

2019 年四川省德阳市中考数学试卷

一.选择题（本大题共 12 个小题,每小题 3 分,共 36 分在每小题给出的四个选项中,有且仅有一项是符合题目要求的）

1.（3 分）-6 的倒数是（ ）

A. -6

B. 6

C. $\frac{1}{6}$

D. $-\frac{1}{6}$

2.（3 分）下列运算中,正确的是（ ）

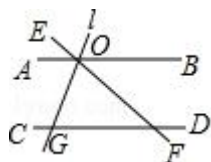
A. $3y+5y=8y^2$

B. $3y-5y=-2$

C. $3y \times 5y=15y^2$

D. $3y \div 5y=\frac{3}{5}y$

3.（3 分）已知直线 $AB \parallel CD$, 直线 EF 与 AB 相交于点 O , 且 $\angle BOE = 140^\circ$. 直线 l 平分 $\angle BOE$ 交 CD 于点 G , 那么 $\angle CGO =$ （ ）



A. 110°

B. 105°

C. 100°

D. 70°

4.（3 分）在九年级一次数学单元测验中, 某班一个学习小组 6 人的成绩（单位：分）分别为：85、87、98、70、84、87. 则这组数据的中位数和众数分别是（ ）

A. 86 和 89

B. 85 和 86

C. 86 和 87

D. 87 和 87

5.（3 分）若一个多边形的内角和为其外角和的 2 倍, 则这个多边形为（ ）

A. 六边形

B. 八边形

C. 十边形

D. 十二边形

6.（3 分）下列说法错误的是（ ）

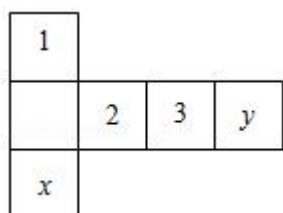
A. 必然事件发生的概率为 1

B. 平均数和方差都不易受极端值的影响

C. 抽样调查抽取的样本是否具有代表性, 直接关系对总体估计的准确程度

D. 可以通过大量重复试验, 用一个随机事件发生的频率去估计它的概率

7.（3 分）一个正方体的相对表面上所标的数字相等, 如图, 是这个正方体的表面展开图, 那么 $x+y =$ （ ）



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

8. (3分)《九章算术》是我国古代一部著名的数学专著，其中记载了一个“折竹抵地”问题：今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺，问折者高几何？其意思是：有一根与地面垂直且高一丈的竹子（1丈=10尺），现被大风折断成两截，尖端落在地面上，竹尖与竹根的距离为三尺．问折断处离地面的距离为（ ）

- A. 5.45 尺 B. 4.55 尺 C. 5.8 尺 D. 4.2 尺

9. (3分)分式方程 $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$ 的解是（ ）

- A. $x_1 = -2, x_2 = 1$ B. $x = 1$ C. $x = -2$ D. 无解

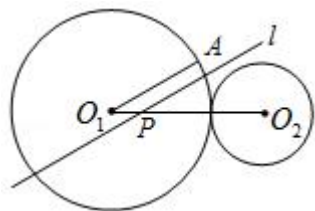
10. (3分)已知 $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $\triangle AOD$ 是等边三角形，且 $AD = 4$ ，则 AB 等于（ ）

- A. 2 B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

11. (3分)对于二次函数 $y = x^2 - 6x + a$ ，在下列几种说法中：①当 $x < 2$ 时， y 随 x 的增大而减小；②若函数的图象与 x 轴有交点，则 $a \geq 9$ ；③若 $a = 8$ ，则二次函数 $y = x^2 - 6x + a$ （ $2 < x < 4$ ）的图象在 x 轴的下方；④若将此函数的图象绕坐标原点旋转 180° ，则旋转后的函数图象的顶点坐标为 $(-3, 9 - a)$ ，其中正确的个数为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. (3分)如图，已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别为2和1，且两圆外切，点 A 为 $\odot O_1$ 上一点， $\angle AO_1O_2 = 30^\circ$ ，点 P 为线段 O_1O_2 上的一个动点，过 P 作 O_1A 的平行线 l ，如果在 $\odot O_2$ 上有且仅有2个点到直线 l 的距离为 $\frac{1}{4}$ ，则 O_1P 的取值范围是（ ）



- A. $\frac{1}{4} < O_1P \leq \frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2} < O_1P < 3$ C. $\frac{3}{2} < O_1P \leq \frac{5}{2}$ D. $\frac{1}{2} < O_1P < \frac{3}{2}$

二、填空题（每小题3分，共15分）

13. (3分)2019年“世界无烟日”的主题是“烟草与肺部健康”，据世界卫生组织权威统计信息，全球每年因吸烟而死亡的人数高达7030000人，若用科学记数法表示数据7030000，应当为_____.

14. (3分) 某学校科学兴趣小组为了了解自己育种的树苗的生长情况随机抽取 10 株树苗测量其高度, 统计结果如表:

高度 (cm)	40	50	60	70
株数	2	4	3	1

由此估计这批树苗的平均高度为_____cm.

15. (3分) 将直线 $y = -x + 8$ 向下平移 m 个单位后, 与直线 $y = 3x + 6$ 的交点在第二象限, 则 m 的取值范围是_____.

16. (3分) 给出下列结论:

①三角形的重心是三角形三条边上的中线的交点;

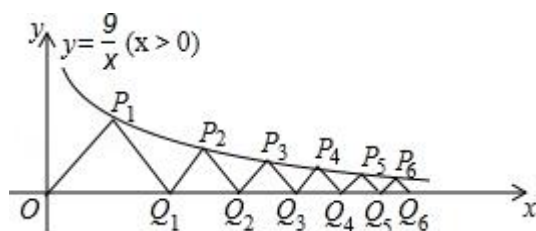
②圆内接四边形的对角相等;

③圆心角为 120° , 半径为 4 的扇形的面积是 $\frac{16\pi}{3}$;

④在平面直角坐标系中, 如果以原点为位似中心画出一个与原图形位似的图形, 它与原图形的相似比为 3, 那么与原图形上的点 $P(1, 2)$ 对应的位似图形上点 P' 的坐标为 $(3, 6)$ 或 $(-3, -6)$.

其中正确的结论是_____ (填写正确结论的编号)

17. (3分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $\dots$, $P_n(x_n, y_n)$ 均在反比例函数 $y = \frac{9}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, 点 Q_1 , Q_2 , Q_3 , $\dots$, Q_n 均在 x 轴的正半轴上, 且 $\triangle OP_1Q_1$, $\triangle Q_1P_2Q_2$, $\triangle Q_2P_3Q_3$, $\dots$, $\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$ 均为等腰直角三角形, OQ_1 , Q_1Q_2 , Q_2Q_3 , $\dots$, $Q_{n-1}Q_n$ 分别为以上等腰直角三角形的底边, 则 $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2019}$ 的值等于_____.



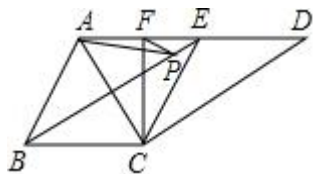
三、解答题 (共 69 分).

18. (6分) 计算: $-1^2 + (2 - \sqrt{2})^0 - 4\cos 60^\circ - \sqrt[3]{-8}$.

19. (7分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $BC = \frac{1}{2}AD$, 点 E 为 AD 的中点, 点 F 为 AE 的中点, $AC \perp CD$, 连接 BE , CE , CF .

(1) 判断四边形 $ABCE$ 的形状，并说明理由；

(2) 如果 $AB = 4$ ， $\angle D = 30^\circ$ ，点 P 为 BE 上的动点，求 $\triangle PAF$ 的周长的最小值.



20. (11 分) 某汽车销售公司一位销售经理 1~5 月份的汽车销售统计图如下：

图1:1~5月销售量折线统计图



图2:1~5月销售量扇形统计图



(1) 已知 1 月的销售量是 2 月的销售量的 3.5 倍，则 1 月的销售量为_____辆. 在图 2 中，2 月的销售量所对应的扇形的圆心角大小为_____.

(2) 补全图 1 中销售量折线统计图.

(3) 已知 4 月份销售的车中有 3 辆国产车和 2 辆合资车，国产车分别用 G_1 、 G_2 、 G_3 表示，合资车分别用 H_1 、 H_2 表示，现从这 5 辆车中随机抽取两辆车参加公司的回馈活动，请用列举法（画树状图或列表）求出“抽到的两辆车都是国产车”的概率.

21. (10 分) 某机电厂有甲乙两个发电机生产车间，甲车间每天产量为 A 型发电机和 B 型发电机共 45 台，其中 A 型发电机数量比 B 型发电机数量多 5 台.

(1) 问甲车间每天生产 A 、 B 两种型号发电机各多少台？

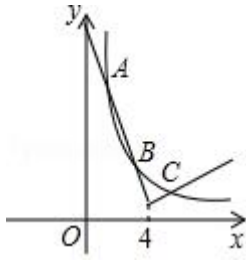
(2) 乙车间每天产量为 50 台，其中 A 型发电机 20 台， B 型发电机 30 台，现有一订单需 A 型发电机 720 台和 B 型发电机 M 台，但由于受原材料供应限制，两车间不能同时生产，厂里决定由甲乙两车间先后用 30 天完成订单任务，求甲车间至少需安排生产多少天？由于甲车间还有其他生产任务，最多只能安排 27 天参加此订单生产，求出 M 所有的可能值.

22. (10 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知函数 $y = \begin{cases} -3x+m & (x < 4) \\ \frac{1}{2}x-1 & (x \geq 4) \end{cases}$ 的图象与双曲线

线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 交于 A 、 B 、 C 三点，其中 C 点的坐标为 $(6, n)$ ，且点 A 的横坐标为 $\frac{4}{3}$.

(1) 求此双曲线的解析式；

(2) 求 m 的值及交点 B 的坐标.

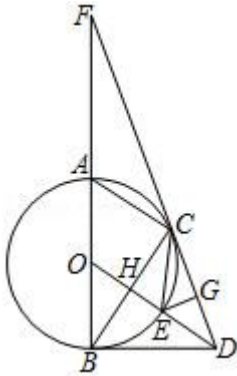


23. (11分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 $\odot O$ 上一点, $OE \perp BC$ 于点 H , 交 $\odot O$ 于点 E , 点 D 为 OE 的延长线上一点, DC 的延长线与 BA 的延长线交于点 F , 且 $\angle BOD = \angle BCD$, 连结 BD 、 AC 、 CE .

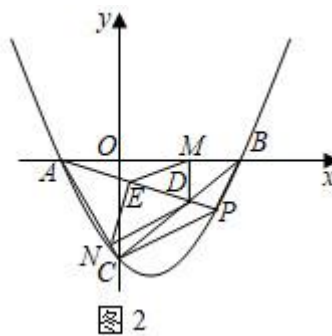
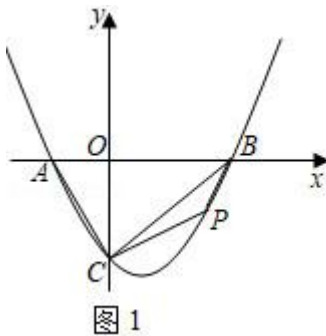
(1) 求证: DF 为 $\odot O$ 的切线;

(2) 过 E 作 $EG \perp FD$ 于点 G , 求证: $\triangle CHE \cong \triangle CGE$;

(3) 如果 $AF = 1$, $\sin \angle FCA = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 EG 的长.



24. (14分) 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴的负半轴交于点 C , 已知抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, B 、 C 两点的坐标分别为 $B(2\sqrt{3}, 0)$, $C(0, -3)$. 点 P 为直线 BC 下方的抛物线上的一个动点 (不与 B 、 C 两点重合).



(1) 求此抛物线的解析式;

(2) 如图 1, 连接 PB 、 PC 得到 $\triangle PBC$, 问是否存在这样的点 P , 使得 $\triangle PBC$ 的面积最大? 如果存在, 求出面积的最大值和此时点 P 的坐标; 如果不存在, 请说明理由.

(3) 如图 2, 连接 AP 交线段 BC 于点 D , 点 E 为线段 AD 的中点, 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M , $DN \perp AC$ 于点 N , 连接 EM 、 EN , 则在点 P 的运动过程中, $\angle MEN$ 的大小是否为定值? 如果是, 求出这个定值; 如果不是, 请说明理由.

2019 年四川省德阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一.选择题（本大题共 12 个小题,每小题 3 分,共 36 分在每小题给出的四个选项中,有且仅有一项是符合题目要求的）

1.（3 分）-6 的倒数是（ ）

- A. -6 B. 6 C. $\frac{1}{6}$ D. $-\frac{1}{6}$

【分析】根据倒数的定义求解.

【解答】解：-6 的倒数是 $-\frac{1}{6}$,

故选：D.

【点评】本题主要考查了倒数的定义，解题的关键是熟记定义.

2.（3 分）下列运算中，正确的是（ ）

- A. $3y+5y=8y^2$ B. $3y-5y=-2$ C. $3y \times 5y=15y^2$ D. $3y \div 5y=\frac{3}{5}y$

【分析】分别按照单项式的加减乘除法运算法则验证即可.

【解答】解：选项 A: $3y+5y=8y$ ，故 A 错误；

选项 B: $3y-5y=-2y$ ，故 B 错误；

选项 C: $3y \times 5y=15y^2$ ，故 C 正确；

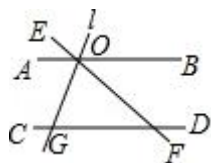
选项 D: $3y \div 5y=\frac{3}{5}$ ，故 D 错误.

综上，只有 C 正确.

故选：C.

【点评】本题考查了整式的加减乘除混合运算，属于基础知识的考查，比较简单.

3.（3 分）已知直线 $AB \parallel CD$ ，直线 EF 与 AB 相交于点 O ，且 $\angle BOE = 140^\circ$. 直线 l 平分 $\angle BOE$ 交 CD 于点 G ，那么 $\angle CGO =$ （ ）

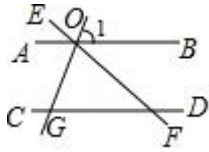


- A. 110° B. 105° C. 100° D. 70°

【分析】由角平分线性质的得出 $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle BOE = 70^\circ$ ，利用平行线的性质知 $\angle DGO = \angle 1$

$= 70^\circ$ ，根据邻补角概念可得答案．

【解答】解：如图，



$\because$ 直线 l 平分 $\angle BOE$ ，且 $\angle BOE = 140^\circ$ ，

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle BOE = 70^\circ,$$

$\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle DGO = \angle 1 = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle CGO = 110^\circ,$$

故选：A．

【点评】本题主要考查平行线的性质，解题的关键是掌握角平分线的性质和平行线的性质．

4. (3分) 在九年级一次数学单元测验中，某班一个学习小组6人的成绩(单位：分)分别为：85、87、98、70、84、87．则这组数据的中位数和众数分别是()

A. 86 和 89 B. 85 和 86 C. 86 和 87 D. 87 和 87

【分析】找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数或两个数的平均数为中位数；众数是一组数据中出现次数最多的数据，注意众数可以不止一个．

【解答】解：这组数据按照从小到大的顺序排列为：70，84，85，87，87，98，
则众数为：87，

$$\text{中位数为：} (85+87) \div 2 = 86.$$

故选：C．

【点评】本题考查了中位数和众数的概念，一组数据中出现次数最多的数据叫做众数；将一组数据按照从小到大(或从大到小)的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数．

5. (3分) 若一个多边形的内角和为其外角和的2倍，则这个多边形为()

A. 六边形 B. 八边形 C. 十边形 D. 十二边形

【分析】多边形的外角和是 360° ，则内角和是 $360^\circ \times 2 = 720^\circ$ ．设这个多边形是 n 边形，内角和是 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，这样就得到一个关于 n 的方程组，从而求出边数 n 的值．

【解答】解：设这个多边形是 n 边形，根据题意，得

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ \times 2,$$

解得： $n=6$ ，即这个多边形为六边形．

故选： A ．

【点评】本题考查了多边形的内角和定理和外角和．能够根据多边形的内角和定理和外角和的特征，把求边数的问题就可以转化为解方程的问题是解题的关键．

6. (3分) 下列说法错误的是 ()

- A. 必然事件发生的概率为 1
- B. 平均数和方差都不易受极端值的影响
- C. 抽样调查抽取的样本是否具有代表性，直接关系对总体估计的准确程度
- D. 可以通过大量重复试验，用一个随机事件发生的频率去估计它的概率

【分析】利用概率的意义、算术平均数及方差的知识分别判断后即可确定正确的选项．

【解答】解： A 、必然事件发生的概率为 1，正确，不符合题意；

B 、平均数和方差都受极端值的影响，故原命题错误，符合题意；

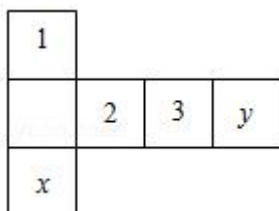
C 、抽样调查抽取的样本是否具有代表性，直接关系对总体估计的准确程度，正确，不符合题意；

D 、可以通过大量重复试验，用一个随机事件发生的频率去估计它的概率，正确，不符合题意，

故选： B ．

【点评】考查了概率的意义、算术平均数及方差的知识，解题的关键是了解有关统计的知识，难度不大．

7. (3分) 一个正方体的相对表面上所标的数字相等，如图，是这个正方体的表面展开图，那么 $x+y=$ ()



- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6

【分析】利用正方体及其表面展开图的特点解题．

【解答】解：这是一个正方体的平面展开图，共有六个面，其中面“ x ”与面“1”相对，

面“y”与面“2”相对，“3”与面“无字”相对．

∵正方体的相对表面上所标的数字相等，

$$\therefore x = 1, y = 2.$$

$$\therefore x + y = 1 + 2 = 3.$$

故选：A．

【点评】 本题考查了正方体相对两个面上的文字．解题的关键是明确找正方体相对两个面上的文字的方法，注意正方体的空间图形，从相对面入手，分析及解答问题．

8. (3分) 《九章算术》是我国古代一部著名的数学专著，其中记载了一个“折竹抵地”问题：今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺，问折者高几何？其意思是：有一根与地面垂直且高一丈的竹子（1丈 = 10尺），现被大风折断成两截，尖端落在地面上，竹尖与竹根的距离为三尺．问折断处高地面的距离为（ ）

A. 5.45尺 B. 4.55尺 C. 5.8尺 D. 4.2尺

【分析】 设折断后的竹子的高为 x 尺，根据勾股定理列出方程求解即可．

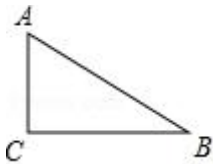
【解答】 解：设折断后的竹子高 AC 为 x 尺，则 AB 长为 $(10 - x)$ 尺，根据勾股定理得：

$$AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\text{即：} x^2 + 3^2 = (10 - x)^2,$$

$$\text{解得：} x = 4.55,$$

故选：B．



【点评】 考查了勾股定理的应用，解题的关键是从实际问题中抽象出直角三角形，难度不大．

9. (3分) 分式方程 $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$ 的解是（ ）

A. $x_1 = -2, x_2 = 1$ B. $x = 1$ C. $x = -2$ D. 无解

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解．

【解答】 解：去分母得： $x(x+1) = 2$ ，即 $x^2 + x - 2 = 0$ ，

$$\text{解得：} x = 1 \text{ 或 } x = -2,$$

经检验 $x = 1$ 是增根，分式方程的解为 $x = -2$ ，

故选：C.

【点评】此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

10. (3分) 已知 $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $\triangle AOD$ 是等边三角形，且 $AD = 4$ ，则 AB 等于 ()

A. 2 B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

【分析】根据等边三角形的性质得出 $AD = OA = OD$ ，利用平行四边形的性质和矩形的判定解答即可.

【解答】解： $\because \triangle AOD$ 是等边三角形，

$$\therefore AD = OA = OD = 4,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC, OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore AC = BD = 8,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3},$$

故选：D.

【点评】此题考查平行四边形的性质，关键是根据平行四边形的性质解答即可.

11. (3分) 对于二次函数 $y = x^2 - 6x + a$ ，在下列几种说法中：①当 $x < 2$ 时， y 随 x 的增大而减小；②若函数的图象与 x 轴有交点，则 $a \geq 9$ ；③若 $a = 8$ ，则二次函数 $y = x^2 - 6x + a$ ($2 < x < 4$) 的图象在 x 轴的下方；④若将此函数的图象绕坐标原点旋转 180° ，则旋转后的函数图象的顶点坐标为 $(-3, 9 - a)$ ，其中正确的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】根据抛物线的对称轴及开口方向可判断函数的增减变化；根据判别式 Δ 可得 a 的取值范围；当 $a = 8$ 时，解方程可得其与 x 轴的交点坐标；将原抛物线解析式写成顶点式，得其顶点坐标，则易得旋转 180° 之后的函数图象的顶点坐标.

【解答】解： $\because$ 抛物线的对称轴为 $x = 3$ ，且开口向上

$\therefore$ 当 $x < 2$ 时， y 随 x 的增大而减小，故①正确；

当 $\Delta = 36 - 4a \geq 0$ ，即 $a \leq 9$ 时，函数图象与 x 轴有交点，故②错误；

当 $a = 8$ 时， $y = x^2 - 6x + 8$ ，解方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ ，得 $x_1 = 2$ ， $x_2 = 4$

∴函数图象与 x 轴交于 $(2, 0)$ 、 $(4, 0)$

∴函数图象开口向上

∴当 $2 < x < 4$ 时，函数图象在 x 轴下方，故③正确；

$$y = x^2 - 6x + a = (x - 3)^2 + a - 9$$

∴顶点坐标为 $(3, a - 9)$

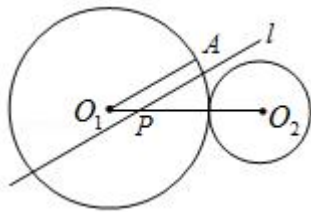
函数图象绕坐标原点旋转 180° 后，顶点坐标为 $(-3, 9 - a)$ ，故④正确。

综上，正确的有①③④

故选：C.

【点评】 本题考查了二次函数图象与系数的关系，明确二次函数的对称性及其与 x 轴的交点与一元二次方程的根的关系，同时明确二次函数的顶点式及其旋转后的顶点变化等知识点，这是解题的关键。

12. (3 分) 如图，已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别为 2 和 1，且两圆外切，点 A 为 $\odot O_1$ 上一点， $\angle AO_1O_2 = 30^\circ$ ，点 P 为线段 O_1O_2 上的一个动点，过 P 作 O_1A 的平行线 l ，如果在 $\odot O_2$ 上有且仅有 2 个点到直线 l 的距离为 $\frac{1}{4}$ ，则 O_1P 的取值范围是 ()



- A. $\frac{1}{4} < O_1P \leq \frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2} < O_1P < 3$ C. $\frac{3}{2} < O_1P \leq \frac{5}{2}$ D. $\frac{1}{2} < O_1P < \frac{3}{2}$

【分析】 过点 O_2 作 $O_2B \perp$ 直线 l 于 B ，求出两种特殊情形的 O_1P 的值即可判断。

【解答】 解：过点 O_2 作 $O_2B \perp$ 直线 l 于 B 。

当 $O_2B = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ 时， $\odot O_2$ 上有且只有一个点到直线 l 的距离为 $\frac{1}{4}$ ，

∵ $AO_1 \parallel PB$ ，

∴ $\angle BPO_2 = \angle AO_1P = 30^\circ$ ，

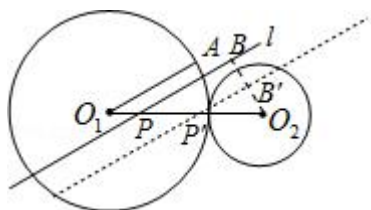
∴ $PO_2 = 2O_2B = \frac{5}{2}$ ，

∴ $O_1P = O_1O_2 - O_2P = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ ，

当 $O_2B' = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 时，同法可得 $P'O_2 = 2O_2B' = \frac{3}{2}$ 此时 $O_1P' = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ，

观察图象可知： $\frac{1}{2} < O_1P < \frac{3}{2}$,

故选：D.



【点评】 本题考查相切两圆的性质，平行线的性质，解直角三角形等知识，解题的关键是性质寻找特殊位置解决问题，属于中考常考题型.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

- 13.（3 分）2019 年“世界无烟日”的主题是“烟草与肺部健康”，据世界卫生组织权威统计信息，全球每年因吸烟而死亡的人数高达 7030000 人，若用科学记数法表示数据 7030000，应当为 7.03×10^6 .

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】 解：7 030 000 = 7.03×10^6 ,

故答案为： 7.03×10^6 .

【点评】 此题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

- 14.（3 分）某学校科学兴趣小组为了了解自己育种的树苗的生长情况随机抽取 10 株树苗测量其高度，统计结果如表：

高度 (cm)	40	50	60	70
株数	2	4	3	1

由此估计这批树苗的平均高度为 53 cm.

【分析】 根据表格中的数据和加权平均数的计算方法可以计算出这批树苗的平均高度.

【解答】 解：这批树苗的平均高度为： $\frac{40 \times 2 + 50 \times 4 + 60 \times 3 + 70 \times 1}{10} = 53$ (cm),

故答案为：53.

【点评】 本题考查加权平均数、用样本估计总体，解答本题的关键是明确加权平均数的计算方法.

15. (3分) 将直线 $y = -x + 8$ 向下平移 m 个单位后, 与直线 $y = 3x + 6$ 的交点在第二象限, 则 m 的取值范围是 $2 < m < 10$.

【分析】将直线 $y = -x + 8$ 向下平移 m 个单位后可得: $y = -x + 8 - m$, 求出直线 $y = -x + 8 - m$ 与直线 $y = 3x + 6$ 的交点, 再由此点在第二象限可得出 m 的取值范围.

【解答】解: 将直线 $y = -x + 8$ 向下平移 m 个单位后可得: $y = -x + 8 - m$,

联立两直线解析式得:
$$\begin{cases} y = -x + 8 - m \\ y = 3x + 6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = \frac{2-m}{4} \\ y = \frac{30-3m}{4} \end{cases},$$

即交点坐标为 $(\frac{2-m}{4}, \frac{30-3m}{4})$,

$\because$ 交点在第二象限,

$$\therefore \begin{cases} \frac{2-m}{4} < 0 \\ \frac{30-3m}{4} > 0 \end{cases},$$

解得: $2 < m < 10$.

故答案为 $2 < m < 10$.

【点评】本题考查了一次函数图象与几何变换、两直线的交点坐标, 注意第二象限的点的横坐标小于 0、纵坐标大于 0.

16. (3分) 给出下列结论:

①三角形的重心是三角形三条边上的中线的交点;

②圆内接四边形的对角相等;

③圆心角为 120° , 半径为 4 的扇形的面积是 $\frac{16\pi}{3}$;

④在平面直角坐标系中, 如果以原点为位似中心画出一个与原图形位似的图形, 它与原图形的相似比为 3, 那么与原图形上的点 $P(1, 2)$ 对应的位似图形上点 P' 的坐标为 $(3, 6)$ 或 $(-3, -6)$.

其中正确的结论是 ①③④ (填写正确结论的编号)

【分析】根据三角形的重心的概念、圆内接四边形的性质、扇形面积公式、位似变换的性质判断, 得到答案.

【解答】解: 三角形的重心是三角形三条边上的中线的交点, ①正确;

圆内接四边形的对角互补，不一定相等，②错误；

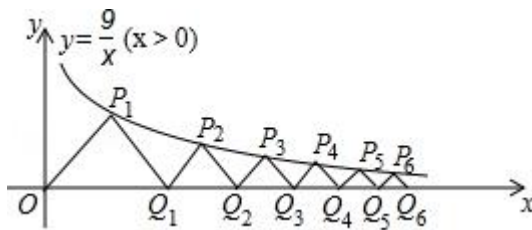
圆心角为 120° ，半径为 4 的扇形的面积 $= \frac{120\pi \times 4^2}{360} = \frac{16\pi}{3}$ ，③正确；

以原点为位似中心画出一个与原图形位似的图形，它与原图形的相似比为 3，那么与原图形上的点 $P(1, 2)$ 对应的位似图形上点 P' 的坐标为 $(1 \times 3, 2 \times 3)$ 或 $(-1 \times 3, -2 \times 3)$ ，即 $(3, 6)$ 或 $(-3, -6)$ ，④正确；

故答案为：①③④.

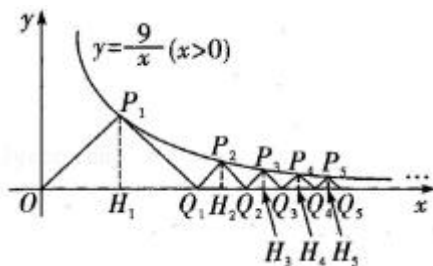
【点评】 本题考查的是命题的真假判断，掌握三角形的重心的概念、圆内接四边形的性质、扇形面积公式、位似变换的性质是解题的关键.

17. (3 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 、 $P_3(x_3, y_3)$ 、 $\dots$ 、 $P_n(x_n, y_n)$ 均在反比例函数 $y = \frac{9}{x}$ ($x > 0$) 的图象上，点 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 $\dots$ 、 Q_n 均在 x 轴的正半轴上，且 $\triangle OP_1Q_1$ 、 $\triangle Q_1P_2Q_2$ 、 $\triangle Q_2P_3Q_3$ 、 $\dots$ 、 $\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$ 均为等腰直角三角形， OQ_1 、 Q_1Q_2 、 Q_2Q_3 、 $\dots$ 、 $Q_{n-1}Q_n$ 分别为以上等腰直角三角形的底边，则 $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2019}$ 的值等于 $3\sqrt{2019}$.



【分析】 过点 P_n 分别向 x 轴作垂线，交 x 轴于点 H_n ，构造等腰直角三角形，利用反比例函数建立方程，可求出 $y_1, y_2, \dots$ ，从而找出规律即可.

【解答】 解：如解图，过点 P_n 分别向 x 轴作垂线，交 x 轴于点 H_n ，



$\because$ 点 P_n 在反比例函数 $y = \frac{9}{x}$ 的图象上，且构造等腰直角三角形

$\therefore S_{\triangle OP_1H_1} = \frac{9}{2}$ ， $\therefore OH_1 = 3$ ， $\therefore OQ_1 = 6$ ，

令 $P_2H_2 = y_2$

，则有 $y_2(6 + y_2) = 9$ ，

解得 $y_2 = -3\sqrt{2} - 3$ (舍去) $y_2 = 3\sqrt{2} - 3$,

则 $y_1 + y_2 = 3 + 3\sqrt{2} - 3 = 3\sqrt{2} = \sqrt{18} y_3$ ($2y_1 + 2y_2 + y_3 = 9$),

解得 $y_3 = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$,

则 $y_1 + y_2 + y_3 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$
 $= 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$,

根据规律可得 $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{2019} = \sqrt{9 \times 2019} = 3\sqrt{2019}$.

故答案为 $3\sqrt{2019}$

【点评】 本题考查了等腰直角三角形的性质，反比例函数的性质，过点 P_n 分别向 x 轴作垂线，构造等腰直角三角形是本题的关键.

三、解答题 (共 69 分).

18. (6 分) 计算: $-1^2 + (2 - \sqrt{2})^0 - 4\cos 60^\circ - \sqrt[3]{-8}$.

【分析】 原式利用乘方的意义，零指数幂法则，特殊角的三角函数值，以及立方根定义计算即可求出值.

【解答】 解: 原式 $= -1 + 1 - 4 \times \frac{1}{2} - (-2)$
 $= -1 + 1 - 2 + 2$
 $= 0$.

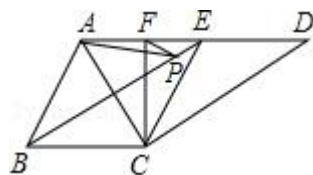
【点评】 此题考查了实数的运算，零指数幂，以及特殊角的三角函数值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

19. (7 分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $BC \parallel AD$ ， $BC = \frac{1}{2}AD$ ，点 E 为 AD 的中点，点 F 为

AE 的中点， $AC \perp CD$ ，连接 BE 、 CE 、 CF .

(1) 判断四边形 $ABCE$ 的形状，并说明理由;

(2) 如果 $AB = 4$ ， $\angle D = 30^\circ$ ，点 P 为 BE 上的动点，求 $\triangle PAF$ 的周长的最小值.



【分析】 (1) 四边形 $ADCE$ 是菱形，根据点 E 是 AD 的中点，得到 $AE = \frac{1}{2}AD$. 由 $BC =$

$\frac{1}{2}AD$ ，可知 $AE = BC$ 。因此四边形 $ABCE$ 是平行四边形，又 $AC \perp CD$ ，点 E 是 AD 的中点，所以 $CE = AE = DE$ ，得到四边形 $ABCE$ 是菱形；

(2) 由 (1) 得，四边形 $ABCE$ 是菱形，求出 $AF = \frac{1}{2}AE = 2$ ，当 $PA + PF$ 最小时， $\triangle PAF$ 的周长最小，此时 $\triangle PAF$ 的周长 $= PA + PF + AF = CF + AF$ ，在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，易证 $\triangle ACE$ 是等边三角形， $AC = AE = CE = 4$ 。由勾股定理 $CF = 2\sqrt{3}$ ，所以 $\triangle PAF$ 的周长最小 $= CF + AF = 2\sqrt{3} + 2$ 。

【解答】解：(1) 四边形 $ADCE$ 是菱形，理由如下：

$\because$ 点 E 是 AD 的中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD.$$

$$\because BC = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore AE = BC.$$

$\because BC \parallel AD$ ，即 $BDC \parallel AE$ 。

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是平行四边形

$\because AC \perp CD$ ，点 E 是 AD 的中点，

$$\therefore CE = AE = DE,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是菱形

(2) 由 (1) 得，四边形 $ABCE$ 是菱形。

$\therefore AE = EC = AB = 4$ ，且点 A 、 C 关于 BE 对称

$$\because \text{点 } F \text{ 是 } AE \text{ 的中点}, AF = \frac{1}{2}AE = 2$$

$\therefore$ 当 $PA + PF$ 最小时， $\triangle PAF$ 的周长最小

即点 P 为 CF 与 BE 的交点时， $\triangle PAF$ 的周长最小，

此时 $\triangle PAF$ 的周长 $= PA + PF + AF = CF + AF$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，点 E 是 AD 的中点，则 $CE = DE$ ，

$$\angle ECD = \angle D = 30^\circ, \angle ACE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

$\therefore \triangle ACE$ 是等边三角形。

$$\therefore AC = AE = CE = 4.$$

$$\because AF = EF, CF \perp AE$$

$$\therefore CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle PAF \text{ 的周长最小} = CF + AF = 2\sqrt{3} + 2.$$

【点评】本题考查了菱形的判定和轴对称 - 最短路线问题，熟练运用菱形的判定方法与勾股定理是解题的关键．

20. (11 分) 某汽车销售公司一位销售经理 1~5 月份的汽车销售统计图如下：

图1:1~5月销售量折线统计图

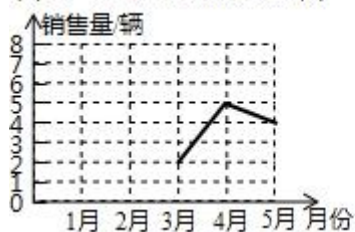


图2:1~5月销售量扇形统计图



(1) 已知 1 月的销售量是 2 月的销售量的 3.5 倍，则 1 月的销售量为 7 辆。在图 2 中，2 月的销售量所对应的扇形的圆心角大小为 36° 。

(2) 补全图 1 中销售量折线统计图。

(3) 已知 4 月份销售的车中有 3 辆国产车和 2 辆合资车，国产车分别用 G_1 、 G_2 、 G_3 表示，合资车分别用 H_1 、 H_2 表示，现从这 5 辆车中随机抽取两辆车参加公司的回馈活动，请用列举法（画树状图或列表）求出“抽到的两辆车都是国产车”的概率。

【分析】(1) 依据 3 月的销量以及百分比，即可得到 1~5 月份汽车销售总量，进而得出 1 月和 2 月的销售量以及对应的扇形的圆心角大小；

(2) 依据 1 月和 2 月的销售量即可补全图 1 中销售量折线统计图；

(3) 通过列举法即可得到共有 20 种等可能的结果，其中两辆车都是国产车的情况有 6 种，进而得出“抽到的两辆车都是国产车”的概率。

【解答】解：(1) 1~5 月份汽车销售总量为 $2 \div 10\% = 20$ (辆)，

$\therefore$ 1~2 月份共销售汽车 $20 - 2 - 5 - 4 = 9$ (辆)，

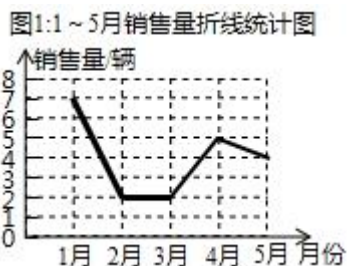
$\therefore$ 1 月的销售量是 2 月的销售量的 3.5 倍，

$\therefore$ 2 月的销售量为 $9 \div 4.5 = 2$ (辆)，1 月的销售量为 $2 \times 3.5 = 7$ (辆)，

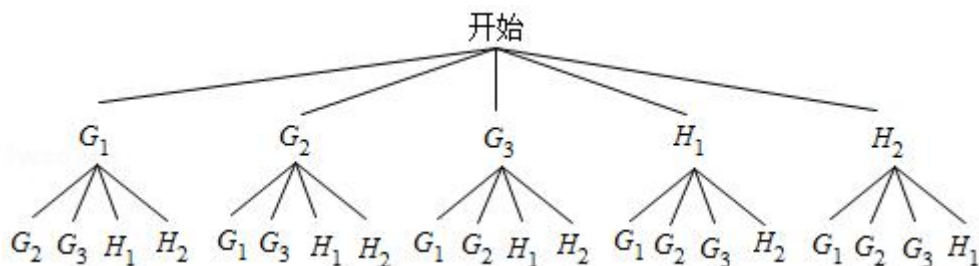
2 月销售量所对应的扇形圆心角为 $\frac{2}{20} \times 360^\circ = 36^\circ$ ，

故答案为：7， 36° ；

(2) 补全图 1 中销售量折线统计图：



(3) 画树状图如下:



共有 20 种等可能的结果, 其中两辆车都是国产车的情况有 6 种,

$$\therefore \text{“抽到的两辆车都是国产车”的概率 } P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

【点评】 本题考查的是折线统计图和扇形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键.

21. (10 分) 某机电厂有甲乙两个发电机生产车间, 甲车间每天产量为 A 型发电机和 B 型发电机共 45 台, 其中 A 型发电机数量比 B 型发电机数量多 5 台.

(1) 问甲车间每天生产 A 、 B 两种型号发电机各多少台?

(2) 乙车间每天产量为 50 台, 其中 A 型发电机 20 台, B 型发电机 30 台, 现有一订单需 A 型发电机 720 台和 B 型发电机 M 台, 但由于受原材料供应限制, 两车间不能同时生产, 厂里决定由甲乙两车间先后用 30 天完成订单任务, 求甲车间至少需安排生产多少天? 由于甲车间还有其他生产任务, 最多只能安排 27 天参加此订单生产, 求出 M 所有的可能值.

【分析】 (1) 设甲车间每天生产 A 型号发电机 x 台, 则每天生产 B 型号发电机 $(45 - x)$ 台, 根据甲车间每天生产的 A 型发电机数量比 B 型发电机数量多 5 台, 即可得出关于 x 的一元一次方程, 解之即可得出结论;

(2) 设甲车间需安排生产 m 天, 则乙车间需安排生产 $(30 - m)$ 天, 根据工作总量 = 工作效率 $\times$ 工作时间结合生产 A 型发电机不少于 720 台, 即可得出关于 m 的一元一次不等式, 解之即可得出 m 的取值范围, 结合甲车间最多安排 27 天参加生产可得出甲车间可能生产的天数, 再结合 $M = 900 - 10m$ 即可求出结论.

【解答】解：（1）设甲车间每天生产 A 型号发电机 x 台，则每天生产 B 型号发电机 $(45 - x)$ 台，

依题意，得： $x - (45 - x) = 5$ ，

解得： $x = 25$ ，

$\therefore 45 - x = 20$ ．

答：甲车间每天生产 A 型号发电机 25 台，每天生产 B 型号发电机 20 台．

（2）设甲车间需安排生产 m 天，则乙车间需安排生产 $(30 - m)$ 天，

依题意，得： $25m + 20(30 - m) \geq 720$ ，

解得： $m \geq 24$ ，

$\therefore$ 甲车间至少安排生产 24 天．

$\therefore$ 甲车间最多安排 27 天参加生产，

$\therefore$ 甲车间可以生产的天数为 24，25，26，27．

$\therefore M = 20m + 30(30 - m) = 900 - 10m$ ，

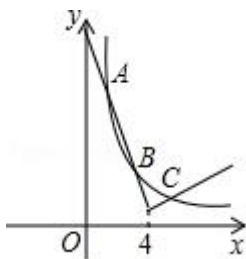
$\therefore M$ 所有的可能值为 660，650，640，630．

【点评】本题考查了一元一次方程的应用以及一元一次不等式的应用，解题的关键是：（1）找准等量关系，正确列出一元一次方程；（2）根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式．

22. （10 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知函数 $y = \begin{cases} -3x+m & (x < 4) \\ \frac{1}{2}x-1 & (x \geq 4) \end{cases}$ 的图象与双曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 交于 A 、 B 、 C 三点，其中 C 点的坐标为 $(6, n)$ ，且点 A 的横坐标为 $\frac{4}{3}$ ．

（1）求此双曲线的解析式；

（2）求 m 的值及交点 B 的坐标．



【分析】（1）先把 $C(6, n)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 求出 n 得到 $C(6, 2)$ ，然后利用待定系数法求反比例函数的解析式；

(2) 利用反比例函数解析式得到 $A\left(\frac{4}{3}, 9\right)$, 再把 A 点代入 $y = -3x + m$ 中可求得 $m =$

13, 然后通过解方程组 $\begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ y = -3x + 13 \end{cases}$ 得 B 点坐标.

【解答】 解: (1) 把 $C(6, n)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 得 $n = \frac{1}{2} \times 6 - 1 = 2$, 则 $C(6, 2)$,

设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

把 $C(6, 2)$ 代入得 $k = 6 \times 2 = 12$,

所以反比例函数解析式为 $y = \frac{12}{x}$;

(2) 当 $x = \frac{4}{3}$ 时, $y = \frac{12}{x} = 9$, 则 $A\left(\frac{4}{3}, 9\right)$,

把 $A\left(\frac{4}{3}, 9\right)$ 代入 $y = -3x + m$ 得 $-4 + m = 9$, 解得 $m = 13$,

解方程组 $\begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ y = -3x + 13 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$,

所以 B 点坐标为 $(3, 4)$,

即 m 的值为 13, 交点 B 的坐标为 $(3, 4)$.

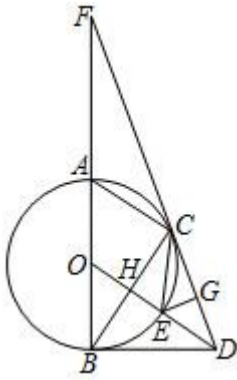
【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题: 求反比例函数与一次函数的交点坐标, 把两个函数关系式联立成方程组求解, 若方程组有解则两者有交点, 方程组无解, 则两者无交点. 也考查了待定系数法求函数解析式.

23. (11 分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 $\odot O$ 上一点, $OE \perp BC$ 于点 H , 交 $\odot O$ 于点 E , 点 D 为 OE 的延长线上一点, DC 的延长线与 BA 的延长线交于点 F , 且 $\angle BOD = \angle BCD$, 连结 BD 、 AC 、 CE .

(1) 求证: DF 为 $\odot O$ 的切线;

(2) 过 E 作 $EG \perp FD$ 于点 G , 求证: $\triangle CHE \cong \triangle CGE$;

(3) 如果 $AF = 1$, $\sin \angle FCA = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 EG 的长.

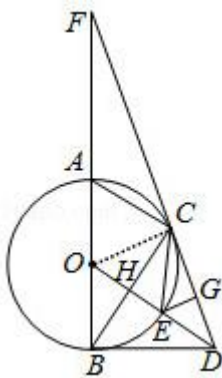


【分析】（1）连结 OC ，证明 $\angle OBH + \angle BOD = 90^\circ$ ，可得 $\angle BCD + \angle OCB = 90^\circ$ ，则结论得证；

（2）证得 $\angle ECG = \angle HCE$ ，根据 AAS 可证明 $\triangle CHE \cong \triangle CGE$ ；

（3）由条件可得 $\angle ACF = \angle ABC$ ，设 $AC = \sqrt{3}a$ ，则 $AB = 3a$ ，由勾股定理得 $BC = \sqrt{6}a$ ，证明 $\triangle ACF \sim \triangle CFB$ ，可得 $\frac{AF}{CF} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，求出 $CF = \sqrt{2}$ ， $BF = 2$ ， $AB = 1$ ，则 $OC = \frac{1}{2}$ ， $BC = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，则 $HE = EG$ 可得出答案．

【解答】（1）证明：如图，连结 OC ，



$$\because OE \perp BC,$$

$$\therefore \angle OHB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBH + \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \angle OBH = \angle OCB,$$

$$\because \angle BOD = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle BCD + \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore OC \perp CD,$$

$\because$ 点 C 为 $\odot O$ 上一点，

$\therefore DF$ 为 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: $\because \angle OCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ECG + \angle OCE = 90^\circ$,

$\because OC = OE$,

$\therefore \angle OCE = \angle OEC$,

$\therefore \angle ECG + \angle OEC = 90^\circ$,

$\because \angle OEC + \angle HCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ECG = \angle HCE$,

在 $\triangle CHE$ 和 $\triangle CGE$ 中,
$$\begin{cases} \angle CHE = \angle CGE = 90^\circ \\ \angle ECG = \angle HCE \\ CE = CE \end{cases},$$

$\therefore \triangle CHE \cong \triangle CGE$ (AAS);

(3) 解: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$,

$\because DF$ 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OCA + \angle FCA = 90^\circ$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$,

$\therefore \angle FCA = \angle ABC$,

$\therefore \sin \angle ABC = \sin \angle FCA = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 设 $AC = \sqrt{3}a$, 则 $AB = 3a$,

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(3a)^2 - (\sqrt{3}a)^2} = \sqrt{6}a$,

$\because \angle FCA = \angle ABC$, $\angle AFC = \angle CFB$,

$\therefore \triangle ACF \sim \triangle CFB$,

$\therefore \frac{AF}{CF} = \frac{CF}{BF} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

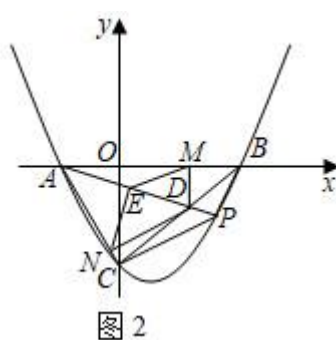
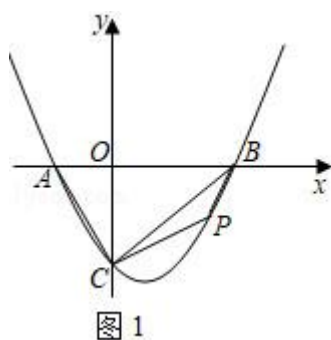
$\because AF = 1$,

$\therefore CF = \sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} \therefore BF &= \frac{(\sqrt{2})^2}{1} = 2, \\ \therefore BF - AF &= AB = 1, \\ \therefore OC &= \frac{1}{2}, \quad BC = \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ \therefore OE &\perp BC, \\ \therefore CH &= \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{6}}{6}, \\ \therefore OH &= \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \\ \therefore HE &= OE - OH = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \\ \therefore \triangle CHE &\cong \triangle CGE, \\ \therefore EG &= HE = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

【点评】 本题考查圆综合题、切线的判定和性质、垂径定理、相似三角形的判定和性质、勾股定理、锐角三角函数等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，正确寻找相似三角形解决问题．

24. (14分) 如图1，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴的负半轴交于点 C ，已知抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， B 、 C 两点的坐标分别为 $B(2\sqrt{3}, 0)$ ， $C(0, -3)$ ．点 P 为直线 BC 下方的抛物线上的一个动点（不与 B 、 C 两点重合）．



(1) 求此抛物线的解析式；

(2) 如图1，连接 PB 、 PC 得到 $\triangle PBC$ ，问是否存在着这样的点 P ，使得 $\triangle PBC$ 的面积最大？如果存在，求出面积的最大值和此时点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由．

(3) 如图2，连接 AP 交线段 BC 于点 D ，点 E 为线段 AD 的中点，过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M ， $DN \perp AC$ 于点 N ，连接 EM 、 EN ，则在点 P 的运动过程中， $\angle MEN$ 的大小是否

为定值？如果是，求出这个定值；如果不是，请说明理由．

【分析】 (1) 将点 $B(2\sqrt{3}, 0)$, $C(0, -3)$ 代入抛物线解析式，再结合 $-\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

联立即可求 a 、 b 、 c 的值；

(2) 设 $P(m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}m - 3)$ ，由 $S_{\triangle PBC} = S_{\text{四边形} OCPB} - S_{\triangle BOC}$ ，分别求出 $S_{\text{四边形} OCPB}$ 和 $S_{\triangle BOC}$ 的面积得到 $S_{\triangle PBC} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(m - \sqrt{3})^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，即可求 $\triangle PBC$ 面积的最大值；

(3) 先求出 $A(-\sqrt{3}, 0)$ ，在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $\tan \angle OAC = \frac{OC}{OA} = \sqrt{3}$ ，求出 $\angle MAC = 60^\circ$ ，由 $ME = NE = AE = DE$ ，可得点 M 、 A 、 D 、 N 在以 E 为圆心的圆上，由圆周角定理可得 $\angle MEN = 2\angle MAC = 120^\circ$ ．

【解答】 解：(1) $\because$ 对称轴为直线 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\because B(2\sqrt{3}, 0)$, $C(0, -3)$ 在抛物线上，

$$\therefore \begin{cases} 12a + 2\sqrt{3}b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x - 3;$$

(2) 存在点 P ，使得 $\triangle PBC$ 的面积最大，

$$\text{设 } P(m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}m - 3),$$

$$\text{连接 } OP, \text{ 则 } S_{\triangle POC} = \frac{1}{2} \times OC \times m = \frac{3}{2}m,$$

$$S_{\triangle POB} = \frac{1}{2} \times OB \times (-\frac{1}{2}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}m + 3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} OCPB} = S_{\triangle OPC} + S_{\triangle POB} = -\frac{\sqrt{3}}{2}m^2 + 3m + 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \times OC \times OB = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\text{四边形} OCPB} - S_{\triangle BOC} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(m - \sqrt{3})^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ 当 $m = \sqrt{3}$ 时， $\triangle PBC$ 的面积最大，最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，此时点 P 的坐标为 $(\sqrt{3}, -3)$ ；

(3) $\angle MEN$ 为定值.

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } \frac{1}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x - 3 = 0,$$

$$\text{解得 } x = -\sqrt{3} \text{ 或 } x = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore A(-\sqrt{3}, 0),$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOC \text{ 中, } \tan \angle OAC = \frac{OC}{OA} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle MAC = 60^\circ,$$

$\because DM \perp AB, DN \perp AC, E$ 是 AD 的中点,

$$\therefore ME = NE = AE = DE,$$

$\therefore$ 点 M, A, D, N 在以 E 为圆心的圆上,

由圆周角定理可得 $\angle MEN = 2\angle MAC = 120^\circ$,

$\therefore \angle MEN$ 为定值.

【点评】 本题考查二次函数的综合; 熟练掌握二次函数的图象及性质, 掌握待定系数法求函数解析式的方法, 结合直角三角形与圆的知识综合解题是关键.