

2019 年四川省凉山州中考数学试卷

一、选择题 (共 12 个小题, 每小题 4 分, 共 48 分) 在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的, 把正确选项的字母填涂在答题卡上相应的位置

1. (4 分) -2 的相反数是 ()

A. 2

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

2. (4 分) 2018 年凉山州生产总值约为 153300000000, 用科学记数法表示数 153300000000 是 ()

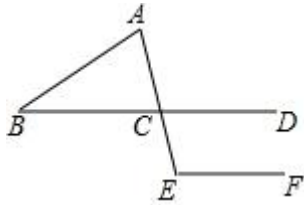
A. 1.533×10^9

B. 1.533×10^{10}

C. 1.533×10^{11}

D. 1.533×10^{12}

3. (4 分) 如图, $BD \parallel EF$, AE 与 BD 交于点 C , $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = 75^\circ$, 则 $\angle E$ 的度数为 ()



A. 135°

B. 125°

C. 115°

D. 105°

4. (4 分) 下列各式正确的是 ()

A. $2a^2 + 3a^2 = 5a^4$

B. $a^2 \cdot a = a^3$

C. $(a^2)^3 = a^5$

D. $\sqrt{a^2} = a$

5. (4 分) 不等式 $1 - x \geq x - 1$ 的解集是 ()

A. $x \geq 1$

B. $x \geq -1$

C. $x \leq 1$

D. $x \leq -1$

6. (4 分) 某班 40 名同学一周参加体育锻炼时间统计如表所示:

人数 (人)	3	17	13	7
时间 (小时)	7	8	9	10

那么该班 40 名同学一周参加体育锻炼时间的众数、中位数分别是 ()

A. 17, 8.5

B. 17, 9

C. 8, 9

D. 8, 8.5

7. (4 分) 下列命题: ①直线外一点到这条直线的垂线段, 叫做点到直线的距离; ②两点之间线段最短; ③相等的圆心角所对的弧相等; ④平分弦的直径垂直于弦. 其中, 真命题的个数是 ()

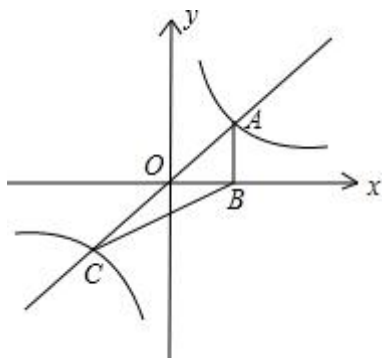
A. 1

B. 2

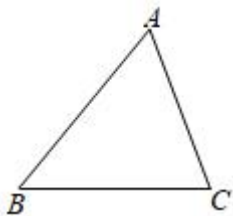
C. 3

D. 4

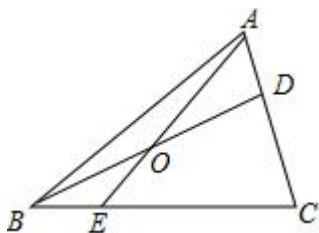
8. (4分) 如图, 正比例函数 $y=kx$ 与反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象相交于 A 、 C 两点, 过点 A 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 B , 连接 BC , 则 $\triangle ABC$ 的面积等于 ()



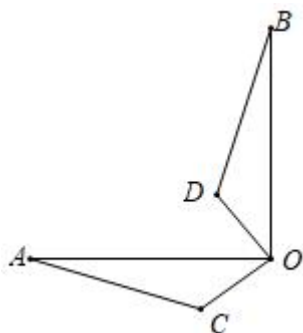
- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2
9. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $CA=CB=4$, $\cos C=\frac{1}{4}$, 则 $\sin B$ 的值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$
10. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 在 AC 边上, $AD:DC=1:2$, O 是 BD 的中点, 连接 AO 并延长交 BC 于 E , 则 $BE:EC=$ ()

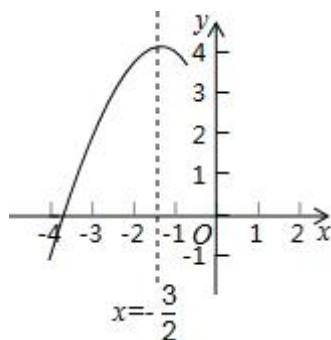


- A. 1: 2 B. 1: 3 C. 1: 4 D. 2: 3
11. (4分) 如图, 在 $\triangle AOC$ 中, $OA=3cm$, $OC=1cm$, 将 $\triangle AOC$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 后得到 $\triangle BOD$, 则 AC 边在旋转过程中所扫过的图形的面积为 () cm^2 .



- A. $\frac{\pi}{2}$ B. 2π C. $\frac{17}{8}\pi$ D. $\frac{19}{8}\pi$

12. (4分) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象如图所示, 有以下结论: ① $3a - b = 0$; ② $b^2 - 4ac > 0$; ③ $5a - 2b + c > 0$; ④ $4b + 3c > 0$, 其中错误结论的个数是 ()



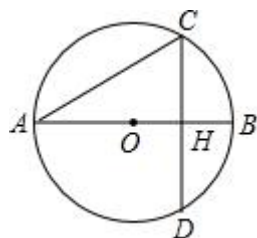
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题 (共5个小题, 每小题4分, 共20分)

13. (4分) 方程组 $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+y=16 \end{cases}$ 的解是_____.

14. (4分) 方程 $\frac{2x-1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2} = 1$ 的解是_____.

15. (4分) 如图所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$ 于 H , $\angle A = 30^\circ$, $CD = 2\sqrt{3}$, 则 $\odot O$ 的半径是_____.



16. (4分) 在 $\square ABCD$ 中, E 是 AD 上一点, 且点 E 将 AD 分为 2: 3 的两部分, 连接 BE , AC 相交于 F , 则 $S_{\triangle AEF} : S_{\triangle CBF}$ 是_____.

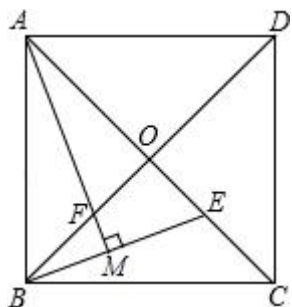
17. (4分) 将抛物线 $y = (x-3)^2 - 2$ 向左平移_____个单位后经过点 $A(2, 2)$.

三、解答题 (共5小题, 共32分)

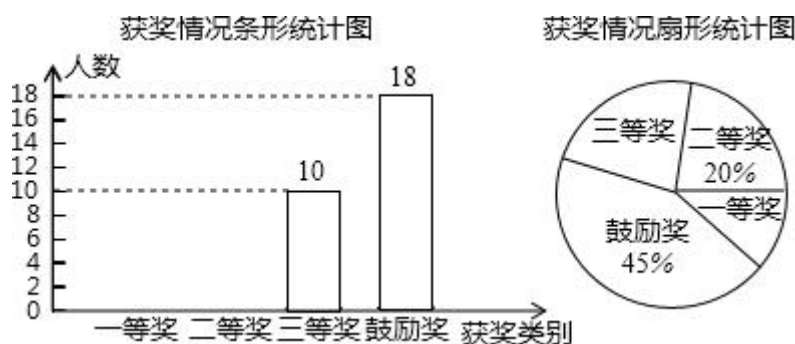
18. (5分) 计算: $\tan 45^\circ + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^0 - (-\frac{1}{2})^{-2} + |\sqrt{3} - 2|$.

19. (5分) 先化简, 再求值: $(a+3)^2 - (a+1)(a-1) - 2(2a+4)$, 其中 $a = -\frac{1}{2}$.

20. (6分) 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , E 是 OC 上一点, 连接 EB . 过点 A 作 $AM \perp BE$, 垂足为 M , AM 与 BD 相交于点 F . 求证: $OE = OF$.



21. (8分) 某校初中部举行诗词大会预选赛, 学校对参赛同学获奖情况进行统计, 绘制了如下两幅不完整的统计图. 请结合图中相关数据解答下列问题:



(1) 参加此次诗词大会预选赛的同学共有_____人;

(2) 在扇形统计图中, “三等奖”所对应的扇形的圆心角的度数为_____;

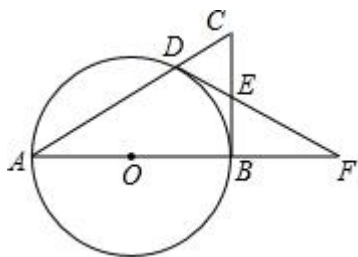
(3) 将条形统计图补充完整;

(4) 若获得一等奖的同学中有 $\frac{1}{4}$ 来自七年级, $\frac{1}{2}$ 来自九年级, 其余的来自八年级, 学校决定从获得一等奖的同学中任选两名同学参加全市诗词大会比赛, 请通过列表或树状图方法求所选两名同学中, 恰好是一名七年级和一名九年级同学的概率.

22. (8分) 如图, 点 D 是以 AB 为直径的 $\odot O$ 上一点, 过点 B 作 $\odot O$ 的切线, 交 AD 的延长线于点 C , E 是 BC 的中点, 连接 DE 并延长与 AB 的延长线交于点 F .

(1) 求证: DF 是 $\odot O$ 的切线;

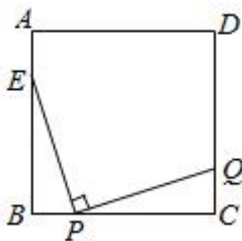
(2) 若 $OB = BF$, $EF = 4$, 求 AD 的长.



四、B卷填空题（共2小题，每小题5分，共10分）

23. (5分) 当 $0 \leq x \leq 3$ 时，直线 $y = a$ 与抛物线 $y = (x-1)^2 - 3$ 有交点，则 a 的取值范围是_____.

24. (5分) 如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB = 12$ ， $AE = \frac{1}{4}AB$ ，点 P 在 BC 上运动（不与 B 、 C 重合），过点 P 作 $PQ \perp EP$ ，交 CD 于点 Q ，则 CQ 的最大值为_____.



五、解答题（共4小题，共40分）

25. (8分) 已知二次函数 $y = x^2 + x + a$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$ 两点，且 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$ ，求 a 的值.

26. (10分) 根据有理数乘法（除法）法则可知：

①若 $ab > 0$ （或 $\frac{a}{b} > 0$ ），则 $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ ；

②若 $ab < 0$ （或 $\frac{a}{b} < 0$ ），则 $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 。

根据上述知识，求不等式 $(x-2)(x+3) > 0$ 的解集

解：原不等式可化为：(1) $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$ 或 (2) $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}$ 。

由 (1) 得， $x > 2$ ，

由 (2) 得， $x < -3$ ，

$\therefore$ 原不等式的解集为： $x < -3$ 或 $x > 2$ 。

请你运用所学知识，结合上述材料解答下列问题：

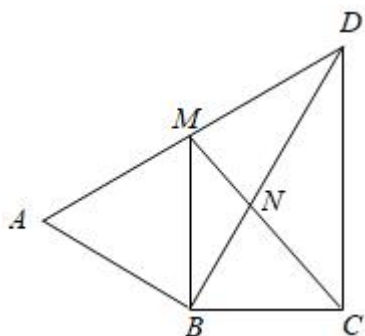
(1) 不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为_____.

(2) 求不等式 $\frac{x+4}{1-x} < 0$ 的解集 (要求写出解答过程)

27. (10 分) 如图, $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$, DB 平分 $\angle ADC$, 过点 B 作 $BM \parallel CD$ 交 AD 于 M . 连接 CM 交 DB 于 N .

(1) 求证: $BD^2 = AD \cdot CD$;

(2) 若 $CD = 6$, $AD = 8$, 求 MN 的长.

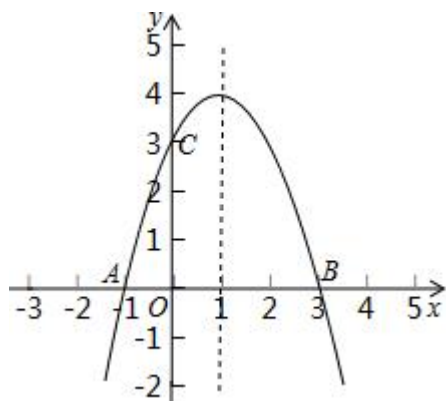


28. (12 分) 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在抛物线的对称轴上是否存在一点 P , 使得 $\triangle PAC$ 的周长最小, 若存在, 请求出点 P 的坐标及 $\triangle PAC$ 的周长; 若不存在, 请说明理由;

(3) 在 (2) 的条件下, 在 x 轴上方的抛物线上是否存在点 M (不与 C 点重合), 使得 $S_{\triangle PAM} = S_{\triangle PAC}$? 若存在, 请求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2019 年四川省凉山州中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 个小题，每小题 4 分，共 48 分）在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的，把正确选项的字母填涂在答题卡上相应的位置

1. (4 分) -2 的相反数是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【分析】根据相反数的意义，只有符号不同的数为相反数.

【解答】解：根据相反数的定义， -2 的相反数是 2.

故选：A.

【点评】本题考查了相反数的意义. 注意掌握只有符号不同的数为相反数，0 的相反数是 0.

2. (4 分) 2018 年凉山州生产总值约为 153300000000，用科学记数法表示数 153300000000 是 ()

- A. 1.533×10^9 B. 1.533×10^{10} C. 1.533×10^{11} D. 1.533×10^{12}

【分析】利用科学记数法表示即可

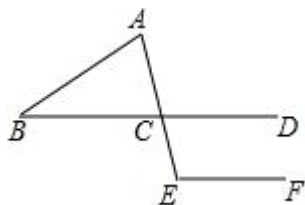
【解答】解：

科学记数法表示： $153\,300\,000\,000 = 1.533 \times 10^{11}$

故选：C.

【点评】本题主要考查科学记数法的表示，把一个数表示成 a 与 10 的 n 次幂相乘的形式 ($1 \leq a < 10$, n 为整数)，这种记数法叫做科学记数法.

3. (4 分) 如图， $BD \parallel EF$ ， AE 与 BD 交于点 C ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle A = 75^\circ$ ，则 $\angle E$ 的度数为 ()



- A. 135° B. 125° C. 115° D. 105°

【分析】直接利用三角形的外角性质得出 $\angle ACD$ 度数，再利用平行线的性质分析得出答案.

【解答】解： $\because \angle B = 30^\circ$ ， $\angle A = 75^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACD = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ,$$

$$\because BD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle E = \angle ACD = 105^\circ.$$

故选：D.

【点评】此题主要考查了平行线的性质以及三角形的外角，正确掌握平行线的性质是解题关键.

4. (4分) 下列各式正确的是 ()

A. $2a^2 + 3a^2 = 5a^4$

B. $a^2 \cdot a = a^3$

C. $(a^2)^3 = a^5$

D. $\sqrt{a^2} = a$

【分析】分别根据合并同类项的法则、同底数幂的乘法法则、幂的乘方法则以及二次根式的性质解答即可.

【解答】解：A、 $2a^2 + 3a^2 = 5a^2$ ，故选项A不合题意；

B、 $a^2 \cdot a = a^3$ ，故选项B符合题意；

C、 $(a^2)^3 = a^6$ ，故选项C不合题意；

D、 $\sqrt{a^2} = |a|$ ，故选项D不合题意.

故选：B.

【点评】本题主要考查了合并同类项的法则、幂的运算法则以及二次根式的性质，熟练掌握相关运算性质是解答本题的关键.

5. (4分) 不等式 $1 - x \geq x - 1$ 的解集是 ()

A. $x \geq 1$

B. $x \geq -1$

C. $x \leq 1$

D. $x \leq -1$

【分析】移项、合并同类项，系数化为1即可求解.

【解答】解： $1 - x \geq x - 1$,

$$-2x \geq -2$$

$$\therefore x \leq 1.$$

故选：C.

【点评】本题考查了解简单不等式的能力，解答这类题学生往往在解题时不注意移项要改变符号这一点而出错.

6. (4分) 某班40名同学一周参加体育锻炼时间统计如表所示：

人数 (人)	3	17	13	7
时间 (小时)	7	8	9	10

那么该班 40 名同学一周参加体育锻炼时间的众数、中位数分别是 ()

- A. 17, 8.5 B. 17, 9 C. 8, 9 D. 8, 8.5

【分析】 根据中位数、众数的概念分别求得这组数据的中位数、众数.

【解答】 解: 众数是一组数据中出现次数最多的数, 即 8;

由统计表可知, 处于 20, 21 两个数的平均数就是中位数,

$\therefore$ 这组数据的中位数为 $\frac{8+9}{2} = 8.5$;

故选: D.

【点评】 本题考查了中位数、众数的概念. 本题为统计题, 考查众数与中位数的意义, 中位数是将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数), 叫做这组数据的中位数.

7. (4 分) 下列命题: ①直线外一点到这条直线的垂线段, 叫做点到直线的距离; ②两点之间线段最短; ③相等的圆心角所对的弧相等; ④平分弦的直径垂直于弦. 其中, 真命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】 根据点到直线的距离, 线段的性质, 弧、弦、圆心角之间的关系以及垂径定理判断即可.

【解答】 解: ①直线外一点到这条直线的垂线段, 叫做点到直线的距离; 假命题;

②两点之间线段最短; 真命题;

③相等的圆心角所对的弧相等; 假命题;

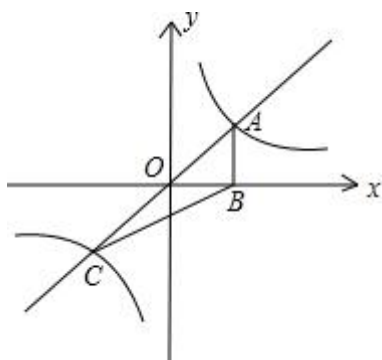
④平分弦的直径垂直于弦; 假命题;

真命题的个数是 1 个;

故选: A.

【点评】 本题考查了命题与定理: 判断一件事情的语句, 叫做命题. 许多命题都是由题设和结论两部分组成, 题设是已知事项, 结论是由已知事项推出的事项, 一个命题可以写成“如果…那么…”形式. 有些命题的正确性是用推理证实的, 这样的真命题叫做定理.

8. (4分) 如图, 正比例函数 $y=kx$ 与反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象相交于 A 、 C 两点, 过点 A 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 B , 连接 BC , 则 $\triangle ABC$ 的面积等于 ()



- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

【分析】 由于点 A 、 C 位于反比例函数图象上且关于原点对称, 则 $S_{\triangle OBA} = S_{\triangle OBC}$, 再根据反比例函数系数 k 的几何意义作答即可.

【解答】 解: 因为过双曲线上任意一点与原点所连的线段、坐标轴、向坐标轴作垂线所围成的直角三角形面积 S 是个定值,

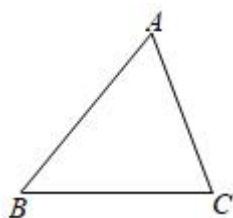
$$\text{即 } S = \frac{1}{2}|k|.$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积等于 $2 \times \frac{1}{2}|k| = |k| = 4$.

故选: C.

【点评】 主要考查了反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义, 即过双曲线上任意一点引 x 轴、 y 轴垂线, 所得矩形面积为 $|k|$, 是经常考查的一个知识点; 这里体现了数形结合的思想, 做此类题一定要正确理解 k 的几何意义. 图象上的点与原点所连的线段、坐标轴、向坐标轴作垂线所围成的直角三角形面积 S 的关系即 $S = \frac{1}{2}|k|$.

9. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $CA = CB = 4$, $\cos C = \frac{1}{4}$, 则 $\sin B$ 的值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

【分析】 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D , 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中可求出 AD , CD 的长, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$

中，利用勾股定理可求出 AB 的长，再利用正弦的定义可求出 $\sin B$ 的值.

【解答】解：过点 A 作 $AD \perp BC$ ，垂足为 D ，如图所示.

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $CD = CA \cdot \cos C = 1$,

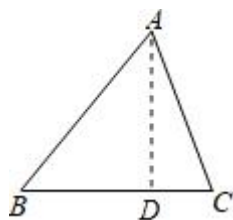
$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{15};$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $BD = CB - CD = 3$ ， $AD = \sqrt{15}$,

$$\therefore AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = 2\sqrt{6},$$

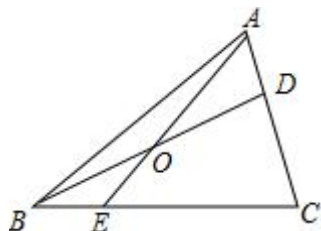
$$\therefore \sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

故选：D.



【点评】本题考查了解直角三角形以及勾股定理，通过解直角三角形及勾股定理，求出 AD ， AB 的长是解题的关键.

10. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 在 AC 边上， $AD:DC=1:2$ ， O 是 BD 的中点，连接 AO 并延长交 BC 于 E ，则 $BE:EC=$ ()



- A. 1: 2 B. 1: 3 C. 1: 4 D. 2: 3

【分析】过 O 作 BC 的平行线交 AC 于 G ，由中位线的知识可得出 $AD:DC=1:2$ ，根据已知和平行线分线段成比例得出 $AD=DG=GC$ ， $AG:GC=2:1$ ， $AO:OF=2:1$ ，再由同高不同底的三角形中底与三角形面积的关系可求出 $BE:FC$ 的比.

【解答】解：如图，过 O 作 $OG \parallel BC$ ，交 AC 于 G ，

$\therefore O$ 是 BD 的中点，

$\therefore G$ 是 DC 的中点.

又 $AD:DC=1:2$,

$$\therefore AD = DG = GC,$$

$$\therefore AG: GC = 2: 1, AO: OE = 2: 1,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB}: S_{\triangle BOE} = 2$$

设 $S_{\triangle BOE} = S$, $S_{\triangle AOB} = 2S$, 又 $BO = OD$,

$$\therefore S_{\triangle AOD} = 2S, S_{\triangle ABD} = 4S,$$

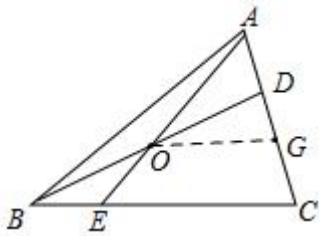
$$\therefore AD: DC = 1: 2,$$

$$\therefore S_{\triangle BDC} = 2S_{\triangle ABD} = 8S, S_{\text{四边形 } CDOE} = 7S,$$

$$\therefore S_{\triangle AEC} = 9S, S_{\triangle ABE} = 3S,$$

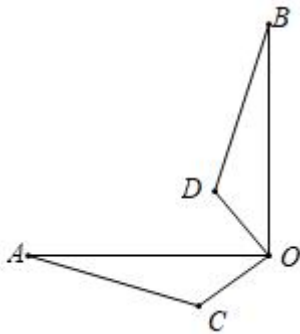
$$\therefore \frac{BE}{EC} = \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEC}} = \frac{3S}{9S} = \frac{1}{3}$$

故选: B.



【点评】本题考查平行线分线段成比例及三角形的中位线的知识, 难度较大, 注意熟练运用中位线定理和三角形面积公式.

11. (4 分) 如图, 在 $\triangle AOC$ 中, $OA = 3\text{cm}$, $OC = 1\text{cm}$, 将 $\triangle AOC$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 后得到 $\triangle BOD$, 则 AC 边在旋转过程中所扫过的图形的面积为 () cm^2 .



- A. $\frac{\pi}{2}$ B. 2π C. $\frac{17}{8}\pi$ D. $\frac{19}{8}\pi$

【分析】根据旋转的性质可以得到阴影部分的面积 = 扇形 OAB 的面积 - 扇形 OCD 的面积, 利用扇形的面积公式即可求解.

【解答】解: $\because \triangle AOC \cong \triangle BOD$,

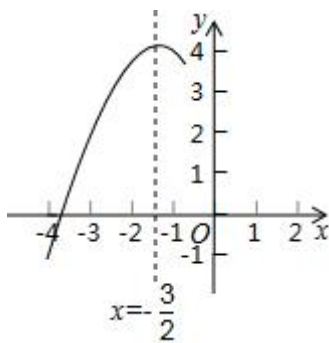
$$\therefore \text{阴影部分的面积} = \text{扇形 } OAB \text{ 的面积} - \text{扇形 } OCD \text{ 的面积} = \frac{90 \cdot \pi \times 3^2}{360} - \frac{90 \cdot \pi \times 1^2}{360}$$

$$= 2\pi,$$

故选: B.

【点评】 本题考查了旋转的性质以及扇形的面积公式, 正确理解: 阴影部分的面积 = 扇形 OAB 的面积 - 扇形 OCD 的面积是解题关键.

12. (4 分) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象如图所示, 有以下结论: ① $3a - b = 0$; ② $b^2 - 4ac > 0$; ③ $5a - 2b + c > 0$; ④ $4b + 3c > 0$, 其中错误结论的个数是 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】 ① 对称轴为 $x = -\frac{3}{2}$, 得 $b = 3a$;

② 函数图象与 x 轴有两个不同的交点, 得 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;

③ 当 $x = -1$ 时, $a - b + c > 0$, 当 $x = -3$ 时, $9a - 3b + c > 0$, 得 $5a - 2b + c > 0$;

④ 由对称性可知 $x = 1$ 时对应的 y 值与 $x = -4$ 时对应的 y 值相等, 当 $x = 1$ 时 $a + b + c < 0$, $4b + 3c = 3b + b + 3c = 3b + 3a + 3c = 3(a + b + c) < 0$;

【解答】 解: 由图象可知 $a < 0$, $c > 0$, 对称轴为 $x = -\frac{3}{2}$,

$$\therefore x = -\frac{3}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$\therefore b = 3a,$$

① 正确;

$\therefore$ 函数图象与 x 轴有两个不同的交点,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

② 正确;

当 $x = -1$ 时, $a - b + c > 0$,

当 $x = -3$ 时, $9a - 3b + c > 0$,

$$\therefore 10a - 4b + 2c > 0,$$

$$\therefore 5a - 2b + c > 0,$$

③正确;

由对称性可知 $x=1$ 时对应的 y 值与 $x=-4$ 时对应的 y 值相等,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时 $a+b+c<0$,

$\therefore b=3a$,

$\therefore 4b+3c=3b+b+3c=3b+3a+3c=3(a+b+c)<0$,

$\therefore 4b+3c<0$,

④错误;

故选: A.

【点评】 本题考查二次函数的图象及性质; 熟练掌握从函数图象获取信息, 将信息与函数解析式相结合解题是关键.

二、填空题 (共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

13. (4 分) 方程组 $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+y=16 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$.

【分析】 利用加减消元法解之即可.

【解答】 解: $\begin{cases} x+y=10 & \text{①} \\ 2x+y=16 & \text{②} \end{cases}$,

② - ①得:

$x=6$,

把 $x=6$ 代入①得:

$6+y=10$,

解得: $y=4$,

方程组的解为: $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$,

故答案为: $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$.

【点评】 本题考查了解二元一次方程组, 正确掌握加减消元法是解题的关键.

14. (4 分) 方程 $\frac{2x-1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2} = 1$ 的解是 $x = -2$.

【分析】 去分母, 把分式方程化为整式方程, 求解并验根即可.

【解答】 解: $\frac{2x-1}{x-1} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = 1$

去分母, 得 $(2x-1)(x+1) - 2 = (x+1)(x-1)$

去括号, 得 $2x^2+x-3 = x^2-1$

移项并整理, 得 $x^2+x-2=0$

所以 $(x+2)(x-1)=0$

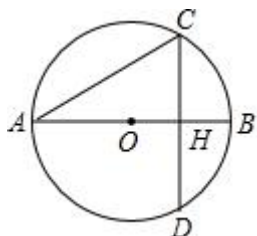
解得 $x=-2$ 或 $x=1$

经检验, $x=-2$ 是原方程的解.

故答案为: $x=-2$.

【点评】 本题考查了分式方程、一元二次方程的解法. 掌握分式方程的解法是解决本题的关键. 注意验根.

15. (4分) 如图所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$ 于 H , $\angle A = 30^\circ$, $CD = 2\sqrt{3}$, 则 $\odot O$ 的半径是 2.



【分析】 连接 BC , 由圆周角定理和垂径定理得出 $\angle ACB = 90^\circ$, $CH = DH = \frac{1}{2}CD = \sqrt{3}$, 由直角三角形的性质得出 $AC = 2CH = 2\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3}$, $AB = 2BC$, 得出 $BC = 2$, $AB = 4$, 求出 $OA = 2$ 即可.

【解答】 解: 连接 BC , 如图所示:

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$ 于 H ,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$, $CH = DH = \frac{1}{2}CD = \sqrt{3}$,

$\because \angle A = 30^\circ$,

$\therefore AC = 2CH = 2\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$,

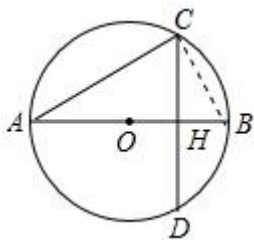
$\therefore AC = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3}$, $AB = 2BC$,

$\therefore BC = 2$, $AB = 4$,

$\therefore OA = 2$,

即 $\odot O$ 的半径是 2;

故答案为: 2.



【点评】 本题考查的是垂径定理、圆周角定理、含 30° 角的直角三角形的性质、勾股定理等知识；熟练掌握圆周角定理和垂径定理是解题的关键.

16. (4 分) 在 $\square ABCD$ 中, E 是 AD 上一点, 且点 E 将 AD 分为 $2:3$ 的两部分, 连接 BE 、 AC 相交于 F , 则 $S_{\triangle AEF}: S_{\triangle CBF}$ 是 4: 25 或 9: 25.

【分析】 分 $AE: ED=2: 3$ 、 $AE: ED=3: 2$ 两种情况, 根据相似三角形的性质计算即可.

【解答】 解: ①当 $AE: ED=2: 3$ 时,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AE: BC=2: 5$,

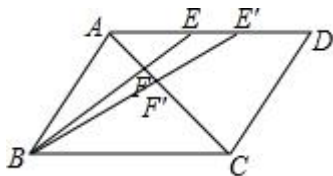
$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CBF$,

$\therefore S_{\triangle AEF}: S_{\triangle CBF} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 4: 25$;

②当 $AE: ED=3: 2$ 时,

同理可得, $S_{\triangle AEF}: S_{\triangle CBF} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 9: 25$,

故答案为: $4: 25$ 或 $9: 25$.



【点评】 本题考查的是相似三角形的判定和性质、平行四边形的性质, 掌握相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的关键.

17. (4 分) 将抛物线 $y = (x-3)^2 - 2$ 向左平移 3 个单位后经过点 $A(2, 2)$.

【分析】 直接利用二次函数的平移规律结合二次函数图象上点的性质进而得出答案.

【解答】 解: $\because$ 将抛物线 $y = (x-3)^2 - 2$ 向左平移后经过点 $A(2, 2)$,

$\therefore$ 设平移后解析式为: $y = (x-3+a)^2 - 2$,

则 $2 = (2-3+a)^2 - 2$,

解得: $a=3$ 或 $a=-1$ (不合题意舍去),

故将抛物线 $y = (x-3)^2 - 2$ 向左平移 3 个单位后经过点 $A(2, 2)$.

故答案为：3.

【点评】此题主要考查了二次函数图象与几何变换，正确记忆平移规律是解题关键.

三、解答题（共5小题，共32分）

18. (5分) 计算： $\tan 45^\circ + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^0 - (-\frac{1}{2})^{-2} + |\sqrt{3} - 2|$.

【分析】分别进行特殊角的三角函数值的运算，任何非零数的零次幂等于1，负整数指数幂以及绝对值的意义化简，然后按照实数的运算法则进行计算求得结果.

【解答】解：原式 $= 1 + 1 - 2 + (2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$.

【点评】本题考查了实数的运算法则，属于基础题，解答本题的关键是熟练掌握负整数指数幂、特殊角的三角函数值等知识.

19. (5分) 先化简，再求值： $(a+3)^2 - (a+1)(a-1) - 2(2a+4)$ ，其中 $a = -\frac{1}{2}$.

【分析】注意到 $(a+3)^2$ 可以利用完全平方公式进行展开， $(a+1)(a-1)$ 利用平方差公式可化为 $(a^2 - 1)$ ，则将各项合并即可化简，最后代入 $a = -\frac{1}{2}$ 进行计算.

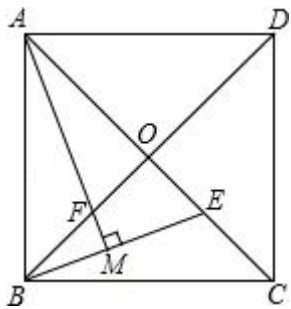
【解答】解：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a^2 + 6a + 9 - (a^2 - 1) - 4a - 8 \\ &= 2a + 2 \end{aligned}$$

将 $a = -\frac{1}{2}$ 代入原式 $= 2 \times (-\frac{1}{2}) + 2 = 1$

【点评】本题主要考查整式的混合运算，灵活运用两条乘法公式：完全平方公式和平方差公式是解题的关键，同时，在去括号的过程中要注意括号前的符号，若为负号，去括号后，括号里面的符号要改变

20. (6分) 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， E 是 OC 上一点，连接 EB . 过点 A 作 $AM \perp BE$ ，垂足为 M ， AM 与 BD 相交于点 F . 求证： $OE = OF$.



【分析】根据正方形的性质对角线垂直且平分，得到 $OB = OA$ ，根据 $AM \perp BE$ ，即可得出 $\angle MEA + \angle MAE = 90^\circ = \angle AFO + \angle MAE$ ，从而证出 $\text{Rt} \triangle BOE \cong \text{Rt} \triangle AOF$ ，得到 $OE = OF$.

【解答】证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

$$\therefore \angle BOE = \angle AOF = 90^\circ, \quad OB = OA.$$

又∵ $AM \perp BE$,

$$\therefore \angle MEA + \angle MAE = 90^\circ = \angle AFO + \angle MAE,$$

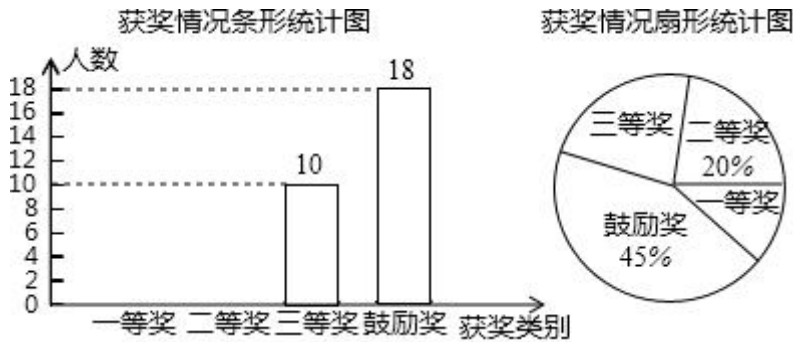
$$\therefore \angle MEA = \angle AFO.$$

$$\therefore \triangle BOE \cong \triangle AOF \quad (\text{AAS}).$$

$$\therefore OE = OF.$$

【点评】 本题主要考查了正方形的性质、三角形全等的性质和判定，在应用全等三角形的判定时，要注意三角形间的公共边和公共角，必要时添加适当辅助线构造三角形.

21. (8分) 某校初中部举行诗词大会预选赛，学校对参赛同学获奖情况进行统计，绘制了如下两幅不完整的统计图. 请结合图中相关数据解答下列问题:



(1) 参加此次诗词大会预选赛的同学共有 40 人;

(2) 在扇形统计图中, “三等奖”所对应的扇形的圆心角的度数为 90° ;

(3) 将条形统计图补充完整;

(4) 若获得一等奖的同学中有 $\frac{1}{4}$ 来自七年级, $\frac{1}{2}$ 来自九年级, 其余的来自八年级, 学校决定从获得一等奖的同学中任选两名同学参加全市诗词大会比赛, 请通过列表或树状图方法求所选两名同学中, 恰好是一名七年级和一名九年级同学的概率.

【分析】(1) 利用鼓励奖的人数除以它所占的百分比得到的总人数;

(2) 用 360° 乘以二等奖人数占被调查人数的比例即可得;

(3) 计算出一等奖和二等奖的人数, 然后补全条形统计图;

(4) 画树状图 (用 A 、 B 、 C 分别表示七年级、八年级和九年级的学生) 展示所有 12 种等可能的结果数, 再找出所选出的两人中既有七年级又有九年级同学的结果数, 然后利用概率公式求解.

【解答】解：（1）参加此次诗词大会预选赛的同学共有 $18 \div 45\% = 40$ （人），

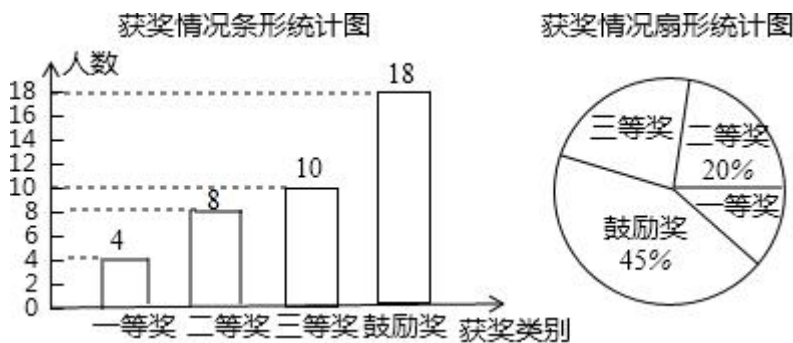
故答案为：40；

（2）扇形统计图中获三等奖的圆心角为 $360^\circ \times \frac{10}{40} = 90^\circ$ ，

故答案为： 90° ．

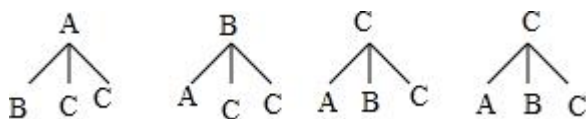
（3）获二等奖的人数 = $40 \times 20\% = 8$ ，一等奖的人数为 $40 - 8 - 10 - 18 = 4$ （人），

条形统计图为：



（4）由题意知，获一等奖的学生中，七年级有 1 人，八年级有 1 人，九年级有 2 人，

画树状图为：（用 A、B、C 分别表示七年级、八年级和九年级的学生）



共有 12 种等可能的结果数，其中所选出的两人中既有七年级又有九年级同学的结果数为 4，

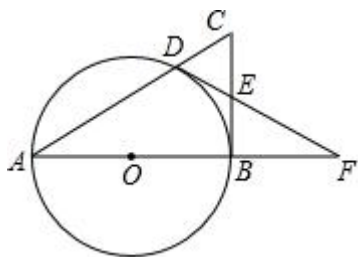
所以所选出的两人中既有七年级又有九年级同学的概率 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ．

【点评】本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式求事件 A 或 B 的概率．也考查了统计图．

22. （8 分）如图，点 D 是以 AB 为直径的 $\odot O$ 上一点，过点 B 作 $\odot O$ 的切线，交 AD 的延长线于点 C ， E 是 BC 的中点，连接 DE 并延长与 AB 的延长线交于点 F ．

（1）求证： DF 是 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $OB = BF$ ， $EF = 4$ ，求 AD 的长．



【分析】 (1) 连接 OD , 由 AB 为 $\odot O$ 的直径得 $\angle BDC = 90^\circ$, 根据 $BE = EC$ 知 $\angle 1 = \angle 3$, 由 $OD = OB$ 知 $\angle 2 = \angle 4$, 根据 BC 是 $\odot O$ 的切线得 $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$, 即 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, 得证;

(2) 根据直角三角形的性质得到 $\angle F = 30^\circ$, $BE = \frac{1}{2}EF = 2$, 求得 $DE = BE = 2$, 得到 $DF = 6$, 根据三角形的内角和得到 $OD = OA$, 求得 $\angle A = \angle ADO = \frac{1}{2}\angle BOD = 30^\circ$, 根据等腰三角形的性质即可得到结论.

【解答】 解: (1) 如图, 连接 OD , BD ,

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB = \angle BDC = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, $\because BE = EC$,

$\therefore DE = EC = BE$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$,

又 $\because \angle 2 = \angle 4$,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$,

$\therefore DF$ 为 $\odot O$ 的切线;

(2) $\because OB = BF$,

$\therefore OF = 2OD$,

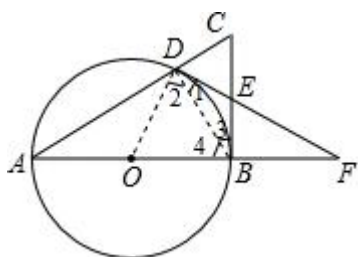
$\therefore \angle F = 30^\circ$,

$\therefore \angle FBE = 90^\circ$,

$\therefore BE = \frac{1}{2}EF = 2$,

$\therefore DE = BE = 2$,

$$\begin{aligned}
&\therefore DF=6, \\
&\because \angle F=30^{\circ}, \quad \angle ODF=90^{\circ}, \\
&\therefore \angle FOD=60^{\circ}, \\
&\because OD=OA, \\
&\therefore \angle A=\angle ADO=\frac{1}{2}\angle BOD=30^{\circ}, \\
&\therefore \angle A=\angle F, \\
&\therefore AD=DF=6.
\end{aligned}$$



【点评】本题考查了切线的判定和性质，直角三角形的性质，等腰三角形的判定和性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

四、B 卷填空题 (共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

23. (5 分) 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 直线 $y=a$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 有交点, 则 a 的取值范围是 $-3 \leq a \leq 1$.

【分析】直线 $y=a$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 有交点, 则可化为一元二次方程组利用根的判别式进行计算.

【解答】解:

法一: $y=a$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 有交点

则有 $a=(x-1)^2-3$, 整理得 $x^2-2x-2-a=0$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4(2+a) \geq 0$$

解得 $a \geq -3$,

$$\because 0 \leq x \leq 3, \text{ 对称轴 } x=1$$

$$\therefore y = (3-1)^2 - 3 = 1$$

$$\therefore a \leq 1$$

法二: 由题意可知,

$\therefore$ 抛物线的顶点为 $(1, -3)$, 而 $0 \leq x \leq 3$

$\therefore$ 抛物线 y 的取值为 $-3 \leq y \leq 1$

$\because y=a$, 则直线 y 与 x 轴平行,

$\therefore$ 要使直线 $y=a$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 有交点,

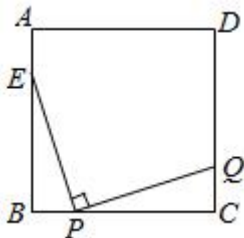
$\therefore$ 抛物线 y 的取值为 $-3 \leq y \leq 1$, 即为 a 的取值范围,

$\therefore -3 \leq a \leq 1$

故答案为: $-3 \leq a \leq 1$

【点评】 此题主要考查二次函数图象的性质及交点的问题, 此类问题, 通常可化为一元二次方程, 利用根的判别式或根与系数的关系进行计算.

24. (5分) 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $AB=12$, $AE=\frac{1}{4}AB$, 点 P 在 BC 上运动 (不与 B 、 C 重合), 过点 P 作 $PQ \perp EP$, 交 CD 于点 Q , 则 CQ 的最大值为 4.



【分析】 先证明 $\triangle BPE \sim \triangle CQP$, 得到与 CQ 有关的比例式, 设 $CQ=y$, $BP=x$, 则 $CP=12-x$, 代入解析式, 得到 y 与 x 的二次函数式, 根据二次函数的性质可求最值.

【解答】 解: $\because \angle BEP + \angle BPE = 90^\circ$, $\angle QPC + \angle BPE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEP = \angle CPQ$.

又 $\angle B = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \triangle BPE \sim \triangle CQP$.

$$\therefore \frac{BE}{PC} = \frac{BP}{CQ}.$$

设 $CQ=y$, $BP=x$, 则 $CP=12-x$.

$$\therefore \frac{9}{12-x} = \frac{x}{y}, \text{ 化简得 } y = -\frac{1}{9}(x^2 - 12x),$$

$$\text{整理得 } y = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4,$$

所以当 $x=6$ 时, y 有最大值为 4.

故答案为 4.

【点评】 本题主要考查了正方形的性质、相似三角形的判定和性质, 以及二次函数最值问题, 几何最值用二次函数最值求解考查了数形结合思想.

五、解答题 (共 4 小题, 共 40 分)

25. (8分) 已知二次函数 $y = x^2 + x + a$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$ 两点, 且 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$, 求 a 的值.

【分析】有韦达定理得 $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 \cdot x_2 = a$, 将式子 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$ 化简代入即可;

【解答】解: $y = x^2 + x + a$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$ 两点,

$$\therefore x_1 + x_2 = -1, \quad x_1 \cdot x_2 = a,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{1 - 2a}{a^2} = 1,$$

$$\therefore a = -1 + \sqrt{2} \text{ 或 } a = -1 - \sqrt{2};$$

【点评】本题考查二次函数的性质; 灵活运用完全平方公式, 掌握根与系数的关系是解题的关键.

26. (10分) 根据有理数乘法(除法)法则可知:

$$\textcircled{1} \text{ 若 } ab > 0 \text{ (或 } \frac{a}{b} > 0 \text{), 则 } \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases};$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } ab < 0 \text{ (或 } \frac{a}{b} < 0 \text{), 则 } \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

根据上述知识, 求不等式 $(x-2)(x+3) > 0$ 的解集

$$\text{解: 原不等式可化为: (1) } \begin{cases} x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \text{ 或 (2) } \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}.$$

由 (1) 得, $x > 2$,

由 (2) 得, $x < -3$,

$\therefore$ 原不等式的解集为: $x < -3$ 或 $x > 2$.

请你运用所学知识, 结合上述材料解答下列问题:

(1) 不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为 $-1 < x < 3$.

(2) 求不等式 $\frac{x+4}{1-x} < 0$ 的解集 (要求写出解答过程)

【分析】(1) 根据有理数乘法运算法则可得出不等式组, 仿照有理数乘法运算法则得出两个不等式组, 分别求解可得.

(2) 根据有理数除法运算法则可得出不等式组, 仿照有理数除法运算法则得出两个不等式

组, 分别求解可得.

【解答】解: (1) 原不等式可化为: ① $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} x-3 < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$.

由①得, 空集,

由②得, $-1 < x < 3$,

$\therefore$ 原不等式的解集为: $-1 < x < 3$,

故答案为: $-1 < x < 3$.

(2) 由 $\frac{x+4}{1-x} < 0$ 知 ① $\begin{cases} x+4 > 0 \\ 1-x < 0 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} x+4 < 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$,

解不等式组①, 得: $x > 1$;

解不等式组②, 得: $x < -4$;

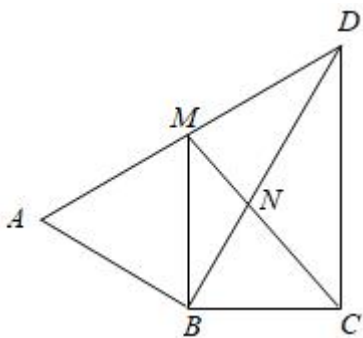
所以不等式 $\frac{x+4}{1-x} < 0$ 的解集为 $x > 1$ 或 $x < -4$.

【点评】 本题主要考查解不等式、不等式组的能力, 将原不等式转化为两个不等式组是解题的关键.

27. (10分) 如图, $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$, DB 平分 $\angle ADC$, 过点 B 作 $BM \parallel CD$ 交 AD 于 M . 连接 CM 交 DB 于 N .

(1) 求证: $BD^2 = AD \cdot CD$;

(2) 若 $CD=6$, $AD=8$, 求 MN 的长.



【分析】 (1) 通过证明 $\triangle ABD \sim \triangle BCD$, 可得 $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$, 可得结论;

(2) 由平行线的性质可证 $\angle MBD = \angle BDC$, 即可证 $AM = MD = MB = 4$, 由 $BD^2 = AD \cdot CD$ 和勾股定理可求 MC 的长, 通过证明 $\triangle MNB \sim \triangle CND$, 可得 $\frac{BM}{CD} = \frac{MN}{CN} = \frac{2}{3}$, 即可求 MN 的长.

【解答】 证明: (1) $\because DB$ 平分 $\angle ADC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle CDB, \text{ 且 } \angle ABD = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BCD$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot CD$$

$$(2) \because BM \parallel CD$$

$$\therefore \angle MBD = \angle BDC$$

$$\therefore \angle ADB = \angle MBD, \text{ 且 } \angle ABD = 90^\circ$$

$$\therefore BM = MD, \angle MAB = \angle MBA$$

$$\therefore BM = MD = AM = 4$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot CD, \text{ 且 } CD = 6, AD = 8,$$

$$\therefore BD^2 = 48,$$

$$\therefore BC^2 = BD^2 - CD^2 = 12$$

$$\therefore MC^2 = MB^2 + BC^2 = 28$$

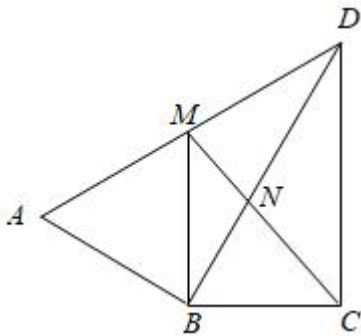
$$\therefore MC = 2\sqrt{7}$$

$$\because BM \parallel CD$$

$$\therefore \triangle MNB \sim \triangle CND$$

$$\therefore \frac{BM}{CD} = \frac{MN}{CN} = \frac{2}{3}, \text{ 且 } MC = 2\sqrt{7}$$

$$\therefore MN = \frac{4}{5}\sqrt{7}$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，勾股定理，直角三角形的性质，求 MC 的长度是本题的关键.

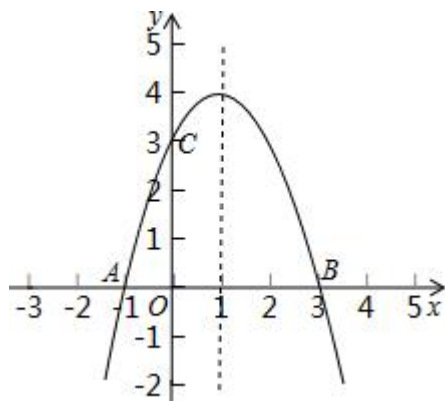
28. (12 分) 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在抛物线的对称轴上是否存在一点 P ，使得 $\triangle PAC$ 的周长最小，若存在，请求出点

P 的坐标及 $\triangle PAC$ 的周长；若不存在，请说明理由；

(3) 在 (2) 的条件下，在 x 轴上方的抛物线上是否存在点 M (不与 C 点重合)，使得 $S_{\triangle PAM} = S_{\triangle PAC}$ ？若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。



【分析】 (1) 由于条件给出抛物线与 x 轴的交点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，故可设交点式 $y = a(x+1)(x-3)$ ，把点 C 代入即求得 a 的值，减小计算量。

(2) 由于点 A 、 B 关于对称轴：直线 $x=1$ 对称，故有 $PA=PB$ ，则 $C_{\triangle PAC} = AC+PC+PA = AC+PC+PB$ ，所以当 C 、 P 、 B 在同一直线上时， $C_{\triangle PAC} = AC+CB$ 最小。利用点 A 、 B 、 C 的坐标求 AC 、 CB 的长，求直线 BC 解析式，把 $x=1$ 代入即求得点 P 纵坐标。

(3) 由 $S_{\triangle PAM} = S_{\triangle PAC}$ 可得，当两三角形以 PA 为底时，高相等，即点 C 和点 M 到直线 PA 距离相等。又因为 M 在 x 轴上方，故有 $CM \parallel PA$ 。由点 A 、 P 坐标求直线 AP 解析式，即得到直线 CM 解析式。把直线 CM 解析式与抛物线解析式联立方程组即求得点 M 坐标。

【解答】 解：(1) $\because$ 抛物线与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$

$\therefore$ 可设交点式 $y = a(x+1)(x-3)$

把点 $C(0, 3)$ 代入得： $-3a = 3$

$\therefore a = -1$

$\therefore y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) 在抛物线的对称轴上存在一点 P ，使得 $\triangle PAC$ 的周长最小。

如图 1，连接 PB 、 BC

$\because$ 点 P 在抛物线对称轴直线 $x=1$ 上，点 A 、 B 关于对称轴对称

$\therefore PA = PB$

$\therefore C_{\triangle PAC} = AC + PC + PA = AC + PC + PB$

∴当 C 、 P 、 B 在同一直线上时, $PC+PB=CB$ 最小

∴ $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$

$$\therefore AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \quad BC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore C_{\triangle PAC} = AC + CB = \sqrt{10} + 3\sqrt{2} \text{ 最小}$$

设直线 BC 解析式为 $y = kx + 3$

把点 B 代入得: $3k + 3 = 0$, 解得: $k = -1$

∴直线 BC : $y = -x + 3$

$$\therefore y_P = -1 + 3 = 2$$

∴点 $P(1, 2)$ 使 $\triangle PAC$ 的周长最小, 最小值为 $\sqrt{10} + 3\sqrt{2}$.

(3) 存在满足条件的点 M , 使得 $S_{\triangle PAM} = S_{\triangle PAC}$.

$$\therefore S_{\triangle PAM} = S_{\triangle PAC}$$

∴当以 PA 为底时, 两三角形等高

∴点 C 和点 M 到直线 PA 距离相等

∴ M 在 x 轴上方

$$\therefore CM \parallel PA$$

∴ $A(-1, 0)$, $P(1, 2)$, 设直线 AP 解析式为 $y = px + d$

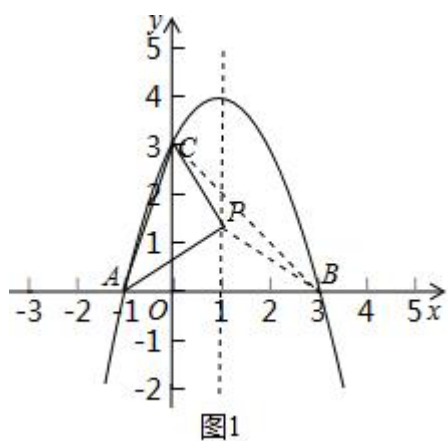
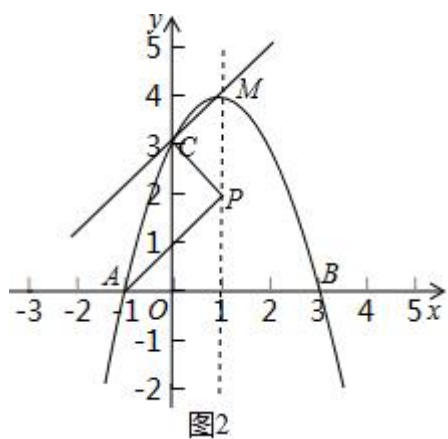
$$\therefore \begin{cases} -p + d = 0 \\ p + d = 2 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} p = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

∴直线 AP : $y = x + 1$

∴直线 CM 解析式为: $y = x + 3$

$$\therefore \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad (\text{即点 } C), \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

∴点 M 坐标为 $(1, 4)$



【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式、一次函数解析式，轴对称的最短路径问题，勾股定理，平行线间距离处处相等，一元二次方程的解法．其中第（3）题条件给出点 M 在 x 轴上方，无需分类讨论，解法较常规而简单．

积分超值换

活动时间：2019年4月23日-6月30日

活动对象：中小学一线教师以及教育工作者



扫一扫 换礼啦

积 分 兑 换 更 超 值



会员升级服务第一拨 · 清北季



神马，有清华北大学霸方法论课；还有清华学霸向所有的父母亲述自己求学之路；

衡水名校试卷悄悄的上线了；

扫qq领取官网不首发课程，很多人我没告诉他啊！

会员qq专享等你来撩.....