac{9}{4}$;

同理可得 A_3 的纵坐标为 $\frac{27}{8}$,

…按此规律, 则点 A_n 的纵坐标为 $(\frac{3}{2})^n$,

故选：A.

【点评】本题考查了两直线的交点, 要求利用图象求解各问题, 要认真体会点的坐标, 一次函数与一元一次方程组之间的内在联系.

二、填空题：本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分. 不需写出解答过程, 请把最后结果填在题中横线上.

13. (3 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 4$, 则 $\sin A = \frac{4}{5}$.

【分析】根据正弦的定义解答.

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$,

故答案为： $\frac{4}{5}$.

【点评】本题考查的是锐角三角函数的定义, 锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦, 记作 $\sin A$.

14. (3分) 化简 $x^2 - (x+2)(x-2)$ 的结果是 4.

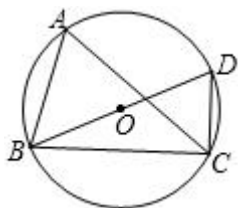
【分析】先根据平方差公式化简，再合并同类项即可.

【解答】解: $x^2 - (x+2)(x-2) = x^2 - x^2 + 4 = 4$.

故答案为: 4.

【点评】本题主要考查了平方差公式，熟记公式是解答本题的关键.

15. (3分) 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， BD 是 $\odot O$ 的直径， $\angle CBD = 21^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数为 69 $^\circ$.



【分析】直接利用圆周角定理得出 $\angle BCD = 90^\circ$ ，进而得出答案.

【解答】解: $\because \triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， BD 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\because \angle CBD = 21^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ - 21^\circ = 69^\circ.$$

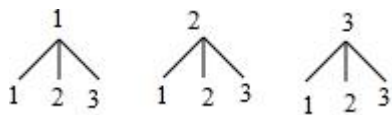
故答案为: 69°

【点评】此题主要考查了三角形的外接圆与外心，正确掌握圆周角定理是解题关键.

16. (3分) 在两个暗盒中，各自装有编号为 1, 2, 3 的三个球，球除编号外无其它区别，则在两个暗盒中各取一个球，两球上的编号的积为偶数的概率为 $\frac{5}{9}$.

【分析】画树状图展示所有 9 种等可能的结果数，找出两球上的编号的积为偶数的结果数，然后根据概率公式求解.

【解答】解: 画树状图为:



共有 9 种等可能的结果数，其中两球上的编号的积为偶数的结果数为 5，

所以两球上的编号的积为偶数的概率 $= \frac{5}{9}$.

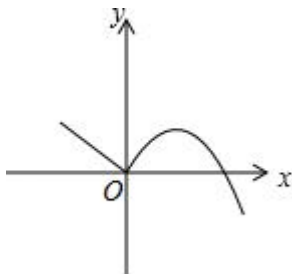
故答案为 $\frac{5}{9}$.

【点评】本题考查了列表法与树状图法: 利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ,

再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率.

17. (3 分) 已知函数 $y = \begin{cases} -x^2 + 2x & (x > 0) \\ x & (x \leq 0) \end{cases}$ 的图象如图所示, 若直线 $y = x + m$ 与该图象恰有

三个不同的交点, 则 m 的取值范围为 $0 < m < \frac{1}{4}$.



【分析】直线与 $y = x$ 有一个交点, 与 $y = -x^2 + 2x$ 有两个交点, 则有 $m > 0$, $x + m = -x^2 + 2x$ 时, $\Delta = 1 - 4m > 0$, 即可求解.

【解答】解: 直线 $y = x + m$ 与该图象恰有三个不同的交点,

则直线与 $y = x$ 有一个交点,

$$\therefore m > 0,$$

$\therefore$ 与 $y = -x^2 + 2x$ 有两个交点,

$$\therefore x + m = -x^2 + 2x,$$

$$\Delta = 1 - 4m > 0,$$

$$\therefore m < \frac{1}{4},$$

$$\therefore 0 < m < \frac{1}{4};$$

故答案为 $0 < m < \frac{1}{4}$.

【点评】本题考查二次函数与一次函数的图象及性质; 能够根据条件, 数形结合的进行分析, 可以确定 m 的范围.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 满分 69 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (10 分) (1) 计算: $|-2| + \sqrt{9} - 2019^0 - 2\sin 30^\circ$

(2) 先化简, 再求值: $(\frac{a^2 - 2a}{a^2 - 4a + 4} - \frac{3}{a - 2}) \div \frac{a^2 - 9}{a - 2}$, 其中 $a = 1$.

【分析】(1) 根据绝对值、零指数幂和特殊角的三角函数值可以解答本题;

(2) 根据分式的减法和除法可以化简题目中的式子, 然后将 a 的值代入化简后的式子即可解答本题.

【解答】解：(1) $|-2| + \sqrt{9} - 2019^0 - 2\sin 30^\circ$

$$= 2 + 3 - 1 - 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2 + 3 - 1 - 1$$

$$= 3;$$

$$(2) \left(\frac{a^2 - 2a}{a^2 - 4a + 4} - \frac{3}{a-2} \right) \div \frac{a^2 - 9}{a-2}$$

$$= \left[\frac{a(a-2)}{(a-2)^2} - \frac{3}{a-2} \right] \cdot \frac{a-2}{(a+3)(a-3)}$$

$$= \left(\frac{a}{a-2} - \frac{3}{a-2} \right) \cdot \frac{a-2}{(a+3)(a-3)}$$

$$= \frac{a-3}{a-2} \cdot \frac{a-2}{(a+3)(a-3)}$$

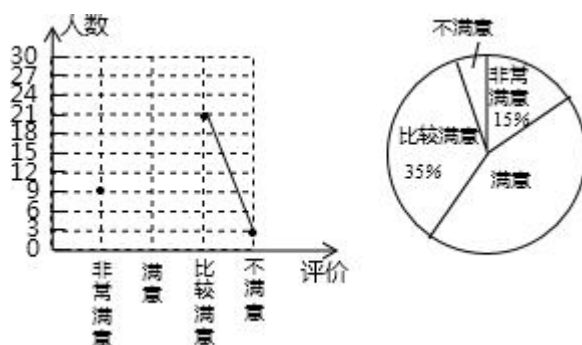
$$= \frac{1}{a+3},$$

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}.$$

【点评】本题考查分式的化简求值、零指数幂、特殊角的三角函数值，解答本题的关键是明确它们各自的计算方法．

19. (9分) 某校为了解本校学生对课后服务情况的评价，随机抽取了部分学生进行调查，

根据调查结果制成了如下不完整的统计图．



根据统计图：

(1) 求该校被调查的学生总数及评价为“满意”的人数；

(2) 补全折线统计图；

(3) 根据调查结果，若要在全校学生中随机抽1名学生，估计该学生的评价为“非常满意”或“满意”的概率是多少？

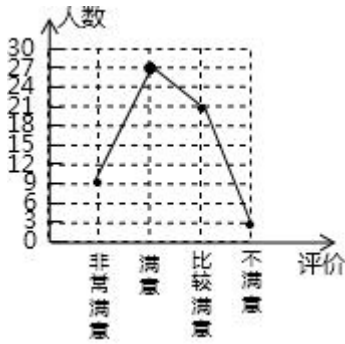
【分析】(1) 首先求得总人数，然后根据百分比求得人数即可；

(2) 根据(1)补全折线统计图即可；

(3) 利用概率公式求解即可.

【解答】解: (1) 由折线统计图知“非常满意”9人, 由扇形统计图知“非常满意”占15%, 所以被调查学生总数为 $9 \div 15\% = 60$ (人), 所以“满意”的人数为 $60 - (9+21+3) = 27$ (人);

(2) 如图:



(3) 所求概率为 $\frac{9+27}{60} = \frac{3}{5}$.

【点评】本题考查了统计图及概率公式的知识, 能够从统计图中整理出进一步解题的有关信息是解答本题的关键, 难度不大.

20. (9分) 某超市计划购进甲、乙两种商品, 两种商品的进价、售价如下表:

商品	甲	乙
进价(元/件)	$x+60$	x
售价(元/件)	200	100

若用360元购进甲种商品的件数与用180元购进乙种商品的件数相同.

(1) 求甲、乙两种商品的进价是多少元?

(2) 若超市销售甲、乙两种商品共50件, 其中销售甲种商品为 a 件 ($a \geq 30$), 设销售完50件甲、乙两种商品的总利润为 w 元, 求 w 与 a 之间的函数关系式, 并求出 w 的最小值.

【分析】(1) 根据用360元购进甲种商品的件数与用180元购进乙种商品的件数相同列出方程, 解方程即可;

(2) 根据总利润 = 甲种商品一件的利润 $\times$ 甲种商品的件数 + 乙种商品一件的利润 $\times$ 乙种商品的件数列出 w 与 a 之间的函数关系式, 再根据一次函数的性质即可求出 w 的最小值.

【解答】解: (1) 依题意可得方程: $\frac{360}{x+60} = \frac{180}{x}$,

解得 $x=60$,

经检验 $x=60$ 是方程的根,

$\therefore x+60=120$ 元,

答: 甲、乙两种商品的进价分别是 120 元, 60 元;

(2) $\because$ 销售甲种商品为 a 件 ($a \geq 30$),

$\therefore$ 销售乙种商品为 $(50-a)$ 件,

根据题意得: $w = (200-120)a + (100-60)(50-a) = 40a + 2000$ ($a \geq 30$),

$\because 40 > 0$,

$\therefore w$ 的值随 a 值的增大而增大,

$\therefore$ 当 $a=30$ 时, $w_{\text{最小值}} = 40 \times 30 + 2000 = 3200$ (元).

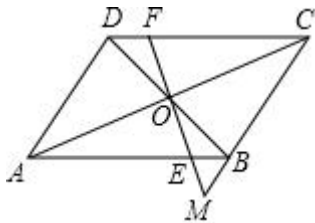
【点评】本题考查了分式方程的应用, 一次函数的应用. 解决问题的关键是读懂题意, 找到关键描述语, 进而找到所求的量的数量关系.

21. (10 分) 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , EF 经过 O , 分别交 AB 、 CD 于点 E 、

F , EF 的延长线交 CB 的延长线于 M .

(1) 求证: $OE=OF$;

(2) 若 $AD=4$, $AB=6$, $BM=1$, 求 BE 的长.



【分析】(1) 根据平行四边形的性质得到 $OA=OC$, $AB \parallel CD$, 证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$, 根据全等三角形的性质证明结论;

(2) 过点 O 作 $ON \parallel BC$ 交 AB 于 N , 根据相似三角形的性质分别求出 ON 、 BN , 证明 $\triangle ONE \sim \triangle MBE$, 根据相似三角形的性质列式计算即可.

【解答】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA=OC$, $AB \parallel CD$, $BC=AD$,

$\therefore \angle OAE = \angle OCF$,

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,

$$\begin{cases} \angle OAE = \angle OCF \\ OA = OC \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases},$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF (ASA),$

$\therefore OE = OF;$

(2) 解: 过点 O 作 $ON \parallel BC$ 交 AB 于 N ,

则 $\triangle AON \sim \triangle ACB$,

$\therefore OA = OC,$

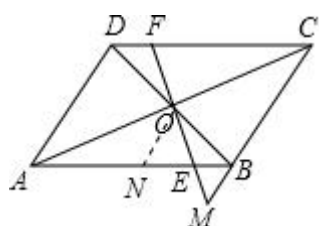
$\therefore ON = \frac{1}{2}BC = 2, \quad BN = \frac{1}{2}AB = 3,$

$\therefore ON \parallel BC,$

$\therefore \triangle ONE \sim \triangle MBE,$

$\therefore \frac{ON}{BM} = \frac{NE}{BE}, \quad \text{即} \quad \frac{2}{1} = \frac{3-BE}{BE},$

解得, $BE = 1.$



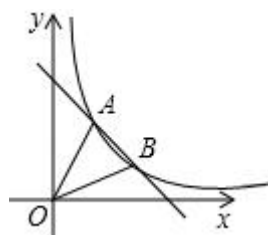
【点评】本题考查的是相似三角形的判定和性质、平行四边形的性质，掌握相似三角形的判定定理和性质定理、全等三角形的判定定理和性质定理是解题的关键。

22. (9分) 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = -x + m$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于 A 、 B 两点，已知 $A(2, 4)$

(1) 求一次函数和反比例函数的解析式；

(2) 求 B 点的坐标；

(3) 连接 AO 、 BO ，求 $\triangle AOB$ 的面积。



【分析】(1) 由点 A 的坐标利用一次函数、反比例函数图象上点的坐标特征即可得出反比例函数解析式；

(2) 联立方程，解方程组即可求得；

(3) 求出直线与 y 轴的交点坐标后，即可求出 $S_{\triangle AOD}$ 和 $S_{\triangle BOD}$ ，继而求出 $\triangle AOB$ 的面积．

【解答】解：(1) 将 $A(2, 4)$ 代入 $y = -x + m$ 与 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 中得 $4 = -2 + m$, $4 = \frac{k}{2}$,

$\therefore m = 6, k = 8$,

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -x + 6$ ，反比例函数的解析式为 $y = \frac{8}{x}$;

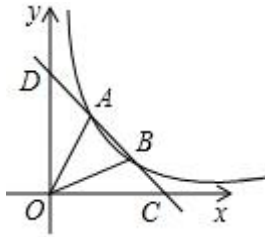
(2) 解方程组 $\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = \frac{8}{x} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$,

$\therefore B(4, 2)$;

(3) 设直线 $y = -x + 6$ 与 x 轴， y 轴交于 C, D 点，易得 $D(0, 6)$,

$\therefore OD = 6$,

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOB} - S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 - \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$.

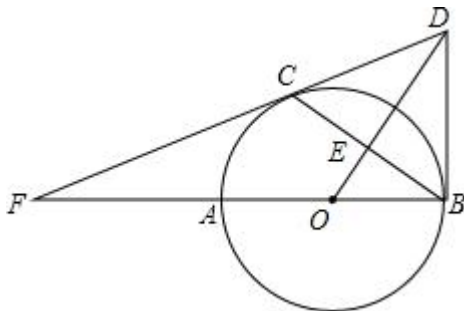


【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题、待定系数法求一次函数和反比例函数解析式以及三角形的面积，解题的关键是：根据点的坐标利用待定系数法求出函数解析式；利用分割图形求面积法求出 $\triangle AOB$ 的面积．

23. (10 分) 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， AC, BC 是 $\odot O$ 的弦， $OE \parallel AC$ 交 BC 于 E ，过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 OE 的延长线于点 D ，连接 DC 并延长交 BA 的延长线于点 F ．

(1) 求证： DC 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AB = 8$ ，求线段 CF 的长．



【分析】(1) 连接 OC, AC ，根据平行线的性质得到 $\angle 1 = \angle ACB$ ，由圆周角定理得到 $\angle 1$

$= \angle ACB = 90^\circ$ ，根据线段垂直平分线的性质得到 $DB = DC$ ，求得 $\angle DBE = \angle DCE$ ，根据切线的性质得到 $\angle DBO = 90^\circ$ ，求得 $OC \perp DC$ ，于是得到结论；

(2) 解直角三角形即可得到结论．

【解答】(1) 证明：连接 OC ， AC ，

$$\because OE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle ACB,$$

$$\because AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \perp BC, \text{ 由垂径定理得 } OD \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore DB = DC,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DCE,$$

$$\text{又 } \because OC = OB,$$

$$\therefore \angle OBE = \angle OCE,$$

$$\text{即 } \angle DBO = \angle OCD,$$

$$\because DB \text{ 为 } \odot O \text{ 的切线}, OB \text{ 是半径},$$

$$\therefore \angle DBO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle DBO = 90^\circ,$$

$$\text{即 } OC \perp DC,$$

$$\because OC \text{ 是 } \odot O \text{ 的半径},$$

$$\therefore DC \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

$$(2) \text{ 解: 在 } \text{Rt} \triangle ABC \text{ 中}, \angle ABC = 30^\circ,$$

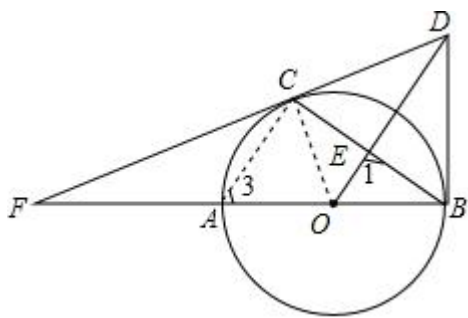
$$\therefore \angle 3 = 60^\circ, \text{ 又 } OA = OC,$$

$$\therefore \triangle AOC \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore \angle COF = 60^\circ,$$

$$\text{在 } \text{Rt} \triangle COF \text{ 中}, \tan \angle COF = \frac{CF}{OC},$$

$$\therefore CF = 4\sqrt{3}.$$



【点评】本题考查了切线的判定和性质，垂径定理，圆周角定理，等腰三角形的性质，正确的作出辅助线是解题的关键．

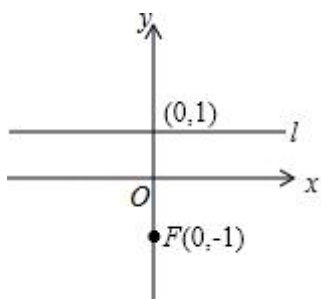
24. (12分) 已知二次函数 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象过点 $(2, -1)$ ，点 P (P 与 O 不重合) 是图象上的一点，直线 l 过点 $(0, 1)$ 且平行于 x 轴. $PM \perp l$ 于点 M ，点 $F(0, -1)$.

(1) 求二次函数的解析式；

(2) 求证：点 P 在线段 MF 的中垂线上；

(3) 设直线 PF 交二次函数的图象于另一点 Q ， $QN \perp l$ 于点 N ，线段 MF 的中垂线交 l 于点 R ，求 $\frac{MR}{RN}$ 的值；

(4) 试判断点 R 与以线段 PQ 为直径的圆的位置关系.



【分析】(1) 把点 $(2, -1)$ 代入函数表达式，即可求解；

(2) $y_1 = -\frac{1}{4}x_1^2$ ，即 $x_1^2 = -4y_1$ ， $PM = |1 - y_1|$ ，又 $PF = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 + 1)^2} = \sqrt{-4y_1 + y_1^2 + 2y_1 + 1} = |y_1 - 1| = PM$ ，即可求解；

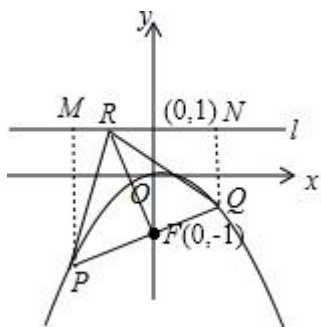
(3) 证明 $\triangle PMR \cong \triangle PFR$ (SAS)、 $\text{Rt} \triangle RFQ \cong \text{Rt} \triangle RNQ$ (HL)，即 $RN = FR$ ，即 $MR = FR = RN$ ，即可求解；

(4) 在 $\triangle PQR$ 中，由 (3) 知 PR 平分 $\angle MRF$ ， QR 平分 $\angle FRN$ ，则 $\angle PRQ = \frac{1}{2}(\angle MRF + \angle FRN) = 90^\circ$ ，即可求解.

【解答】解：(1) $\because y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象过点 $(2, -1)$,

$$\therefore -1 = a \times 2^2, \text{ 即 } a = -\frac{1}{4}, \therefore y = -\frac{1}{4}x^2;$$

(2) 设二次函数的图象上的点 $P(x_1, y_1)$, 则 $M(x_1, 1)$,



$$y_1 = -\frac{1}{4}x_1^2, \text{ 即 } x_1^2 = -4y_1, PM = |1 - y_1|,$$

$$\text{又 } PF = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 + 1)^2} = \sqrt{-4y_1 + y_1^2 + 2y_1 + 1} = |y_1 - 1| = PM,$$

即 $PF = PM$,

$\therefore$ 点 P 在线段 MF 的中垂线上;

(3) 连接 RF ,

$\because R$ 在线段 MF 的中垂线上,

$$\therefore MR = FR,$$

$$\text{又 } \because PM = PF, PR = PR,$$

$$\therefore \triangle PMR \cong \triangle PFR \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle PFR = \angle PMR = 90^\circ,$$

$$\therefore RF \perp PF,$$

连接 RQ , 又在 $\text{Rt} \triangle RFQ$ 和 $\text{Rt} \triangle RNQ$ 中,

$$\because Q \text{ 在 } y = -\frac{1}{4}x^2 \text{ 的图象上, 由 (2) 结论知 } \therefore QF = QN,$$

$$\because RQ = RQ,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle RFQ \cong \text{Rt} \triangle RNQ \text{ (HL)},$$

$$\text{即 } RN = FR,$$

$$\text{即 } MR = FR = RN,$$

$$\therefore \frac{MR}{RN} = 1;$$

(4) 在 $\triangle PQR$ 中, 由 (3) 知 PR 平分 $\angle MRF$, QR 平分 $\angle FRN$,

$$\therefore \angle PRQ = \frac{1}{2} (\angle MRF + \angle FRN) = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 R 在以线段 PQ 为直径的圆上.

【点评】 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到三角形全等、中垂线、圆的基本知识等, 其中 (3), 证明 $\triangle PMR \cong \triangle PFR$ (SAS)、 $\text{Rt} \triangle RFQ \cong \text{Rt} \triangle RNQ$ (HL) 是本题解题的关键.