

2019 年四川内江市中考数学试卷

一、选择题 (每小题 3 分, 共 36 分.)

1. $-\frac{1}{6}$ 的相反数是 ()

A. 6

B. -6

C. $\frac{1}{6}$

D. $-\frac{1}{6}$

2. -268000 用科学记数法表示为 ()

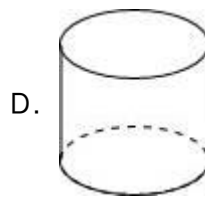
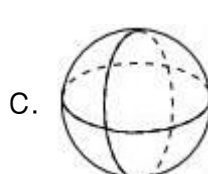
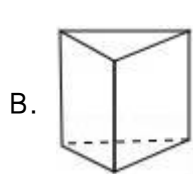
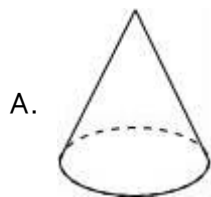
A. -268×10^3

B. -268×10^4

C. -26.8×10^4

D. -2.68×10^5

3. 下列几何体中, 主视图为三角形的是 ()



4. 下列事件为必然事件的是 ()

A. 袋中有 4 个蓝球, 2 个绿球, 共 6 个球, 随机摸出一个球是红球

B. 三角形的内角和为 180°

C. 打开电视机, 任选一个频道, 屏幕上正在播放广告

D. 抛掷一枚硬币两次, 第一次正面向上, 第二次反面向上

5. 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



6. 下列运算正确的是 ()

A. $m^2 \cdot m^3 = m^6$

B. $(m^4)^2 = m^6$

C. $m^3 + m^3 = 2m^3$

D. $(m - n)^2 = m^2 - n^2$

7. 在函数 $y = \frac{1}{x+3} + \sqrt{4-x}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 ()

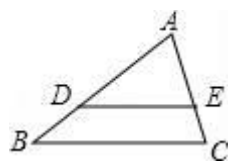
A. $x < 4$

B. $x \geq 4$ 且 $x \neq -3$

C. $x > 4$

D. $x \leq 4$ 且 $x \neq -3$

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $AD = 9$, $DB = 3$, $CE = 2$, 则 AC 的长为 ()



A. 6

B. 7

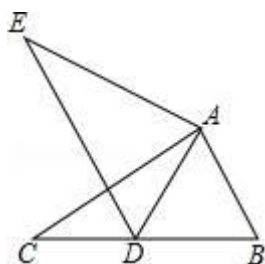
C. 8

D. 9

9. 一个等腰三角形的底边长是 6，腰长是一元二次方程 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 的一根，则此三角形的周长是 ()

A. 16 B. 12 C. 14 D. 12 或 16

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2$ ， $BC = 3.6$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转度得到 $\triangle ADE$ ，当点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 边上时，则 CD 的长为 ()

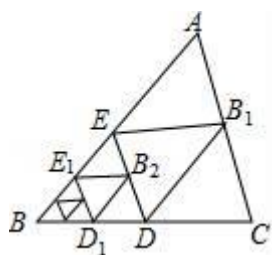


A. 1.6 B. 1.8 C. 2 D. 2.6

11. 若关于 x 的代等式组 $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} > 0 \\ 3x+5a+4 > 4(x+1)+3a \end{cases}$ 恰有三个整数解，则 a 的取值范围是 ()

A. $1 \leq a < \frac{3}{2}$ B. $1 < a \leq \frac{3}{2}$ C. $1 < a < \frac{3}{2}$ D. $a \leq 1$ 或 $a > \frac{3}{2}$

12. 如图，将 $\triangle ABC$ 沿着过 BC 的中点 D 的直线折叠，使点 B 落在 AC 边上的 B_1 处，称为第一次操作，折痕 DE 到 AC 的距离为 h_1 ；还原纸片后，再将 $\triangle BDE$ 沿着过 BD 的中点 D_1 的直线折叠，使点 B 落在 DE 边上的 B_2 处，称为第二次操作，折痕 D_1E_1 到 AC 的距离记为 h_2 ；按上述方法不断操作下去……经过第 n 次操作后得到折痕 $D_{n-1}E_{n-1}$ ，到 AC 的距离记为 h_n 。若 $h_1 = 1$ ，则 h_n 的值为 ()



A. $1 + \frac{1}{2^{n-1}}$ B. $1 + \frac{1}{2^n}$ C. $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ D. $2 - \frac{1}{2^n}$

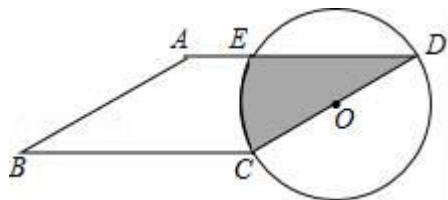
二、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.)

13. (5 分) 分解因式: $xy^2 - 2xy + x = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. (5 分) 一组数据为 0, 1, 2, 3, 4, 则这组数据的方差是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. (5分) 若 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$, 则分式 $\frac{5m+5n-2mn}{-m-n}$ 的值为_____.

16. (5分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB < AD$, $\angle A = 150^\circ$, $CD = 4$, 以 CD 为直径的 $\odot O$ 交 AD 于点 E , 则图中阴影部分的面积为_____.



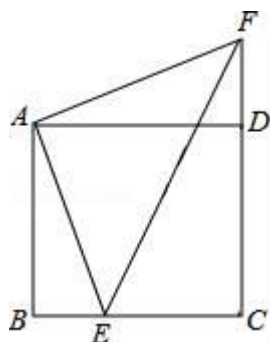
三、解題 (本大題共 5 小題, 共 4 分. 解答應寫出必要的文字說明或推演步驟.)

17. (7分) 計算: $(-1)^{2019} + (-\frac{1}{2})^{-2} + |\sqrt{3} - 2| + 3\tan 30^\circ$.

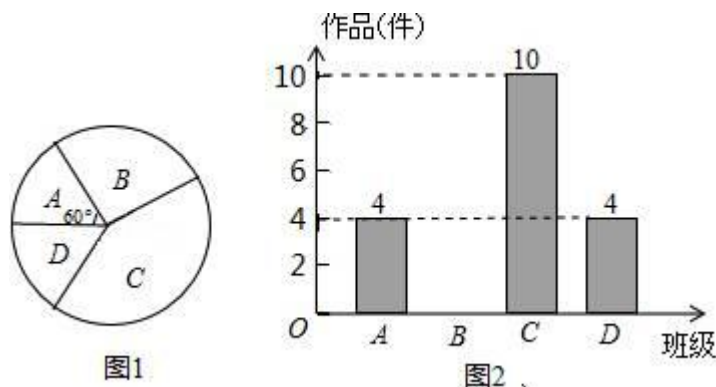
18. (9分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 是 BC 上的一点, 点 F 是 CD 延长线上的一点, 且 $BE = DF$, 连结 AE 、 AF 、 EF .

(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle ADF$;

(2) 若 $AE = 5$, 请求出 EF 的长.



19. (9分) “大千故里, 文化内江”, 我市某中学为传承大千艺术精神, 征集学生书画作品. 王老师从全校 20 个班中随机抽取了 A 、 B 、 C 、 D 4 个班, 对征集作品进行了数量分析统计, 绘制了如下两幅不完整的统计图.



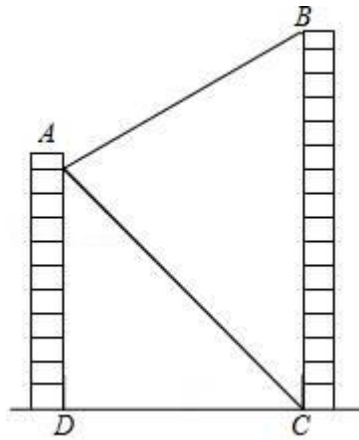
(1) 王老师采取的调查方式是_____ (填“普查”或“抽样调查”), 王老师所调查的

4 个班共征集到作品_____件，并补全条形统计图；

(2) 在扇形统计图中，表示 C 班的扇形周心角的度数为_____；

(3) 如果全校参展作品中有 4 件获得一等奖，其中有 1 名作者是男生，3 名作者是女生。现要从获得一等奖的作者中随机抽取两人去参加学校的总结表彰座谈会，求恰好抽中一男一女的概率。（要求用树状图或列表法写出分析过程）

20. (9 分) 如图，两座建筑物 DA 与 CB，其中 CB 的高为 120 米，从 DA 的顶点 A 测得 CB 顶部 B 的仰角为 30° ，测得其底部 C 的俯角为 45° ，求这两座建筑物的地面距离 DC 为多少米？（结果保留根号）

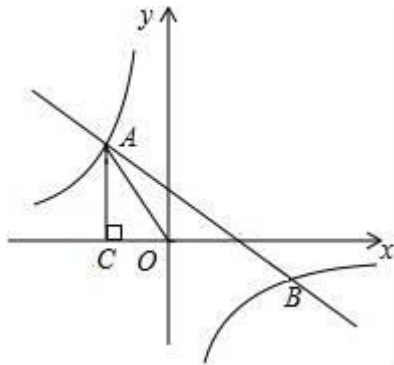


21. (10 分) 如图，一次函数 $y = mx + n$ ($m \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象交于第二、四象限内的点 A ($a, 4$) 和点 B ($8, b$)。过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为点 C， $\triangle AOC$ 的面积为 4。

(1) 分别求出 a 和 b 的值；

(2) 结合图象直接写出 $mx + n < \frac{k}{x}$ 的解集；

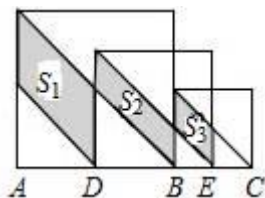
(3) 在 x 轴上取点 P，使 PA - PB 取得最大值时，求出点 P 的坐标。



四、填空题（本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分。）

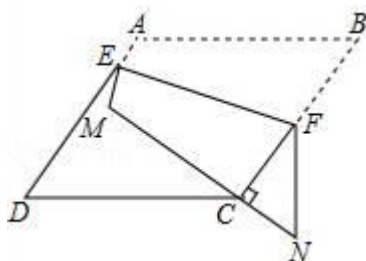
22. (6分) 若 $|1001 - a| + \sqrt{a - 1002} = a$, 则 $a - 1001^2 =$ _____.

23. (6分) 如图, 点 A 、 B 、 C 在同一直线上, 且 $AB = \frac{2}{3}AC$, 点 D 、 E 分别是 AB 、 BC 的中点, 分别以 AB 、 DE 、 BC 为边, 在 AC 同侧作三个正方形, 得到三个平行四边形 (阴影部分) 的面积分别记作 S_1 、 S_2 、 S_3 , 若 $S_1 = \sqrt{5}$, 则 $S_2 + S_3 =$ _____.



24. (6分) 若 x 、 y 、 z 为实数, 且 $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$, 则代数式 $x^2 - 3y^2 + z^2$ 的最大值是 _____.

25. (6分) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\sin B = \frac{4}{5}$, 点 E 、 F 分别在边 AD 、 BC 上, 将四边形 $AEFB$ 沿 EF 翻折, 使 AB 的对应线段 MN 经过顶点 C , 当 $MN \perp BC$ 时, $\frac{AE}{AD}$ 的值是 _____.



五、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 12 分, 共 36 分.)

26. (12分) 某商店准备购进 A 、 B 两种商品, A 种商品每件的进价比 B 种商品每件的进价多 20 元, 用 3000 元购进 A 种商品和用 1800 元购进 B 种商品的数量相同. 商店将 A 种商品每件的售价定为 80 元, B 种商品每件的售价定为 45 元.

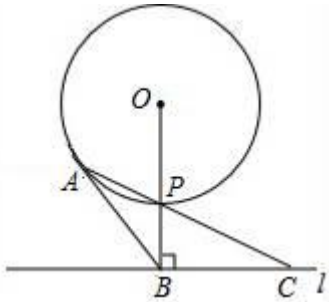
(1) A 种商品每件的进价和 B 种商品每件的进价各是多少元?

(2) 商店计划用不超过 1560 元的资金购进 A 、 B 两种商品共 40 件, 其中 A 种商品的数量不低于 B 种商品数量的一半, 该商店有几种进货方案?

(3) 端午节期间, 商店开展优惠促销活动, 决定对每件 A 种商品售价优惠 m ($10 < m < 20$) 元, B 种商品售价不变, 在 (2) 条件下, 请设计出销售这 40 件商品获得总利润最大的进货方案.

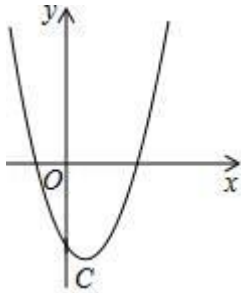
27. (12分) AB 与 $\odot O$ 相切于点 A , 直线 l 与 $\odot O$ 相离, $OB \perp l$ 于点 B , 且 $OB = 5$, OB 与 $\odot O$ 交于点 P , AP 的延长线交直线 l 于点 C .

- (1) 求证: $AB = BC$;
- (2) 若 $\odot O$ 的半径为 3, 求线段 AP 的长;
- (3) 若在 $\odot O$ 上存在点 G , 使 $\triangle GBC$ 是以 BC 为底边的等腰三角形, 求 $\odot O$ 的半径 r 的取值范围.



28. (12 分) 两条抛物线 $C_1: y_1 = 3x^2 - 6x - 1$ 与 $C_2: y_2 = x^2 - mx + n$ 的顶点相同.

- (1) 求抛物线 C_2 的解析式;
- (2) 点 A 是抛物线 C_2 在第四象限内图象上的一动点, 过点 A 作 $AP \perp x$ 轴, P 为垂足, 求 $AP+OP$ 的最大值;
- (3) 设抛物线 C_2 的顶点为点 C , 点 B 的坐标为 $(-1, -4)$, 问在 C_2 的对称轴上是否存在点 Q , 使线段 QB 绕点 Q 顺时针旋转 90° 得到线段 QB' , 且点 B' 恰好落在抛物线 C_2 上? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



参考答案

一、选择题

1. $-\frac{1}{6}$ 的相反数是 ()

A. 6

B. -6

C. $\frac{1}{6}$

D. $-\frac{1}{6}$

【解答】解： $-\frac{1}{6}$ 的相反数是 $\frac{1}{6}$ ，

故选：C.

2. -268000 用科学记数法表示为 ()

A. -268×10^3

B. -268×10^4

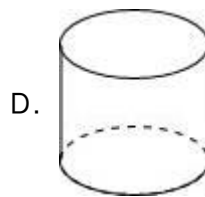
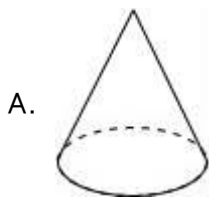
C. -26.8×10^4

D. -2.68×10^5

【解答】解：数字 -268000 用科学记数法表示应为： -2.68×10^5 ，

故选：D.

3. 下列几何体中，主视图为三角形的是 ()



【解答】解：A、主视图是三角形，故此选项正确；

B、主视图是矩形，故此选项错误；

C、主视图是圆，故此选项错误；

D、主视图是矩形，故此选项错误；

故选：A.

4. 下列事件为必然事件的是 ()

A. 袋中有 4 个蓝球，2 个绿球，共 6 个球，随机摸出一个球是红球

B. 三角形的内角和为 180°

C. 打开电视机，任选一个频道，屏幕上正在播放广告

D. 抛掷一枚硬币两次，第一次正面向上，第二次反面向上

【解答】解：A. 袋中有 4 个蓝球，2 个绿球，共 6 个球，随机摸出一个球是红球是不可能事件；

B. 三角形的内角和为 180° 是必然事件；

- C. 打开电视机，任选一个频道，屏幕上正在播放广告是随机事件；
 D. 抛掷一枚硬币两次，第一次正面向上，第二次反面向上是随机事件；
 故选：B.

5. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



- 【解答】解：A、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项错误；
 B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误；
 C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误；
 D、是轴对称图形，也是中心对称图形，故本选项正确。
 故选：D.

6. 下列运算正确的是（ ）

- A. $m^2 \cdot m^3 = m^6$ B. $(m^4)^2 = m^6$
 C. $m^3 + m^3 = 2m^3$ D. $(m - n)^2 = m^2 - n^2$

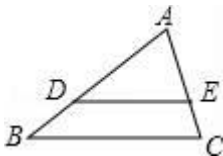
- 【解答】解：A. $m^2 \cdot m^3 = m^5$ ，故选项 A 不合题意；
 B. $(m^4)^2 = m^8$ ，故选项 B 不合题意；
 C. $m^3 + m^3 = 2m^3$ ，故选项 C 符合题意；
 D. $(m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$ ，故选项 D 不合题意。
 故选：C.

7. 在函数 $y = \frac{1}{x+3} + \sqrt{4-x}$ 中，自变量 x 的取值范围是（ ）

- A. $x < 4$ B. $x \geq 4$ 且 $x \neq -3$ C. $x > 4$ D. $x \leq 4$ 且 $x \neq -3$

- 【解答】解：由题意得， $x+3 \neq 0$ ， $4-x \geq 0$ ，
 解得， $x \leq 4$ 且 $x \neq -3$ ，
 故选：D.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $AD=9$ ， $DB=3$ ， $CE=2$ ，则 AC 的长为（ ）



- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【解答】解：∵ $DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}, \text{ 即 } \frac{9}{3} = \frac{AE}{2},$$

$$\therefore AE = 6,$$

$$\therefore AC = AE + EC = 6 + 2 = 8.$$

故选：C.

9. 一个等腰三角形的底边长是 6, 腰长是一元二次方程 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 的一根, 则此三角形的周长是 ()

A. 16

B. 12

C. 14

D. 12 或 16

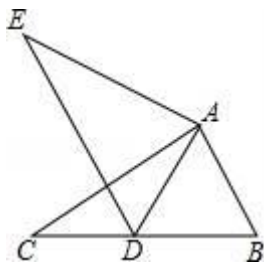
【解答】解：解方程 $x^2 - 8x + 15 = 0$, 得: $x = 3$ 或 $x = 5$,

若腰长为 3, 则三角形的三边为 3、3、6, 显然不能构成三角形;

若腰长为 5, 则三角形三边长为 5、5、6, 此时三角形的周长为 16,

故选：A.

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $BC = 3.6$, $\angle B = 60^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转度得到 $\triangle ADE$, 当点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 边上时, 则 CD 的长为 ()



A. 1.6

B. 1.8

C. 2

D. 2.6

【解答】解：由旋转的性质可知, $AD = AB$,

$$\because \angle B = 60^\circ, AD = AB,$$

$\therefore \triangle ADB$ 为等边三角形,

$$\therefore BD = AB = 2,$$

$$\therefore CD = CB - BD = 1.6,$$

故选：A.

11. 若关于 x 的代等式组
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} > 0 \\ 3x+5a+4 > 4(x+1)+3a \end{cases}$$
 恰有三个整数解, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $1 \leq a < \frac{3}{2}$ B. $1 < a \leq \frac{3}{2}$ C. $1 < a < \frac{3}{2}$ D. $a \leq 1$ 或 $a > \frac{3}{2}$

【解答】解：解不等式 $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} > 0$ ，得： $x > -\frac{2}{5}$ ，

解不等式 $3x+5a+4 > 4(x+1)+3a$ ，得： $x < 2a$ ，

$\therefore$ 不等式组恰有三个整数解，

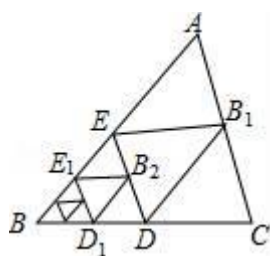
$\therefore$ 这三个整数解为 0、1、2，

$\therefore 2 < 2a \leq 3$ ，

解得 $1 < a \leq \frac{3}{2}$ ，

故选：B.

12. 如图，将 $\triangle ABC$ 沿着过 BC 的中点 D 的直线折叠，使点 B 落在 AC 边上的 B_1 处，称为第一次操作，折痕 DE 到 AC 的距离为 h_1 ；还原纸片后，再将 $\triangle BDE$ 沿着过 BD 的中点 D_1 的直线折叠，使点 B 落在 DE 边上的 B_2 处，称为第二次操作，折痕 D_1E_1 到 AC 的距离记为 h_2 ；按上述方法不断操作下去……经过第 n 次操作后得到折痕 $D_{n-1}E_{n-1}$ ，到 AC 的距离记为 h_n 。若 $h_1 = 1$ ，则 h_n 的值为（ ）



- A. $1 + \frac{1}{2^{n-1}}$ B. $1 + \frac{1}{2^n}$ C. $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ D. $2 - \frac{1}{2^n}$

【解答】解： $\because D$ 是 BC 的中点，折痕 DE 到 AC 的距离为 h_1

$\therefore$ 点 B 到 DE 的距离 $= h_1 = 1$ ，

$\because D_1$ 是 BD 的中点，折痕 D_1E_1 到 AC 的距离记为 h_2 ，

$\therefore$ 点 B 到 D_1E_1 的距离 $= h_2 = 1 + \frac{1}{2}h_1 = 1 + \frac{1}{2}$ ，

同理： $h_3 = h_2 + \frac{1}{4}h_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ，

$h_4 = h_3 + \frac{1}{8}h_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

... ..

$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

故选：C.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. (5 分) 分解因式： $xy^2 - 2xy + x = x(y-1)^2$.

【解答】解： $xy^2 - 2xy + x$,
 $= x(y^2 - 2y + 1)$,
 $= x(y-1)^2$.

14. (5 分) 一组数据为 0, 1, 2, 3, 4, 则这组数据的方差是 2.

【解答】解：这组数据的平均数是： $(1+2+3+4) \div 5 = 2$,

则方差 $S^2 = \frac{1}{5} [(0-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (4-2)^2] = 2$;

故答案为：2.

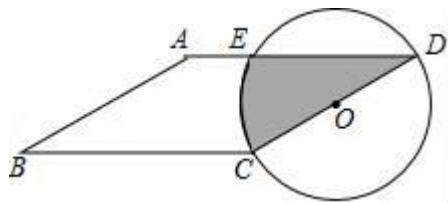
15. (5 分) 若 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$, 则分式 $\frac{5m+5n-2mn}{-m-n}$ 的值为 -4.

【解答】解： $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$, 可得 $m+n=2mn$,

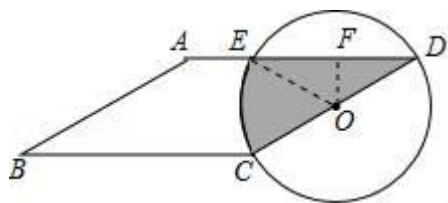
$$\begin{aligned} & \frac{5m+5n-2mn}{-m-n} \\ &= \frac{5(m+n)-2mn}{-(m+n)} \\ &= \frac{10mn-2mn}{-2mn} \\ &= -4; \end{aligned}$$

故答案为 -4;

16. (5 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB < AD$, $\angle A = 150^\circ$, $CD = 4$, 以 CD 为直径的 $\odot O$ 交 AD 于点 E , 则图中阴影部分的面积为 $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$.



【解答】解：如图，连接 OE , 作 $OF \perp DE$ 于点 F ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 且 $\angle A = 150^\circ$,

$$\therefore \angle D = 30^\circ,$$

$$\text{则 } \angle COE = 2\angle D = 60^\circ,$$

$$\because CD = 4,$$

$$\therefore CO = DO = 2,$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2}OD = 1, \quad DF = OD \cos \angle ODF = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore DE = 2DF = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{图中阴影部分的面积为 } \frac{60 \cdot \pi \cdot 2^2}{360} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

三、解題 (本大題共 5 小題, 共 4 分. 解答應寫出必要的文字說明或推演步驟.)

$$17. (7 \text{ 分}) \text{ 計算: } (-1)^{2019} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + |\sqrt{3} - 2| + 3\tan 30^\circ.$$

$$\text{【解答】解: } (-1)^{2019} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + |\sqrt{3} - 2| + 3\tan 30^\circ$$

$$= -1 + 4 + (2 - \sqrt{3}) + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

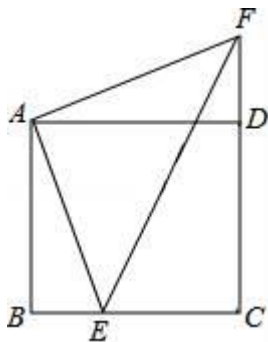
$$= 3 + 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= 5;$$

18. (9 分) 如圖, 在正方形 $ABCD$ 中, 點 E 是 BC 上的一點, 點 F 是 CD 延長線上的一點, 且 $BE = DF$, 連結 AE 、 AF 、 EF .

(1) 求證: $\triangle ABE \cong \triangle ADF$;

(2) 若 $AE = 5$, 請求出 EF 的長.



【解答】(1) 證明: $\because$ 四邊形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD, \quad \angle ABC = \angle ADC = \angle ADF = 90^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AB=AD \\ \angle ABE=\angle ADF, \\ BE=DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$ (SAS);

(2) 解: $\because \triangle ABE \cong \triangle ADF$,

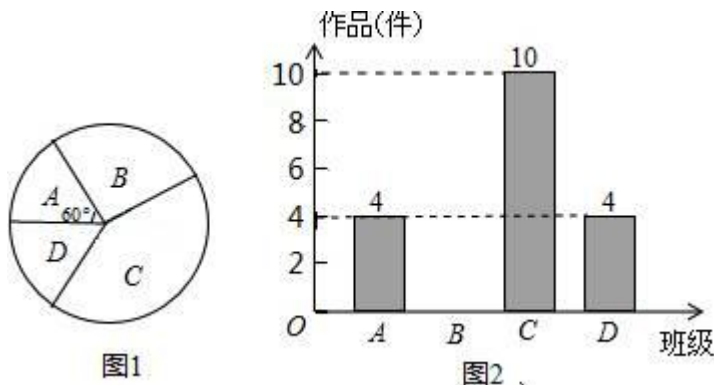
$\therefore AE = AF, \angle BAE = \angle DAF$,

$\therefore \angle BAE + \angle EAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAF + \angle EAD = 90^\circ$, 即 $\angle EAF = 90^\circ$,

$\therefore EF = \sqrt{2}AE = 5\sqrt{2}$.

19. (9分) “大千故里，文化内江”，我市某中学为传承大千艺术精神，征集学生书画作品. 王老师从全校 20 个班中随机抽取了 A、B、C、D 4 个班，对征集作品进行了数量分析统计，绘制了如下两幅不完整的统计图.



(1) 王老师采取的调查方式是 抽样调查 (填“普查”或“抽样调查”), 王老师所调查的 4 个班共征集到作品 24 件, 并补全条形统计图;

(2) 在扇形统计图中, 表示 C 班的扇形周心角的度数为 150°;

(3) 如果全校参展作品中有 4 件获得一等奖, 其中有 1 名作者是男生, 3 名作者是女生. 现要从获得一等奖的作者中随机抽取两人去参加学校的总结表彰座谈会, 求恰好抽中一男一女的概率. (要求用树状图或列表法写出分析过程)

【解答】 解: (1) 王老师采取的调查方式是抽样调查,

$$4 \div \frac{60}{360} = 24,$$

所以王老师所调查的 4 个班共征集到作品 24 件,

B 班的作品数为 $24 - 4 - 10 - 4 = 6$ (件),

条形统计图为:

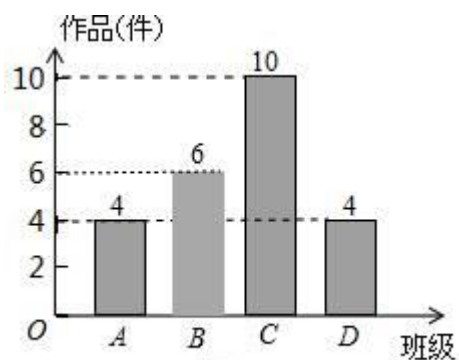


图2

(2) 在扇形统计图中，表示 C 班的扇形周心角 $= 360^\circ \times \frac{10}{24} = 150^\circ$ ；

故答案为抽样调查；6； 150° ；

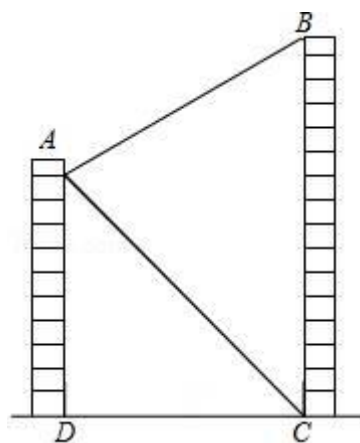
(3) 画树状图为：



共有 12 种等可能的结果数，其中恰好抽中一男一女的结果数为 6，

所以恰好抽中一男一女的概率 $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

20. (9 分) 如图，两座建筑物 DA 与 CB ，其中 CB 的高为 120 米，从 DA 的顶点 A 测得 CB 顶部 B 的仰角为 30° ，测得其底部 C 的俯角为 45° ，求这两座建筑物的地面距离 DC 为多少米？（结果保留根号）



【解答】解：作 $AE \perp BC$ 于 E ，

则四边形 $ADCE$ 为矩形，

$\therefore AD = CE$ ，

设 $BE = x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $\tan BAE = \frac{BE}{AE}$,

则 $AE = \frac{BE}{\tan \angle BAE} = \sqrt{3}x$,

$\therefore \angle EAC = 45^\circ$,

$\therefore EC = AE = \sqrt{3}x$,

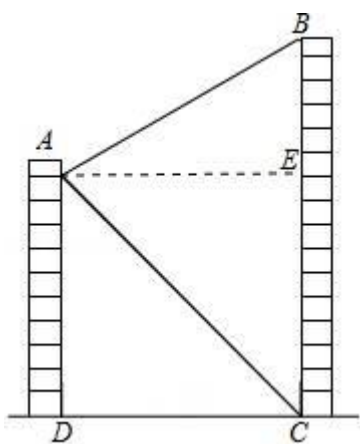
由题意得, $BE + CE = 120$, 即 $\sqrt{3}x + x = 120$,

解得, $x = 60(\sqrt{3} - 1)$,

$\therefore AD = CE = \sqrt{3}x = 180 - 60\sqrt{3}$,

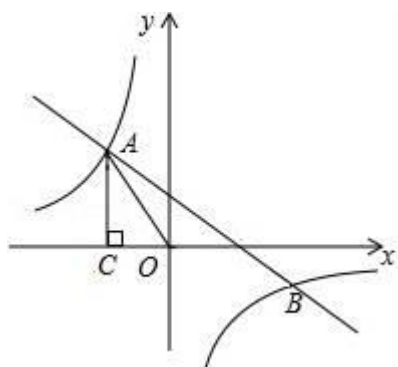
$\therefore DC = 180 - 60\sqrt{3}$,

答: 两座建筑物的地面距离 DC 为 $(180 - 60\sqrt{3})$ 米.



21. (10 分) 如图, 一次函数 $y = mx + n$ ($m \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象交于第二、四象限内的点 $A(a, 4)$ 和点 $B(8, b)$. 过点 A 作 x 轴的垂线, 垂足为点 C , $\triangle AOC$ 的面积为 4.

- (1) 分别求出 a 和 b 的值;
- (2) 结合图象直接写出 $mx + n < \frac{k}{x}$ 的解集;
- (3) 在 x 轴上取点 P , 使 $PA - PB$ 取得最大值时, 求出点 P 的坐标.



【解答】解：(1) $\because$ 点 $A(a, 4)$,

$$\therefore AC=4,$$

$$\therefore S_{\triangle AOC}=4, \text{ 即 } \frac{1}{2}OC \cdot AC=4,$$

$$\therefore OC=2,$$

$\therefore$ 点 $A(a, 4)$ 在第二象限,

$$\therefore a=-2 \quad A(-2, 4),$$

将 $A(-2, 4)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得: $k=-8$,

$$\therefore \text{反比例函数的关系式为: } y=-\frac{8}{x},$$

把 $B(8, b)$ 代入得: $b=-1$,

$$\therefore B(8, -1)$$

因此 $a=-2, b=-1$;

(2) 由图象可以看出 $mx+n < \frac{k}{x}$ 的解集为: $-2 < x < 0$ 或 $x > 8$; ' ' B'

(3) 如图, 作点 B 关于 x 轴的对称点 B' , 直线 AB' 与 x 轴交于 P ,

此时 $PA - PB$ 最大,

$$\therefore B(8, -1)$$

$$\therefore B'(8, 1)$$

设直线 AP 的关系式为 $y=kx+b$, 将 $A(-2, 4), B'(8, 1)$ 代入得:

$$\begin{cases} -2k+b=4 \\ 8k+b=1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } k=-\frac{3}{10}, b=\frac{17}{5},$$

$$\therefore \text{直线 } AP \text{ 的关系式为 } y=-\frac{3}{10}x+\frac{17}{5},$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, 即 } -\frac{3}{10}x+\frac{17}{5}=0, \text{ 解得 } x=\frac{34}{3},$$

$$\therefore P(\frac{34}{3}, 0)$$

$$\therefore BD = DH = 2x,$$

$$\therefore S_1 = DH \cdot AD = \sqrt{5}, \text{ 即 } 2x \cdot 2x = \sqrt{5},$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$\therefore BD = 2x, BE = x,$$

$$\therefore S_2 = MH \cdot BD = (3x - 2x) \cdot 2x = 2x^2,$$

$$S_3 = EN \cdot BE = x \cdot x = x^2,$$

$$\therefore S_2 + S_3 = 2x^2 + x^2 = 3x^2 = \frac{3\sqrt{5}}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

24. (6分) 若 x, y, z 为实数, 且 $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$, 则代数式 $x^2 - 3y^2 + z^2$ 的最大值是 26.

【解答】 解: $\begin{cases} x+2y-z=4 \text{ ①} \\ x-y+2z=1 \text{ ②} \end{cases}$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得, } y = 1 + z,$$

$$\text{把 } y = 1 + z \text{ 代入 ① 得, } x = 2 - z,$$

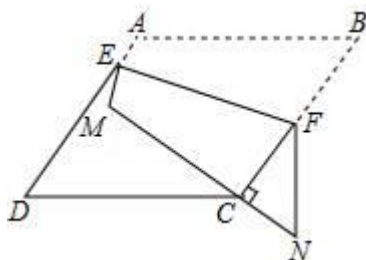
$$\text{则 } x^2 - 3y^2 + z^2 = (2 - z)^2 - 3(1 + z)^2 + z^2 = -z^2 - 10z + 1 = -(z + 5)^2 + 26,$$

$$\text{当 } z = -5 \text{ 时, } x^2 - 3y^2 + z^2 \text{ 的最大值是 } 26,$$

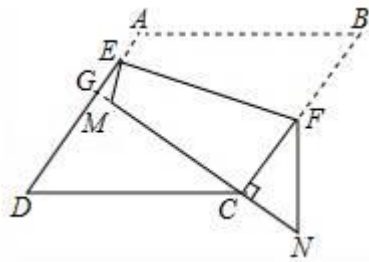
$$\text{故答案为: } 26.$$

25. (6分) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\sin B = \frac{4}{5}$, 点 E, F 分别在边 AD, BC 上, 将四边

形 $AEFB$ 沿 EF 翻折, 使 AB 的对应线段 MN 经过顶点 C , 当 $MN \perp BC$ 时, $\frac{AE}{AD}$ 的值是 $\frac{2}{9}$.



【解答】 解: 延长 CM 交 AD 于点 G ,



∴ 将四边形 $AEFB$ 沿 EF 翻折,

$$\therefore AE = ME, \angle A = \angle EMC, BF = FN, \angle B = \angle N, AB = MN$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形

$$\therefore AB = BC = CD = AD, \angle B = \angle D, \angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\therefore \sin B = \frac{4}{5} = \sin N = \frac{CF}{FN},$$

$$\therefore \text{设 } CF = 4x, FN = 5x,$$

$$\therefore CN = \sqrt{FN^2 - CF^2} = 3x,$$

$$\therefore BC = 9x = AB = CD = AD,$$

$$\therefore \sin B = \frac{4}{5} = \sin D = \frac{GC}{CD}$$

$$\therefore GC = \frac{36x}{5}$$

$$\therefore GM = GC - (MN - CN) = \frac{36x}{5} - 6x = \frac{6}{5}x$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ, \angle EMC + \angle EMG = 180^\circ$$

$$\therefore \angle B = \angle EMG$$

$$\therefore \sin B = \sin \angle EMG = \frac{4}{5} = \frac{EG}{EM}$$

$$\therefore \cos \angle EMG = \frac{3}{5} = \frac{GM}{EM}$$

$$\therefore EM = 2x,$$

$$\therefore AE = 2x,$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{2x}{9x} = \frac{2}{9}$$

故答案为: $\frac{2}{9}$

五、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 12 分, 共 36 分.)

26. (12 分) 某商店准备购进 A 、 B 两种商品, A 种商品每件的进价比 B 种商品每件的进价多 20 元, 用 3000 元购进 A 种商品和用 1800 元购进 B 种商品的数量相同. 商店将 A

种商品每件的售价定为 80 元, B 种商品每件的售价定为 45 元.

(1) A 种商品每件的进价和 B 种商品每件的进价各是多少元?

(2) 商店计划用不超过 1560 元的资金购进 A 、 B 两种商品共 40 件, 其中 A 种商品的数量不低于 B 种商品数量的一半, 该商店有几种进货方案?

(3) 端午节期间, 商店开展优惠促销活动, 决定对每件 A 种商品售价优惠 m ($10 < m < 20$) 元, B 种商品售价不变, 在 (2) 条件下, 请设计出销售这 40 件商品获得总利润最大的进货方案.

【解答】解: (1) 设 A 种商品每件的进价是 x 元, 则 B 种商品每件的进价是 $(x - 20)$ 元,

$$\text{由题意得: } \frac{3000}{x} = \frac{1800}{x-20},$$

解得: $x = 50$,

经检验, $x = 50$ 是原方程的解, 且符合题意,

$$50 - 20 = 30,$$

答: A 种商品每件的进价是 50 元, B 种商品每件的进价是 30 元;

(2) 设购买 A 种商品 a 件, 则购买 B 商品 $(40 - a)$ 件,

$$\text{由题意得: } \begin{cases} 50a + 30(40 - a) \leq 1560 \\ a \geq \frac{40 - a}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \frac{40}{3} \leq a \leq 18,$$

$\therefore a$ 为正整数,

$$\therefore a = 14, 15, 16, 17, 18,$$

$\therefore$ 商店共有 5 种进货方案;

(3) 设销售 A 、 B 两种商品共获利 y 元,

$$\text{由题意得: } y = (80 - 50 - m)a + (45 - 30)(40 - a),$$

$$= (15 - m)a + 600,$$

①当 $10 < m < 15$ 时, $15 - m > 0$, y 随 a 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $a = 18$ 时, 获利最大, 即买 18 件 A 商品, 22 件 B 商品,

②当 $m = 15$ 时, $15 - m = 0$,

y 与 a 的值无关, 即 (2) 问中所有进货方案获利相同,

③当 $15 < m < 20$ 时, $15 - m < 0$, y 随 a 的增大而减小,

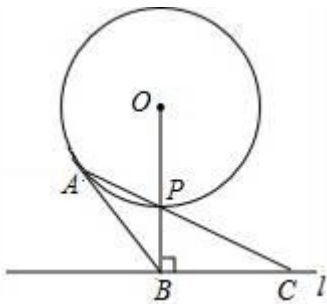
∴当 $a=14$ 时，获利最大，即买 14 件 A 商品，26 件 B 商品。

27. (12 分) AB 与 $\odot O$ 相切于点 A ，直线 l 与 $\odot O$ 相离， $OB \perp l$ 于点 B ，且 $OB=5$ ， OB 与 $\odot O$ 交于点 P ， AP 的延长线交直线 l 于点 C 。

(1) 求证： $AB=BC$ ；

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 3，求线段 AP 的长；

(3) 若在 $\odot O$ 上存在点 G ，使 $\triangle GBC$ 是以 BC 为底边的等腰三角形，求 $\odot O$ 的半径 r 的取值范围。



【解答】(1) 证明：如图 1，连接 OA ，

∵ AB 与 $\odot O$ 相切，

∴ $\angle OAB = 90^\circ$ ，

∴ $\angle OAP + \angle BAC = 90^\circ$ ，

∵ $OB \perp l$ ，

∴ $\angle BCA + \angle BPC = 90^\circ$ ，

∵ $OA = OP$ ，

∴ $\angle OAP = \angle OPA = \angle BPC$ ，

∴ $\angle BAC = \angle BCA$ ，

∴ $AB = BC$ ；

(2) 解：如图 1，连接 AO 并延长交 $\odot O$ 于 D ，连接 PD ，

则 $\angle APD = 90^\circ$ ，

∵ $OB = 5$ ， $OP = 3$ ，

∴ $PB = 2$ ，

∴ $BC = AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中， $PC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$ ，

∴ $\angle DAP = \angle CPB$ ， $\angle APD = \angle PBC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \triangle DAP \sim \triangle PBC,$$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AD}{PC}, \text{ 即 } \frac{AP}{2} = \frac{6}{2\sqrt{5}},$$

$$\text{解得, } AP = \frac{6\sqrt{5}}{5};$$

(3) 解: 如图 2, 作 BC 的垂直平分线 MN , 作 $OE \perp MN$ 于 E ,

$$\text{则 } OE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times \sqrt{5^2 - r^2},$$

由题意得, $\odot O$ 于 MN 有交点,

$$\therefore OE \leq r, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times \sqrt{5^2 - r^2} \leq r,$$

$$\text{解得, } r \geq \sqrt{5},$$

$\therefore$ 直线 l 与 $\odot O$ 相离,

$$\therefore r < 5,$$

则使 $\triangle GBC$ 是以 BC 为底边的等腰三角形, $\odot O$ 的半径 r 的取值范围为: $\sqrt{5} \leq r < 5$.

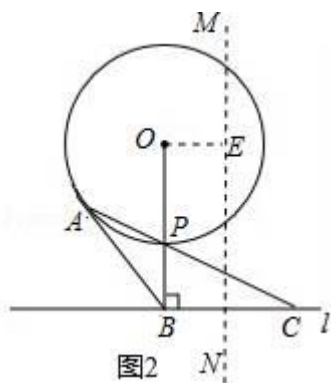


图2

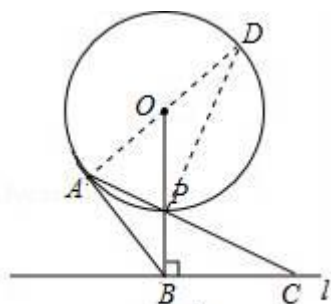


图1

28. (12 分) 两条抛物线 $C_1: y_1 = 3x^2 - 6x - 1$ 与 $C_2: y_2 = x^2 - mx + n$ 的顶点相同.

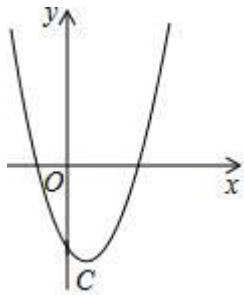
(1) 求抛物线 C_2 的解析式;

(2) 点 A 是抛物线 C_2 在第四象限内图象上的一动点, 过点 A 作 $AP \perp x$ 轴, P 为垂足,

求 $AP + OP$ 的最大值;

(3) 设抛物线 C_2 的顶点为点 C , 点 B 的坐标为 $(-1, -4)$, 问在 C_2 的对称轴上是否

存在点 Q ，使线段 QB 绕点 Q 顺时针旋转 90° 得到线段 QB' ，且点 B' 恰好落在抛物线 C_2 上？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。



【解答】解：(1) $y_1 = 3x^2 - 6x - 1$ 的顶点为 $(1, -4)$ ，

$\therefore$ 抛物线 $C_1: y_1 = 3x^2 - 6x - 1$ 与 $C_2: y_2 = x^2 - mx + n$ 的顶点相同

$\therefore m = 2, n = -3$,

$\therefore y_2 = x^2 - 2x - 3$;

(2) 作 $AP \perp x$ 轴，

设 $A(a, a^2 - 2a - 3)$,

$\therefore A$ 在第四象限，

$\therefore 0 < a < 3$,

$\therefore AP = -a^2 + 2a + 3, PO = a$,

$\therefore AP + OP = -a^2 + 3a + 3 = -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}$

$\therefore 0 < a < 3$,

$\therefore AP + OP$ 的最大值为 $\frac{21}{4}$;

(3) 假设 C_2 的对称轴上存在点 Q ,

过点 B' 作 $B'D \perp l$ 于点 D ,

$\therefore \angle B'DQ = 90^\circ$,

① 当点 Q 在顶点 C 的下方时，

$\therefore B(-1, -4), C(1, -4)$ ，抛物线的对称轴为 $x = 1$ ，

$\therefore BC \perp l, BC = 2, \angle BCQ = 90^\circ$,

$\therefore \triangle BCQ \cong \triangle QDB' (AAS)$

$\therefore B'D = CQ, QD = BC$,

设点 $Q(1, b)$,

$\therefore B'D = CQ = -4 - b, QD = BC = 2$,

可知 $B'(-3-b, 2+b)$,

$$\therefore (-3-b)^2 - 2(-3-b) - 3 = 2+b,$$

$$\therefore b^2 + 7b + 10 = 0,$$

$$\therefore b = -2 \text{ 或 } b = -5,$$

$$\therefore b < -4,$$

$$\therefore Q(1, -5),$$

②当点 Q 在顶点 C 的上方时, 同理可得 $Q(1, -2)$;

综上所述: $Q(1, -5)$ 或 $Q(1, -2)$;

