

四川省达州市 2018 年中考数学真题试题

一、单项选择题：（每题 3 分，共 30 分）

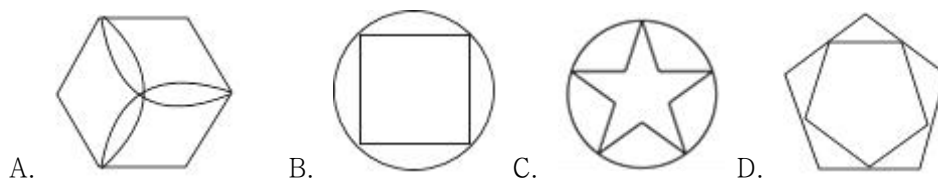
1. (3 分) 2018 的相反数是 ()

- A. 2018 B. -2018 C. $\frac{1}{2018}$ D. $-\frac{1}{2018}$

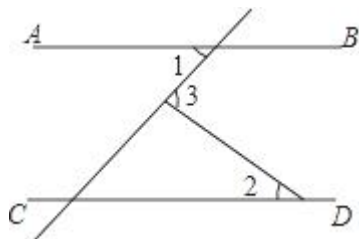
2. (3 分) 二次根式 $\sqrt{2x+4}$ 中的 x 的取值范围是 ()

- A. $x < -2$ B. $x \leq -2$ C. $x > -2$ D. $x \geq -2$

3. (3 分) 下列图形中是中心对称图形的是 ()



4. (3 分) 如图, $AB \parallel CD$, $\angle 1 = 45^\circ$, $\angle 3 = 80^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 ()



- A. 30° B. 35° C. 40° D. 45°

5. (3 分) 下列说法正确的是 ()

- A. “打开电视机, 正在播放《达州新闻》”是必然事件
B. 天气预报“明天降水概率 50%, 是指明天有一半的时间会下雨”
C. 甲、乙两人在相同的条件下各射击 10 次, 他们成绩的平均数相同, 方差分别是 $S^2=0.3$, $S^2=0.4$, 则甲的成绩更稳定
D. 数据 6, 6, 7, 7, 8 的中位数与众数均为 7

6. (3 分) 平面直角坐标系中, 点 P 的坐标为 (m, n) , 则向量 $\overrightarrow{OP}$ 可以用点 P 的坐标表示为 $\overrightarrow{OP} = (m, n)$; 已知 $\overrightarrow{OA_1} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OA_2} = (x_2, y_2)$, 若 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, 则 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\overrightarrow{OA_2}$ 互相垂直.

下面四组向量: ① $\overrightarrow{OB_1} = (3, -9)$, $\overrightarrow{OB_2} = (1, -\frac{1}{3})$;

② $\overrightarrow{OC_1} = (2, \pi^0)$, $\overrightarrow{OC_2} = (2^{-1}, -1)$;

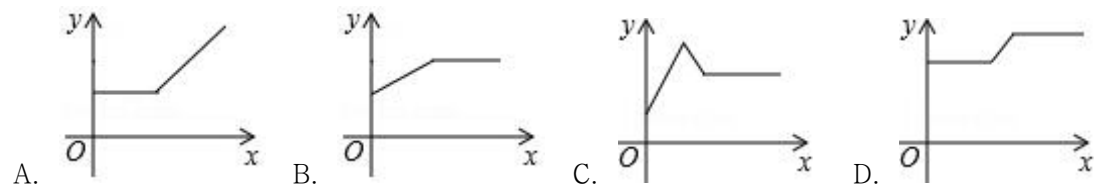
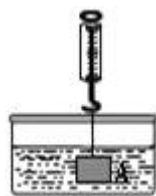
③ $\overrightarrow{OD_1} = (\cos 30^\circ, \tan 45^\circ)$, $\overrightarrow{OD_2} = (\sin 30^\circ, \tan 45^\circ)$;

④ $\overrightarrow{OE_1} = (\sqrt{5}+2, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{OE_2} = (\sqrt{5}-2, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

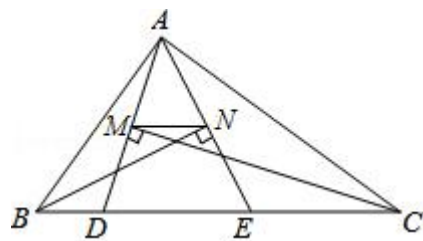
其中互相垂直的组有 ()

A. 1 组 B. 2 组 C. 3 组 D. 4 组

7. (3 分) 如图, 在物理课上, 老师将挂在弹簧测力计下端的铁块浸没于水中, 然后缓慢匀速向上提起, 直至铁块完全露出水面一定高度, 则下图能反映弹簧测力计的读数 y (单位: N) 与铁块被提起的高度 x (单位: cm) 之间的函数关系的大致图象是 ()



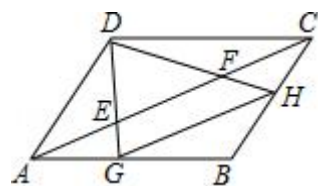
8. (3 分) 如图, $\triangle ABC$ 的周长为 19, 点 D, E 在边 BC 上, $\angle ABC$ 的平分线垂直于 AE , 垂足为 N , $\angle ACB$ 的平分线垂直于 AD , 垂足为 M , 若 $BC=7$, 则 MN 的长度为 ()



A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. 3

9. (3 分) 如图, E, F 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上两点, $AE=CF=\frac{1}{4}AC$. 连接 DE ,

DF 并延长, 分别交 AB, BC 于点 G, H , 连接 GH , 则 $\frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle BGH}}$ 的值为 ()

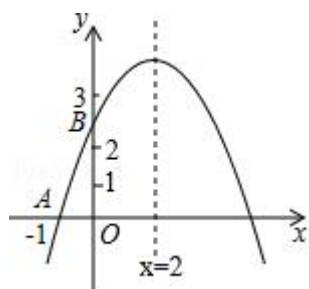


A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

10. (3分) 如图, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 与 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 与 $(0, 3)$ 之间 (不包括这两点), 对称轴为直线 $x=2$.

下列结论: ① $abc < 0$; ② $9a+3b+c > 0$; ③ 若点 $M(\frac{1}{2}, y_1)$, 点 $N(\frac{5}{2}, y_2)$ 是函数图象上的两点, 则 $y_1 < y_2$; ④ $-\frac{3}{5} < a < -\frac{2}{5}$.

其中正确结论有 ()



A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

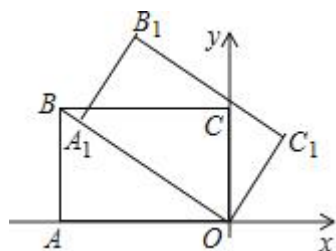
二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

11. (3分) 受益于电子商务发展和法治环境改善等多重因素, 快递业务迅猛发展. 预计达州市 2018 年快递业务量将达到 5.5 亿件, 数据 5.5 亿用科学记数法表示为_____.

12. (3分) 已知 $a^m=3$, $a^n=2$, 则 a^{2m-n} 的值为_____.

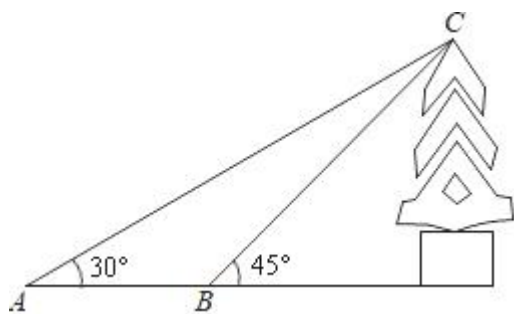
13. (3分) 若关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-3} + \frac{3a}{3-x} = 2a$ 无解, 则 a 的值为_____.

14. (3分) 如图, 平面直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的顶点 $A(-6, 0)$, $C(0, 2\sqrt{3})$. 将矩形 $OABC$ 绕点 O 顺时针方向旋转, 使点 A 恰好落在 OB 上的点 A_1 处, 则点 B 的对应点 B_1 的坐标为_____.



15. (3分) 已知: $m^2-2m-1=0$, $n^2+2n-1=0$ 且 $mn \neq 1$, 则 $\frac{mn+n+1}{n}$ 的值为_____.

16. (3分) 如图, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=2$, $BC=5$, 点 D 是 BC 边上一点且 $CD=1$, 点 P 是线段 DB 上一动点, 连接 AP , 以 AP 为斜边在 AP 的下方作等腰 $Rt\triangle AOP$. 当 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时, 点 O 的运动路径长为_____.



21. (7分) “绿水青山就是金山银山”的理念已融入人们的日常生活中，因此，越来越多的人喜欢骑自行车出行. 某自行车店在销售某型号自行车时，以高出进价的 50% 标价. 已知按标价九折销售该型号自行车 8 辆与将标价直降 100 元销售 7 辆获利相同.

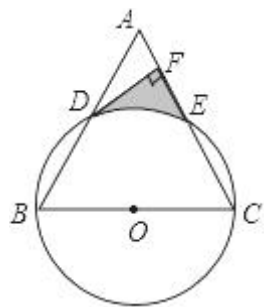
(1) 求该型号自行车的进价和标价分别是多少元？

(2) 若该型号自行车的进价不变，按 (1) 中的标价出售，该店平均每月可售出 51 辆；若每辆自行车每降价 20 元，每月可多售出 3 辆，求该型号自行车降价多少元时，每月获利最大？最大利润是多少？

22. (8分) 已知：如图，以等边 $\triangle ABC$ 的边 BC 为直径作 $\odot O$ ，分别交 AB ， AC 于点 D ， E ，过点 D 作 $DF \perp AC$ 交 AC 于点 F .

(1) 求证： DF 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 8，求由 $\widehat{DE}$ 、 DF 、 EF 围成的阴影部分面积.

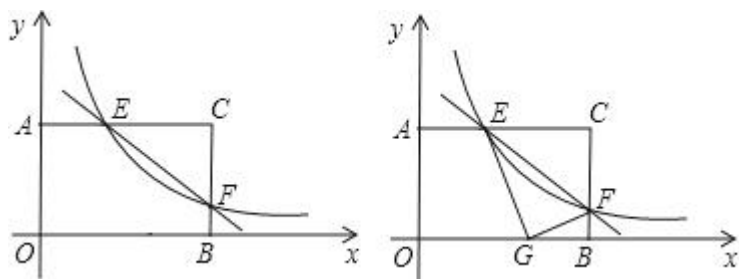


23. (9分) 矩形 $AOBC$ 中， $OB=4$ ， $OA=3$. 分别以 OB ， OA 所在直线为 x 轴， y 轴，建立如图 1 所示的平面直角坐标系. F 是 BC 边上一个动点 (不与 B ， C 重合)，过点 F 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 的图象与边 AC 交于点 E .

(1) 当点 F 运动到边 BC 的中点时，求点 E 的坐标；

(2) 连接 EF ，求 $\angle EFC$ 的正切值；

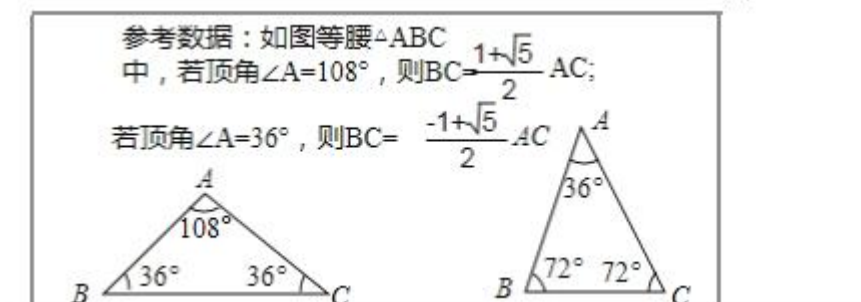
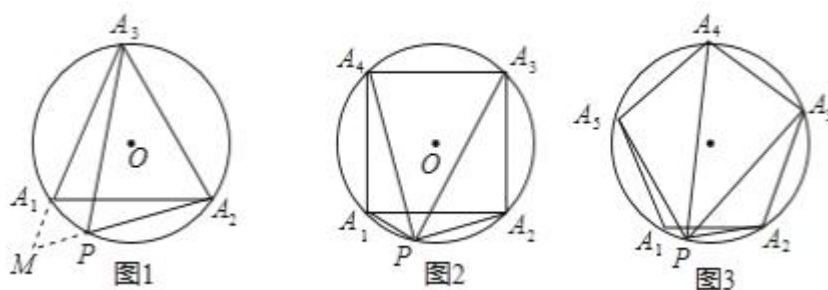
(3) 如图 2，将 $\triangle CEF$ 沿 EF 折叠，点 C 恰好落在边 OB 上的点 G 处，求此时反比例函数的解析式.



24. (11 分) 阅读下列材料:

已知: 如图 1, 等边 $\triangle A_1A_2A_3$ 内接于 $\odot O$, 点 P 是 $\widehat{A_1A_2}$ 上的任意一点, 连接 PA_1 , PA_2 , PA_3 ,

可证: $PA_1+PA_2=PA_3$, 从而得到: $\frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3}=\frac{1}{2}$ 是定值.



(1) 以下是小红的一种证明方法, 请在方框内将证明过程补充完整;

证明: 如图 1, 作 $\angle PA_1M=60^\circ$, A_1M 交 A_2P 的延长线于点 M.

$\because \triangle A_1A_2A_3$ 是等边三角形,

$\therefore \angle A_3A_1A_2=60^\circ$,

$\therefore \angle A_3A_1P=\angle A_2A_1M$

又 $A_3A_1=A_2A_1$, $\angle A_1A_3P=\angle A_1A_2P$,

$\therefore \triangle A_1A_3P \cong \triangle A_1A_2M$



$\therefore PA_3=MA_2=PA_2+PM=PA_2+PA_1$.

$$\therefore \frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3} = \frac{1}{2}, \text{ 是定值.}$$

(2) 延伸: 如图 2, 把 (1) 中条件 “等边 $\triangle A_1A_2A_3$ ” 改为 “正方形 $A_1A_2A_3A_4$ ”, 其余条件

不变, 请问: $\frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3+PA_4}$ 还是定值吗? 为什么?

(3) 拓展: 如图 3, 把 (1) 中条件 “等边 $\triangle A_1A_2A_3$ ” 改为 “正五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ ”, 其余

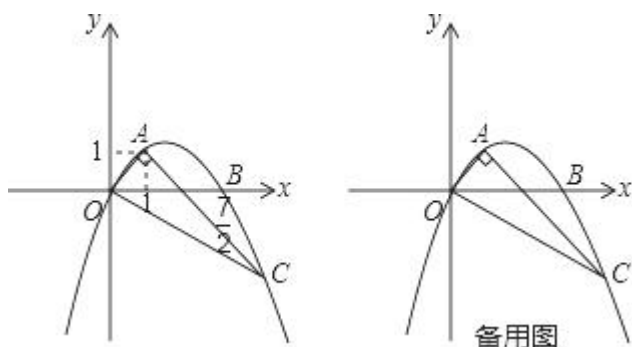
条件不变, 则 $\frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3+PA_4+PA_5} = \underline{\hspace{2cm}}$ (只写出结果).

25. (12 分) 如图, 抛物线经过原点 $O(0, 0)$, 点 $A(1, 1)$, 点 $B(\frac{7}{2}, 0)$.

(1) 求抛物线解析式;

(2) 连接 OA , 过点 A 作 $AC \perp OA$ 交抛物线于 C , 连接 OC , 求 $\triangle AOC$ 的面积;

(3) 点 M 是 y 轴右侧抛物线上一动点, 连接 OM , 过点 M 作 $MN \perp OM$ 交 x 轴于点 N . 问: 是否存在点 M , 使以点 O, M, N 为顶点的三角形与 (2) 中的 $\triangle AOC$ 相似, 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由.



参考答案与试题解析

一、单项选择题：（每题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) 2018 的相反数是 ()

- A. 2018 B. -2018 C. $\frac{1}{2018}$ D. $-\frac{1}{2018}$

【分析】根据相反数的概念：只有符号不同的两个数叫做互为相反数可得答案.

【解答】解：2018 的相反数是 -2018,

故选：B.

【点评】此题主要考查了相反数，关键是掌握相反数的定义.

2. (3 分) 二次根式 $\sqrt{2x+4}$ 中的 x 的取值范围是 ()

- A. $x < -2$ B. $x \leq -2$ C. $x > -2$ D. $x \geq -2$

【分析】根据被开方数是非负数，可得答案.

【解答】解：由题意，得

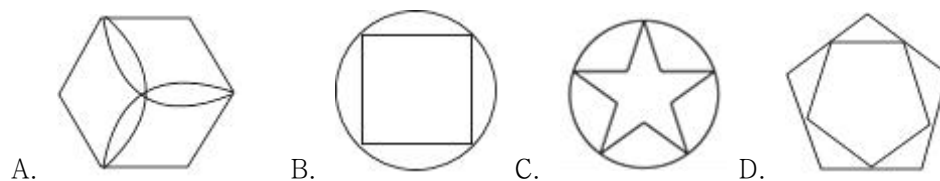
$$2x+4 \geq 0,$$

解得 $x \geq -2$,

故选：D.

【点评】本题考查了二次根式有意义的条件，利用被开方数是非负数得出不等式是解题关键.

3. (3 分) 下列图形中是中心对称图形的是 ()



【分析】根据把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心进行分析即可.

【解答】解：A、不是中心对称图形，故此选项错误；

B、是中心对称图形，故此选项正确；

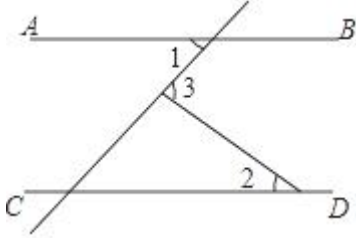
C、不是中心对称图形，故此选项错误；

D、不是中心对称图形，故此选项错误；

故选：B.

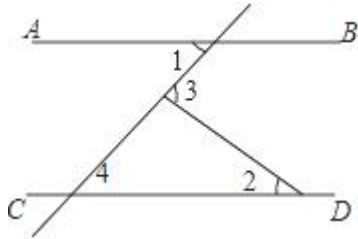
【点评】此题主要考查了中心对称图形，关键是掌握中心对称图形的定义.

4. (3分) 如图, $AB \parallel CD$, $\angle 1 = 45^\circ$, $\angle 3 = 80^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 ()



A. 30° B. 35° C. 40° D. 45°

【分析】根据平行线的性质和三角形的外角性质解答即可.



【解答】解:

$\because AB \parallel CD$, $\angle 1 = 45^\circ$,

$\therefore \angle 4 = \angle 1 = 45^\circ$,

$\because \angle 3 = 80^\circ$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3 - \angle 4 = 80^\circ - 45^\circ = 35^\circ$,

故选: B.

【点评】此题考查平行线的性质，关键是根据平行线的性质和三角形的外角性质解答.

5. (3分) 下列说法正确的是 ()

A. “打开电视机，正在播放《达州新闻》”是必然事件

B. 天气预报“明天降水概率 50%，是指明天有一半的时间会下雨”

C. 甲、乙两人在相同的条件下各射击 10 次，他们成绩的平均数相同，方差分别是 $S^2 = 0.3$, $S^2 = 0.4$, 则甲的成绩更稳定

D. 数据 6, 6, 7, 7, 8 的中位数与众数均为 7

【分析】直接利用随机事件以及众数、中位数的定义以及方差的定义分别分析得出答案.

【解答】解: A、打开电视机，正在播放《达州新闻》”是随机事件，故此选项错误;

B、天气预报“明天降水概率 50%，是指明天有 50%下雨的可能，故此选项错误;

C、甲、乙两人在相同的条件下各射击 10 次，他们成绩的平均数相同，方差分别是 $S^2=0.3$, $S^2=0.4$ ，则甲的成绩更稳定，正确；

D、数据 6, 6, 7, 7, 8 的中位数为 7，众数为：6 和 7，故此选项错误；

故选：C.

【点评】此题主要考查了随机事件以及众数、中位数的定义以及方差的定义，正确把握相关定义是解题关键.

6. (3 分) 平面直角坐标系中，点 P 的坐标为 (m, n) ，则向量 $\overrightarrow{OP}$ 可以用点 P 的坐标表示为 $\overrightarrow{OP} = (m, n)$ ；已知 $\overrightarrow{OA_1} = (x_1, y_1)$ ， $\overrightarrow{OA_2} = (x_2, y_2)$ ，若 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ ，则 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\overrightarrow{OA_2}$ 互相垂直.

下面四组向量：① $\overrightarrow{OB_1} = (3, -9)$ ， $\overrightarrow{OB_2} = (1, -\frac{1}{3})$ ；

② $\overrightarrow{OC_1} = (2, \pi^0)$ ， $\overrightarrow{OC_2} = (2^{-1}, -1)$ ；

③ $\overrightarrow{OD_1} = (\cos 30^\circ, \tan 45^\circ)$ ， $\overrightarrow{OD_2} = (\sin 30^\circ, \tan 45^\circ)$ ；

④ $\overrightarrow{OE_1} = (\sqrt{5}+2, \sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{OE_2} = (\sqrt{5}-2, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

其中互相垂直的组有 ()

A. 1 组 B. 2 组 C. 3 组 D. 4 组

【分析】根据两个向量垂直的判定方法一一判断即可；

【解答】解：① $\because 3 \times 1 + (-9) \times (-\frac{1}{3}) = 6 \neq 0$,

$\therefore \overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{OB_2}$ 不垂直.

② $\because 2 \times 2^{-1} + \pi^0 \times (-1) = 0$,

$\therefore \overrightarrow{OC_1}$ 与 $\overrightarrow{OC_2}$ 垂直.

③ $\because \cos 30^\circ \times \sin 30^\circ + \tan 45^\circ \times \tan 45^\circ \neq 0$,

$\therefore \overrightarrow{OD_1}$ 与 $\overrightarrow{OD_2}$ 不垂直.

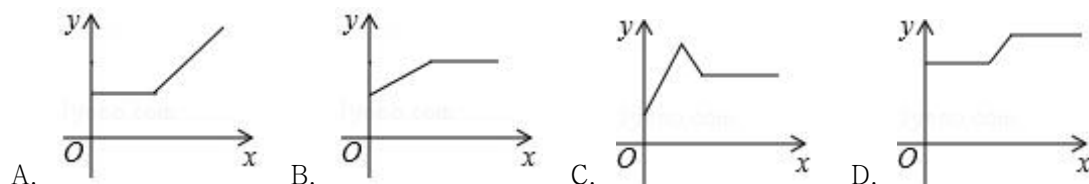
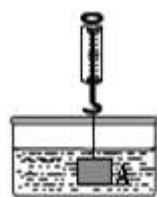
④ $\because (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$,

$\therefore \overrightarrow{OE_1}$ 与 $\overrightarrow{OE_2}$ 不垂直.

故选：A.

【点评】本题考查平面向量、零指数幂、特殊角的三角函数等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

7. (3分) 如图，在物理课上，老师将挂在弹簧测力计下端的铁块浸没于水中，然后缓慢匀速向上提起，直至铁块完全露出水面一定高度，则下图能反映弹簧测力计的读数 y (单位: N) 与铁块被提起的高度 x (单位: cm) 之间的函数关系的大致图象是 ()



【分析】根据题意，利用分类讨论的数学思想可以解答本题.

【解答】解：由题意可知，

铁块露出水面以前， $F_{\text{拉}} + F_{\text{浮}} = G$ ，浮力不变，故此过程中弹簧的度数不变，

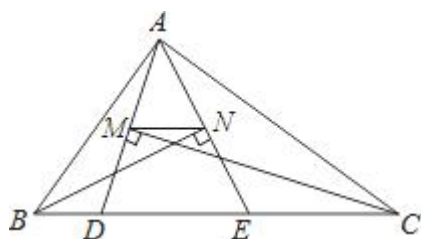
当铁块慢慢露出水面开始，浮力减小，则拉力增加，

当铁块完全露出水面后，拉力等于重力，

故选：D.

【点评】本题考查函数图象，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合和分类讨论的数学思想解答.

8. (3分) 如图， $\triangle ABC$ 的周长为 19，点 D, E 在边 BC 上， $\angle ABC$ 的平分线垂直于 AE ，垂足为 N ， $\angle ACB$ 的平分线垂直于 AD ，垂足为 M ，若 $BC=7$ ，则 MN 的长度为 ()



- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. 3

【分析】证明 $\triangle BNA \cong \triangle BNE$ ，得到 $BA=BE$ ，即 $\triangle BAE$ 是等腰三角形，同理 $\triangle CAD$ 是等腰

三角形，根据题意求出 DE，根据三角形中位线定理计算即可．

【解答】解：∵BN 平分 $\angle ABC$ ， $BN \perp AE$ ，

$$\therefore \angle NBA = \angle NBE, \quad \angle BNA = \angle BNE,$$

在 $\triangle BNA$ 和 $\triangle BNE$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABN = \angle EBN \\ BN = BN \\ \angle ANB = \angle ENB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BNA \cong \triangle BNE,$$

$$\therefore BA = BE,$$

∴ $\triangle BAE$ 是等腰三角形，

同理 $\triangle CAD$ 是等腰三角形，

∴ 点 N 是 AE 中点，点 M 是 AD 中点（三线合一），

∴ MN 是 $\triangle ADE$ 的中位线，

$$\therefore BE + CD = AB + AC = 19 - BC = 19 - 7 = 12,$$

$$\therefore DE = BE + CD - BC = 5,$$

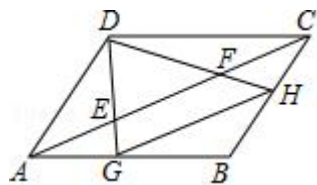
$$\therefore MN = \frac{1}{2}DE = \frac{5}{2}.$$

故选：C．

【点评】 本题考查的是三角形中位线定理、等腰三角形的性质，掌握三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半是解题的关键．

9. (3 分) 如图，E，F 是平行四边形 ABCD 对角线 AC 上两点， $AE = CF = \frac{1}{4}AC$ ．连接 DE，

DF 并延长，分别交 AB，BC 于点 G，H，连接 GH，则 $\frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle BGH}}$ 的值为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

【分析】 首先证明 $AG : AB = CH : BC = 1 : 3$ ，推出 $GH \parallel BC$ ，推出 $\triangle BGH \sim \triangle BAC$ ，可得

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BGH}} = \frac{S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle BGH}} = \left(\frac{BA}{BG}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad \frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{1}{3}, \quad \text{由此即可解决问题.}$$

【解答】解：∵ 四边形 ABCD 是平行四边形

$$\therefore AD=BC, \quad DC=AB,$$

$$\therefore AC=CA,$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CBA,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore AE=CF=\frac{1}{4}AC, \quad AG \parallel CD, \quad CH \parallel AD,$$

$$\therefore AG:DC=AE:CE=1:3, \quad CH:AD=CF:AF=1:3,$$

$$\therefore AG:AB=CH:BC=1:3,$$

$$\therefore GH \parallel BC,$$

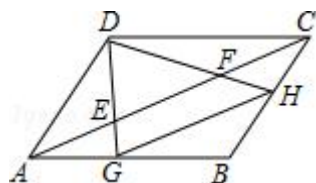
$$\therefore \triangle BGH \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BGH}} = \frac{S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle BGH}} = \left(\frac{BA}{BG}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle BGH}} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4},$$

故选：C.



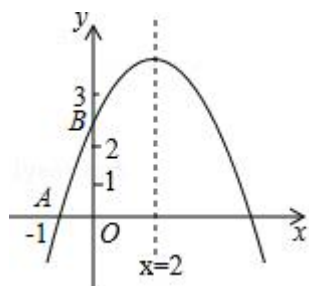
【点评】本题考查平行四边形的性质、相似三角形的判定和性质、全等三角形的判定和性质、等高模型等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考选择题中的压轴题.

10. (3分) 如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，与 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 与 $(0, 3)$ 之间（不包括这两点），对称轴为直线 $x=2$.

下列结论：① $abc < 0$ ；② $9a+3b+c > 0$ ；③若点 $M\left(\frac{1}{2}, y_1\right)$ ，点 $N\left(\frac{5}{2}, y_2\right)$ 是函数图象上的

两点，则 $y_1 < y_2$ ；④ $-\frac{3}{5} < a < -\frac{2}{5}$.

其中正确结论有 ()



A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】 根据二次函数的图象与系数的关系即可求出答案.

【解答】 解：①由开口可知： $a < 0$,

$$\therefore \text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} > 0,$$

$$\therefore b > 0,$$

由抛物线与 y 轴的交点可知： $c > 0$,

$$\therefore abc < 0, \text{ 故①正确;}$$

② $\because$ 抛物线与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$,

对称轴为 $x=2$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另外一个交点为 $(5, 0)$,

$$\therefore x=3 \text{ 时, } y > 0,$$

$$\therefore 9a+3b+c > 0, \text{ 故②正确;}$$

$$\text{③由于 } \frac{1}{2} < 2 < \frac{5}{2},$$

且 $(\frac{5}{2}, y_2)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点的坐标为 $(\frac{3}{2}, y_2)$,

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{3}{2},$$

$$\therefore y_1 < y_2, \text{ 故③正确,}$$

$$\text{④ } \because -\frac{b}{2a} = 2,$$

$$\therefore b = -4a,$$

$$\because x = -1, y = 0,$$

$$\therefore a - b + c = 0,$$

$$\therefore c = -5a,$$

$$\because 2 < c < 3,$$

$$\therefore 2 < -5a < 3,$$

$$\therefore -\frac{3}{5} < a < -\frac{2}{5}, \text{ 故④正确}$$

故选: D.

【点评】 本题考查二次函数的图象与性质, 解题的关键是熟练运用图象与系数的关系, 本题属于中等题型.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

11. (3 分) 受益于电子商务发展和法治环境改善等多重因素, 快递业务迅猛发展. 预计达州市 2018 年快递业务量将达到 5.5 亿件, 数据 5.5 亿用科学记数法表示为 5.5×10^8 .

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】 解: 5.5 亿 $= 5\,5000\,0000 = 5.5 \times 10^8$,

故答案为: 5.5×10^8 .

【点评】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. (3 分) 已知 $a^m=3$, $a^n=2$, 则 a^{2m-n} 的值为 4.5 .

【分析】 首先根据幂的乘方的运算方法, 求出 a^{2m} 的值; 然后根据同底数幂的除法的运算方法, 求出 a^{2m-n} 的值为多少即可.

【解答】 解: $\because a^m=3$,

$$\therefore a^{2m}=3^2=9,$$

$$\therefore a^{2m-n} = \frac{a^{2m}}{a^n} = \frac{9}{2} = 4.5.$$

故答案为: 4.5.

【点评】 此题主要考查了同底数幂的除法法则, 以及幂的乘方与积的乘方, 同底数幂相除, 底数不变, 指数相减, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: ①底数 $a \neq 0$, 因为 0 不能做除数; ②单独的一个字母, 其指数是 1, 而不是 0; ③应用同底数幂除法的法则时, 底数

a 可是单项式，也可以是多项式，但必须明确底数是什么，指数是什么.

13. (3 分) 若关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-3} + \frac{3a}{3-x} = 2a$ 无解，则 a 的值为 1 或 $\frac{1}{2}$.

【分析】直接解分式方程，再利用当 $1-2a=0$ 时，当 $1-2a \neq 0$ 时，分别得出答案.

【解答】解：去分母得：

$$x - 3a = 2a(x - 3),$$

$$\text{整理得：}(1 - 2a)x = -3a,$$

当 $1 - 2a = 0$ 时，方程无解，故 $a = \frac{1}{2}$;

当 $1 - 2a \neq 0$ 时， $x = \frac{-3a}{1-2a} = 3$ 时，分式方程无解，

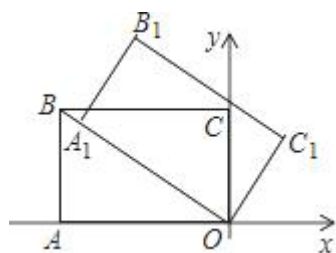
则 $a = 1$,

故关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-3} + \frac{3a}{3-x} = 2a$ 无解，则 a 的值为：1 或 $\frac{1}{2}$.

故答案为：1 或 $\frac{1}{2}$.

【点评】此题主要考查了分式方程的解，正确分类讨论是解题关键.

14. (3 分) 如图，平面直角坐标系中，矩形 OABC 的顶点 A (-6, 0)，C (0, $2\sqrt{3}$)。将矩形 OABC 绕点 O 顺时针方向旋转，使点 A 恰好落在 OB 上的点 A_1 处，则点 B 的对应点 B_1 的坐标为 $(-2\sqrt{3}, 6)$.



【分析】连接 OB_1 ，作 $B_1H \perp OA$ 于 H，证明 $\triangle AOB \cong \triangle HB_1O$ ，得到 $B_1H = OA = 6$ ， $OH = AB = 2\sqrt{3}$ ，得到答案.

【解答】解：连接 OB_1 ，作 $B_1H \perp OA$ 于 H，

由题意得， $OA = 6$ ， $AB = OC = 2\sqrt{3}$ ，

$$\text{则 } \tan \angle BOA = \frac{AB}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore \angle BOA = 30^\circ$,

$$\therefore \angle OBA = 60^\circ,$$

由旋转的性质可知, $\angle B_1OB = \angle BOA = 30^\circ$,

$$\therefore \angle B_1OH = 60^\circ,$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle HB_1O$,

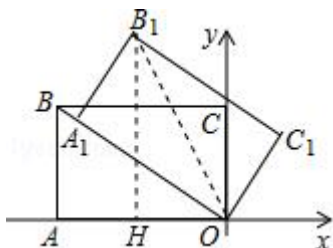
$$\begin{cases} \angle B_1HO = \angle BAO \\ \angle B_1OH = \angle ABO, \\ OB_1 = OB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle HB_1O,$$

$$\therefore B_1H = OA = 6, OH = AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } B_1 \text{ 的坐标为 } (-2\sqrt{3}, 6),$$

故答案为: $(-2\sqrt{3}, 6)$.



【点评】 本题考查的是矩形的性质、旋转变换的性质, 掌握矩形的性质、全等三角形的判定和性质定理是解题的关键.

15. (3分) 已知: $m^2 - 2m - 1 = 0$, $n^2 + 2n - 1 = 0$ 且 $mn \neq 1$, 则 $\frac{mn+n+1}{n}$ 的值为 3.

【分析】 将 $n^2 + 2n - 1 = 0$ 变形为 $\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} - 1 = 0$, 据此可得 $m, \frac{1}{n}$ 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根,

由韦达定理可得 $m + \frac{1}{n} = 2$, 代入 $\frac{mn+n+1}{n} = m + 1 + \frac{1}{n}$ 可得.

【解答】 解: 由 $n^2 + 2n - 1 = 0$ 可知 $n \neq 0$.

$$\therefore 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = 0.$$

$$\therefore \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} - 1 = 0,$$

又 $m^2 - 2m - 1 = 0$, 且 $mn \neq 1$, 即 $m \neq \frac{1}{n}$.

$\therefore m, \frac{1}{n}$ 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根.

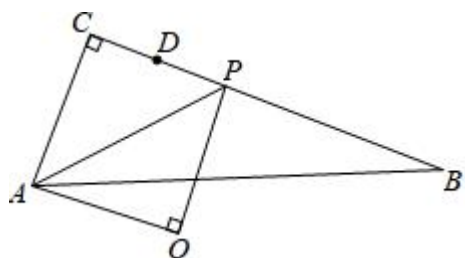
$$\therefore m + \frac{1}{n} = 2.$$

$$\therefore \frac{mn+n+1}{n} = m+1 + \frac{1}{n} = 2+1=3,$$

故答案为：3.

【点评】 本题主要考查根与系数的关系，解题的关键是将方程变形后得出 m ， $\frac{1}{n}$ 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根及韦达定理.

16. (3分) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=2$ ， $BC=5$ ，点 D 是 BC 边上一点且 $CD=1$ ，点 P 是线段 DB 上一动点，连接 AP ，以 AP 为斜边在 AP 的下方作等腰 $\text{Rt}\triangle AOP$ 。当 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径长为 $2\sqrt{2}$ 。



【分析】 过 O 点作 $OE \perp CA$ 于 E ， $OF \perp BC$ 于 F ，连接 CO ，如图，易得四边形 $OECF$ 为矩形，由 $\triangle AOP$ 为等腰直角三角形得到 $OA=OP$ ， $\angle AOP=90^\circ$ ，则可证明 $\triangle OAE \cong \triangle OPF$ ，所以 $AE=PF$ ， $OE=OF$ ，根据角平分线的性质定理的逆定理得到 CO 平分 $\angle ACP$ ，从而可判断当 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径为一条线段，接着证明 $CE = \frac{1}{2}(AC+CP)$ ，然后分别计算 P 点在 D 点和 B 点时 OC 的长，从而计算它们的差即可得到 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径长.

【解答】 解：过 O 点作 $OE \perp CA$ 于 E ， $OF \perp BC$ 于 F ，连接 CO ，如图，
 $\because \triangle AOP$ 为等腰直角三角形，
 $\therefore OA=OP$ ， $\angle AOP=90^\circ$ ，
 易得四边形 $OECF$ 为矩形，
 $\therefore \angle EOF=90^\circ$ ， $CE=CF$ ，
 $\therefore \angle AOE=\angle POF$ ，
 $\therefore \triangle OAE \cong \triangle OPF$ ，
 $\therefore AE=PF$ ， $OE=OF$ ，
 $\therefore CO$ 平分 $\angle ACP$ ，
 $\therefore$ 当 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径为一条线段，

$\therefore AE=PF$,

即 $AC - CE = CF - CP$,

而 $CE=CF$,

$$\therefore CE = \frac{1}{2} (AC+CP),$$

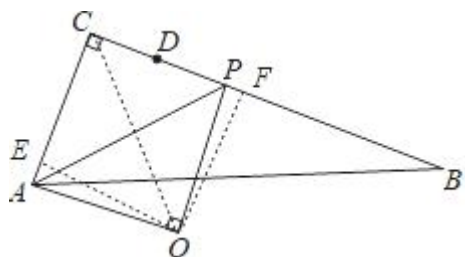
$$\therefore OC = \sqrt{2}CE = \frac{\sqrt{2}}{2} (AC+CP),$$

$$\text{当 } AC=2, CP=CD=1 \text{ 时, } OC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2+1) = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{当 } AC=2, CP=CB=5 \text{ 时, } OC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2+5) = \frac{7\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \text{当 } P \text{ 从点 } D \text{ 出发运动至点 } B \text{ 停止时, 点 } O \text{ 的运动路径长} = \frac{7\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

故答案为 $2\sqrt{2}$.



【点评】 本题考查了轨迹：灵活运用几何性质确定图形运动过程中不变的几何量，从而判定轨迹的几何特征，然后进行几何计算．也考查了全等三角形的判定与性质．

三、解答题

17. (6分) 计算： $(-1)^{2018} + (-\frac{1}{2})^{-2} - |2 - \sqrt{12}| + 4\sin 60^\circ$ ；

【分析】 本题涉及乘方、负指数幂、二次根式化简、绝对值和特殊角的三角函数 5 个考点．在计算时，需要针对每个考点分别进行计算，然后根据实数的运算法则求得计算结果．

【解答】 解：原式 $= 1 + 4 - (2\sqrt{3} - 2) + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$= 1 + 4 - 2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3},$$

$$= 7.$$

【点评】 本题主要考查了实数的综合运算能力，是各地中考题中常见的计算题型．解决此类题目的关键是熟练掌握负整数指数幂、零指数幂、二次根式、绝对值等考点的运算．

18. (6分) 化简代数式: $(\frac{3x}{x-1} - \frac{x}{x+1}) \div \frac{x}{x^2-1}$, 再从不等式组 $\begin{cases} x-2(x-1) \geq 1 \\ 6x+10 > 3x+1 \end{cases}$ 的解集中

取一个合适的整数值代入, 求出代数式的值.

【分析】直接将=去括号利用分式混合运算法则化简, 再解不等式组, 进而得出 x 的值, 即可计算得出答案.

【解答】解: 原式 $= \frac{3x}{x-1} \times \frac{(x+1)(x-1)}{x} - \frac{x}{x+1} \times \frac{(x+1)(x-1)}{x}$

$= 3(x+1) - (x-1)$

$= 2x+4,$

$\begin{cases} x-2(x-1) \geq 1 & \text{①} \\ 6x+10 > 3x+1 & \text{②} \end{cases}$

解①得: $x \leq 1,$

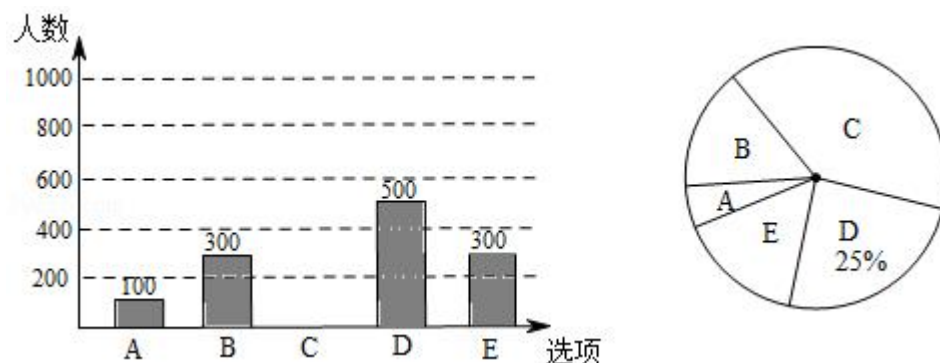
解②得: $x > -3,$

故不等式组的解集为: $-3 < x \leq 1,$

把 $x = -2$ 代入得: 原式 $= 0.$

【点评】此题主要考查了分式的化简求值以及不等式组解法, 正确掌握分式的混合运算法则是解题关键.

19. (7分) 为调查达州市民上班时最常用的交通工具的情况, 随机抽取了部分市民进行调查, 要求被调查者从“A: 自行车, B: 电动车, C: 公交车, D: 家庭汽车, E: 其他”五个选项中选择最常用的一项. 将所有调查结果整理后绘制成如下不完整的条形统计图和扇形统计图, 请结合统计图回答下列问题.



(1) 本次调查中, 一共调查了 2000 名市民; 扇形统计图中, B 项对应的扇形圆心角是 54 度; 补全条形统计图;

(2) 若甲、乙两人上班时从 A, B, C, D 四种交通工具中随机选择一种, 请用列表法或画

树状图的方法，求出甲、乙两人恰好选择同一种交通工具上班的概率.

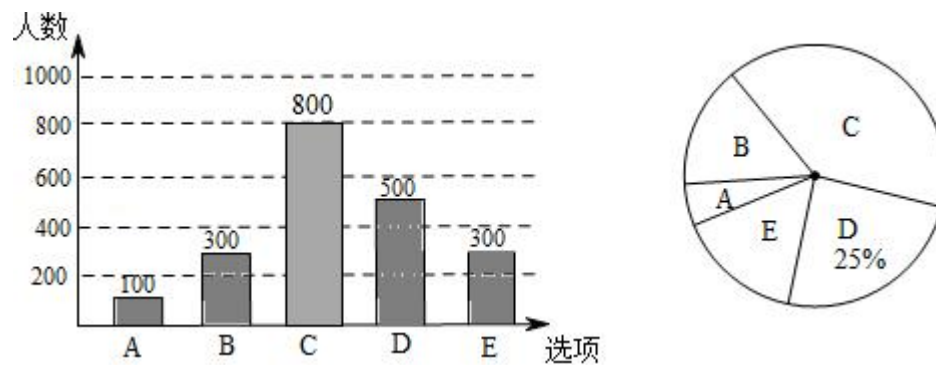
【分析】 (1) 根据 D 组的人数以及百分比，即可得到被调查的人数，进而得出 C 组的人数，再根据扇形圆心角的度数=部分占总体的百分比 $\times 360^\circ$ 进行计算即可；

(2) 根据甲、乙两人上班时从 A、B、C、D 四种交通工具中随机选择一种画树状图或列表，即可运用概率公式得到甲、乙两人恰好选择同一种交通工具上班的概率.

【解答】 解：(1) 本次调查的总人数为 $500 \div 25\% = 2000$ 人，扇形统计图中，B 项对应的扇形圆心角是 $360^\circ \times \frac{300}{2000} = 54^\circ$ ，

C 选项的人数为 $2000 - (100 + 300 + 500 + 300) = 800$ ，

补全条形图如下：



故答案为：2000、54；

(2) 列表如下：

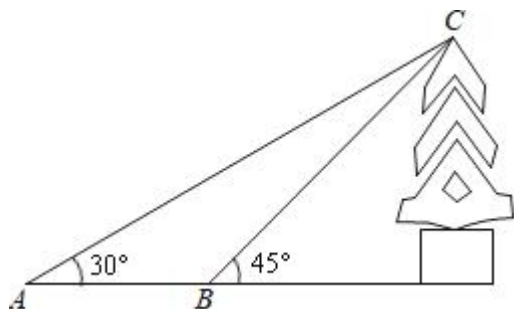
	A	B	C	D
A	(A, A)	(B, A)	(C, A)	(D, A)
B	(A, B)	(B, B)	(C, B)	(D, B)
C	(A, C)	(B, C)	(C, C)	(D, C)
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	(D, D)

由表可知共有 16 种等可能结果，其中甲、乙两人恰好选择同一种交通工具上班的结果有 4 种，

所以甲、乙两人恰好选择同一种交通工具上班的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

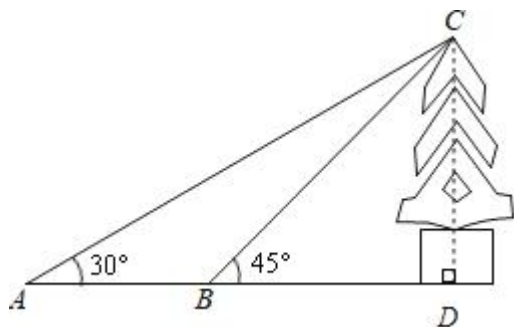
【点评】 此题考查了条形统计图、扇形统计图和概率公式的运用，解题的关键是仔细观察统计图并从中整理出进一步解题的有关信息，条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

20. (6 分) 在数学实践活动课上, 老师带领同学们到附近的湿地公园测量园内雕塑的高度. 用测角仪在 A 处测得雕塑顶端点 C' 的仰角为 30° , 再往雕塑方向前进 4 米至 B 处, 测得仰角为 45° . 问: 该雕塑有多高? (测角仪高度忽略不计, 结果不取近似值.)



【分析】 过点 C 作 $CD \perp AB$, 设 $CD=x$, 由 $\angle CBD=45^\circ$ 知 $BD=CD=x$ 米, 根据 $\tan A = \frac{CD}{AD}$ 列出关于 x 的方程, 解之可得.

【解答】 解: 如图, 过点 C 作 $CD \perp AB$, 交 AB 延长线于点 D,



设 $CD=x$ 米,

$\because \angle CBD=45^\circ$, $\angle BDC=90^\circ$,

$\therefore BD=CD=x$ 米,

$\because \angle A=30^\circ$, $AD=AB+BD=4+x$,

$\therefore \tan A = \frac{CD}{AD}$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{4+x}$,

解得: $x=2+2\sqrt{3}$,

答: 该雕塑的高度为 $(2+2\sqrt{3})$ 米.

【点评】 本题主要考查解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题, 解题的关键是根据题意构建直角三角形, 并熟练掌握三角函数的应用.

21. (7 分) “绿水青山就是金山银山”的理念已融入人们的日常生活中, 因此, 越来越多

的人喜欢骑自行车出行. 某自行车店在销售某型号自行车时, 以高出进价的 50% 标价. 已知按标价九折销售该型号自行车 8 辆与将标价直降 100 元销售 7 辆获利相同.

(1) 求该型号自行车的进价和标价分别是多少元?

(2) 若该型号自行车的进价不变, 按 (1) 中的标价出售, 该店平均每月可售出 51 辆; 若每辆自行车每降价 20 元, 每月可多售出 3 辆, 求该型号自行车降价多少元时, 每月获利最大? 最大利润是多少?

【分析】 (1) 设进价为 x 元, 则标价是 $1.5x$ 元, 根据关键语句: 按标价九折销售该型号自行车 8 辆的利润是 $1.5x \times 0.9 \times 8 - 8x$, 将标价直降 100 元销售 7 辆获利是 $(1.5x - 100) \times 7 - 7x$, 根据利润相等可得方程 $1.5x \times 0.9 \times 8 - 8x = (1.5x - 100) \times 7 - 7x$, 再解方程即可得到进价, 进而得到标价;

(2) 设该型号自行车降价 a 元, 利润为 w 元, 利用销售量 $\times$ 每辆自行车的利润 = 总利润列出函数关系式, 再利用配方法求最值即可.

【解答】 解: (1) 设进价为 x 元, 则标价是 $1.5x$ 元, 由题意得:

$$1.5x \times 0.9 \times 8 - 8x = (1.5x - 100) \times 7 - 7x,$$

解得: $x = 1000$,

$$1.5 \times 1000 = 1500 \text{ (元)},$$

答: 进价为 1000 元, 标价为 1500 元;

(2) 设该型号自行车降价 a 元, 利润为 w 元, 由题意得:

$$w = (51 + \frac{a}{20} \times 3) (1500 - 1000 - a),$$

$$= -\frac{3}{20} (a - 80)^2 + 26460,$$

$$\therefore -\frac{3}{20} < 0,$$

$\therefore$ 当 $a = 80$ 时, $w_{\text{最大}} = 26460$,

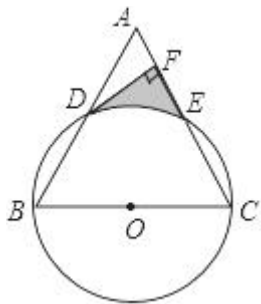
答: 该型号自行车降价 80 元出售每月获利最大, 最大利润是 26460 元.

【点评】 此题主要考查了二次函数的应用, 以及元一次方程的应用, 关键是正确理解题意, 根据已知得出 w 与 a 的关系式, 进而求出最值.

22. (8 分) 已知: 如图, 以等边 $\triangle ABC$ 的边 BC 为直径作 $\odot O$, 分别交 AB , AC 于点 D , E , 过点 D 作 $DF \perp AC$ 交 AC 于点 F .

(1) 求证: DF 是 $\odot O$ 的切线;

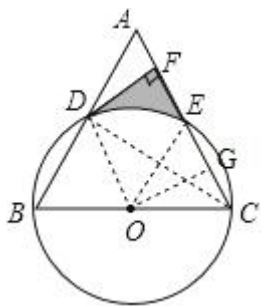
(2) 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为8, 求由 $\widehat{DE}$ 、DF、EF围成的阴影部分面积.



【分析】 (1) 连接 CD、OD, 先利用等腰三角形的性质证 $AD=BD$, 再证 OD 为 $\triangle ABC$ 的中位线得 $DO \parallel AC$, 根据 $DF \perp AC$ 可得;

(2) 连接 OE、作 $OG \perp AC$, 求出 EF、DF 的长及 $\angle DOE$ 的度数, 根据阴影部分面积 $= S_{\text{梯形 EFDO}} - S_{\text{扇形 DOE}}$ 计算可得.

【解答】 解: (1) 如图, 连接 CD、OD,



$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle CDB = 90^\circ$, 即 $CD \perp AB$,

又 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AD = BD$,

$\because BO = CO$,

$\therefore DO$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore OD \parallel AC$,

$\because DF \perp AC$,

$\therefore DF \perp OD$,

$\therefore DF$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 连接 OE、作 $OG \perp AC$ 于点 G,

$\therefore \angle OGF = \angle DFG = \angle ODF = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 OGF D 是矩形,
 $\therefore$ FG=OD=4,
 $\because$ OC=OE=OD=OB, 且 $\angle$ COE= $\angle$ B= 60° ,
 $\therefore$ $\triangle$ OBD 和 $\triangle$ OCE 均为等边三角形,
 $\therefore$ $\angle$ BOD= $\angle$ COE= 60° , CE=OC=4,
 $\therefore$ EG= $\frac{1}{2}$ CE=2、DF=OG=OCsin $60^\circ=2\sqrt{3}$, $\angle$ DOE= 60° ,
 $\therefore$ EF=FG-EG=2,

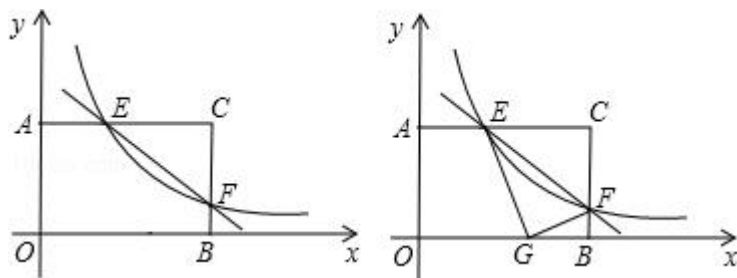
则阴影部分面积为 $S_{\text{梯形 EFDO}} - S_{\text{扇形 DOE}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times (2+4) \times 2\sqrt{3} - \frac{60 \cdot \pi \cdot 4^2}{360} \\
 &= 6\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

【点评】 本题主要考查了切线的判定与性质，等边三角形的性质，垂径定理等知识. 判断直线和圆的位置关系，一般要猜想是相切，再证直线和半径的夹角为 90° 即可. 注意利用特殊的三角形和三角函数来求得相应的线段长.

23. (9 分) 矩形 AOB C 中, OB=4, OA=3. 分别以 OB, OA 所在直线为 x 轴, y 轴, 建立如图 1 所示的平面直角坐标系. F 是 BC 边上一个动点 (不与 B, C 重合), 过点 F 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 的图象与边 AC 交于点 E.

- (1) 当点 F 运动到边 BC 的中点时, 求点 E 的坐标;
- (2) 连接 EF, 求 $\angle$ EFC 的正切值;
- (3) 如图 2, 将 $\triangle$ CEF 沿 EF 折叠, 点 C 恰好落在边 OB 上的点 G 处, 求此时反比例函数的解析式.



- 【分析】** (1) 先确定出点 C 坐标, 进而得出点 F 坐标, 即可得出结论;
 (2) 先确定出点 F 的横坐标, 进而表示出点 F 的坐标, 得出 CF, 同理表示出 CF, 即可得出结论;

(3) 先判断出 $\triangle EHG \sim \triangle GBF$ ，即可求出 BG，最后用勾股定理求出 k，即可得出结论.

【解答】解：(1) $\because OA=3, OB=4,$

$\therefore B(4, 0), C(4, 3),$

$\because F$ 是 BC 的中点,

$\therefore F(4, \frac{3}{2}),$

$\because F$ 在反比例 $y=\frac{k}{x}$ 函数图象上,

$\therefore k=4 \times \frac{3}{2}=6,$

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y=\frac{6}{x},$

$\because E$ 点的坐标为 3,

$\therefore E(2, 3);$

(2) $\because F$ 点的横坐标为 4,

$\therefore F(4, \frac{k}{4}),$

$\therefore CF=BC-BF=3-\frac{k-12-k}{4}$

$\because E$ 的纵坐标为 3,

$\therefore E(\frac{k}{3}, 3),$

$\therefore CE=AC-AE=4-\frac{k-12-k}{3},$

在 $Rt\triangle CEF$ 中, $\tan \angle EFC=\frac{CE}{CF}=\frac{4}{3},$

(3) 如图, 由 (2) 知, $CF=\frac{12-k}{4}, CE=\frac{12-k}{3}, \frac{CE}{CF}=\frac{4}{3},$

过点 E 作 $EH \perp OB$ 于 H,

$\therefore EH=OA=3, \angle EHG=\angle GBF=90^\circ,$

$\therefore \angle EGH+\angle HEG=90^\circ,$

由折叠知, $EG=CE, FG=CF, \angle EGF=\angle C=90^\circ,$

$\therefore \angle EGH+\angle BGF=90^\circ,$

$\therefore \angle HEG=\angle BGF,$

$$\because \angle EHG = \angle GBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EHG \sim \triangle GBF,$$

$$\therefore \frac{EH}{BG} = \frac{EG}{FG} = \frac{CE}{CF},$$

$$\therefore \frac{3}{BG} = \frac{4}{3},$$

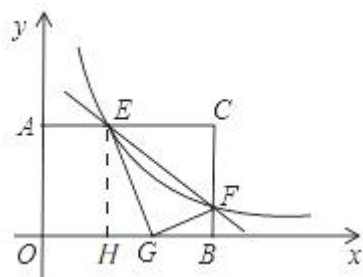
$$\therefore BG = \frac{9}{4},$$

在 $\text{Rt}\triangle FBG$ 中, $FG^2 - BF^2 = BG^2$,

$$\therefore \left(\frac{12-k}{4}\right)^2 - \left(\frac{k}{4}\right)^2 = \frac{81}{16},$$

$$\therefore k = \frac{21}{8},$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{21}{8x}.$$

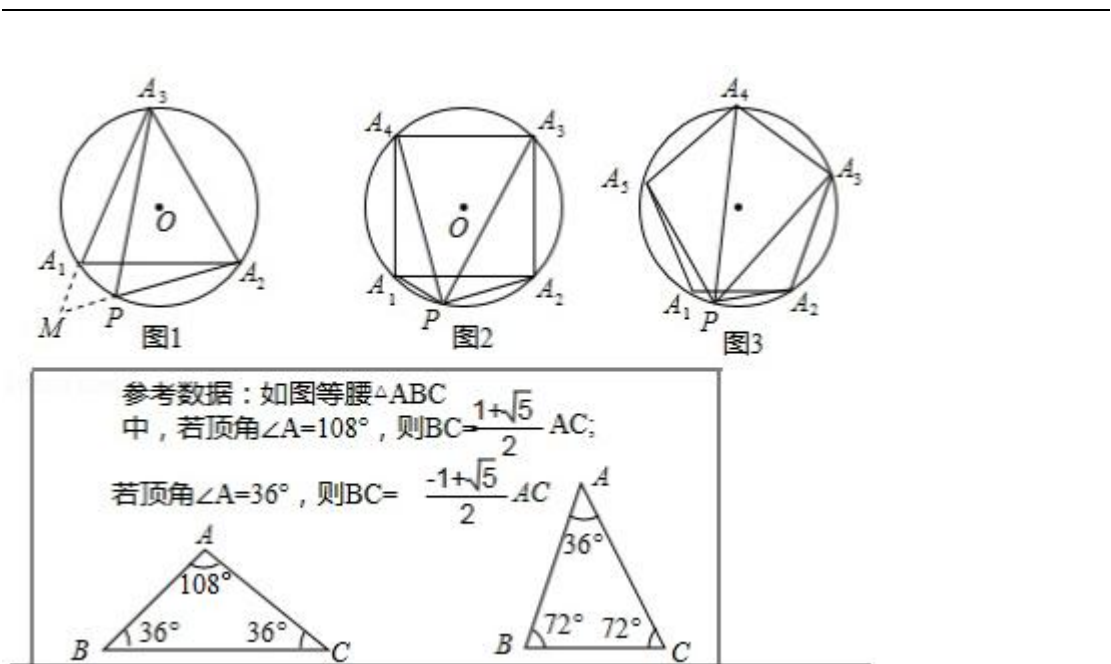


【点评】此题是反比例函数综合题，主要考查了待定系数法，中点坐标公式，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数，求出 $CE:CF$ 是解本题的关键。

24. (11 分) 阅读下列材料:

已知: 如图 1, 等边 $\triangle A_1A_2A_3$ 内接于 $\odot O$, 点 P 是 $\widehat{A_1A_2}$ 上的任意一点, 连接 PA_1 , PA_2 , PA_3 ,

可证: $PA_1 + PA_2 = PA_3$, 从而得到: $\frac{PA_1 + PA_2}{PA_1 + PA_2 + PA_3} = \frac{1}{2}$ 是定值.



(1) 以下是小红的一种证明方法，请在方框内将证明过程补充完整；

证明：如图 1，作 $\angle PA_1M=60^\circ$ ， A_1M 交 A_2P 的延长线于点 M 。

$\because \triangle A_1A_2A_3$ 是等边三角形，

$\therefore \angle A_3A_1A_2=60^\circ$ ，

$\therefore \angle A_3A_1P=\angle A_2A_1M$

又 $A_3A_1=A_2A_1$ ， $\angle A_1A_3P=\angle A_1A_2P$ ，

$\therefore \triangle A_1A_3P \cong \triangle A_1A_2M$



$\therefore PA_3=MA_2=PA_2+PM=PA_2+PA_1$ 。

$\therefore \frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3}=\frac{1}{2}$ ，是定值。

(2) 延伸：如图 2，把 (1) 中条件“等边 $\triangle A_1A_2A_3$ ”改为“正方形 $A_1A_2A_3A_4$ ”，其余条件

不变，请问： $\frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3+PA_4}$ 还是定值吗？为什么？

(3) 拓展：如图 3，把 (1) 中条件“等边 $\triangle A_1A_2A_3$ ”改为“正五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ ”，其余

条件不变，则 $\frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3+PA_4+PA_5}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{8}$ （只写出结果）。

【分析】(2) 结论: $\frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3+PA_4}$ 是定值. 在 A_4P 上截取 $AH=A_2P$, 连接 HA_1 . 想

办法证明 $PA_4=A_4+PH=PA_2+\sqrt{2}PA_1$, 同法可证: $PA_3=PA_1+\sqrt{2}PA_2$, 推出 $(\sqrt{2}+1)(PA_1+PA_2)=PA_3+PA_4$, 可得 $PA_1+PA_2=(\sqrt{2}-1)(PA_3+PA_4)$, 延长即可解决问题;

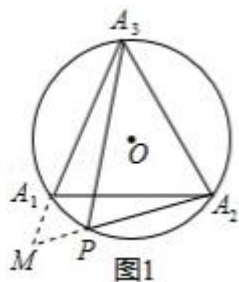
(3) 结论: 则 $\frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3+PA_4+PA_5}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{8}$. 如图 3-1 中, 延长 PA_1 到 H ,

使得 $A_1H=PA_2$, 连接 A_4H , A_4A_2 , A_4A_1 . 由 $\triangle HA_4A_1 \cong \triangle PA_4A_2$, 可得 $\triangle A_4HP$ 是顶角为 36° 的等腰三角形, 推出 $PH=\frac{\sqrt{5}-1}{2}PA_4$, 即 $PA_1+PA_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}PA_4$, 如图 3-2 中, 延长 PA_5 到 H ,

使得 $A_5H=PA_3$. 同法可证: $\triangle A_4HP$ 是顶角为 108° 的等腰三角形, 推出 $PH=\frac{\sqrt{5}+1}{2}PA_4$, 即

$PA_5+PA_3=\frac{\sqrt{5}+1}{2}PA_4$, 延长即可解决问题;

【解答】解: (1) 如图 1, 作 $\angle PA_1M=60^\circ$, A_1M 交 A_2P 的延长线于点 M .



$\therefore \triangle A_1A_2A_3$ 是等边三角形,

$\therefore \angle A_3A_1A_2=60^\circ$,

$\therefore \angle A_3A_1P=\angle A_2A_1M$

又 $A_3A_1=A_2A_1$, $\angle A_1A_3P=\angle A_1A_2P$,

$\therefore \triangle A_1A_3P \cong \triangle A_1A_2M$

$\therefore PA_3=MA_2$,

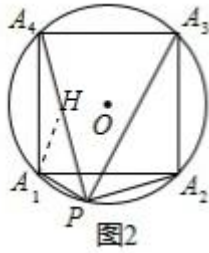
$\therefore PM=PA_1$,

$\therefore PA_3=MA_2=PA_2+PM=PA_2+PA_1$.

$\therefore \frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3}=\frac{1}{2}$, 是定值.

(2) 结论: $\frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3+PA_4}$ 是定值.

理由：在 A_4P 上截取 $AH=A_2P$ ，连接 HA_1 。



$\because$ 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形,

$\therefore A_4A_1=A_2A_1$,

$\because \angle A_1A_4H=\angle A_1A_2P$, $A_4H=A_2P$,

$\therefore \triangle A_1A_4H=\triangle A_1A_2P$,

$\therefore A_1H=PA_1$, $\angle A_4A_1H=\angle A_2A_1P$,

$\therefore \angle HA_1P=\angle A_4A_1A_2=90^\circ$

$\therefore \triangle HA_1P$ 的等腰直角三角形,

$\therefore PA_4=A_4+PH=PA_2+\sqrt{2}PA_1$,

同法可证: $PA_3=PA_1+\sqrt{2}PA_2$,

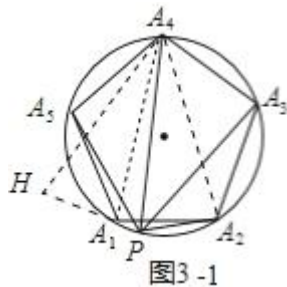
$\therefore (\sqrt{2}+1)(PA_1+PA_2)=PA_3+PA_4$,

$\therefore PA_1+PA_2=(\sqrt{2}-1)(PA_3+PA_4)$,

$\therefore \frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3+PA_4}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

(3) 结论: 则 $\frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3+PA_4+PA_5}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{8}$.

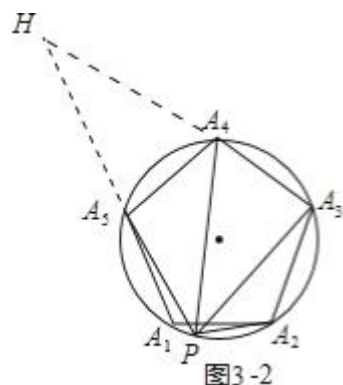
理由：如图 3-1 中，延长 PA_1 到 H ，使得 $A_1H=PA_2$ ，连接 A_4H ， A_4A_2 ， A_4A_1 。



由 $\triangle HA_4A_1 \cong \triangle PA_4A_2$ ，可得 $\triangle A_4HP$ 是顶角为 36° 的等腰三角形，

$\therefore PH=\frac{\sqrt{5}-1}{2}PA_4$ ，即 $PA_1+PA_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}PA_4$ ，

如图 3-2 中, 延长 PA_5 到 H , 使得 $A_5H=PA_3$.



同法可证: $\triangle A_4HP$ 是顶角为 108° 的等腰三角形,

$$\therefore PH = \frac{\sqrt{5}+1}{2}PA_4, \text{ 即 } PA_5+PA_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}PA_4,$$

$$\therefore \frac{PA_1+PA_2}{PA_1+PA_2+PA_3+PA_4+PA_5} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{8}.$$

故答案为 $\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{8}$.

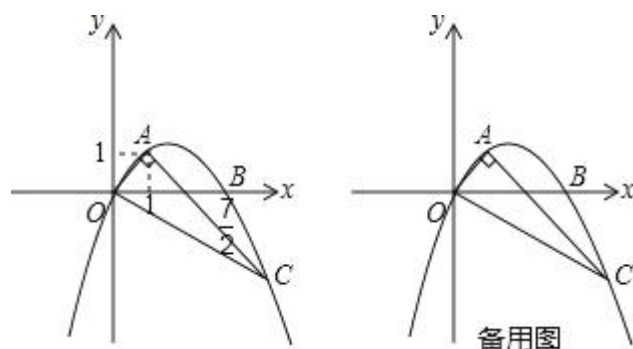
【点评】 本题考查圆综合题、正方形的性质、正五边形的性质、全等三角形的判定和性质等正整数, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题, 属于中考压轴题.

25. (12 分) 如图, 抛物线经过原点 $O(0, 0)$, 点 $A(1, 1)$, 点 $B(\frac{7}{2}, 0)$.

(1) 求抛物线解析式;

(2) 连接 OA , 过点 A 作 $AC \perp OA$ 交抛物线于 C , 连接 OC , 求 $\triangle AOC$ 的面积;

(3) 点 M 是 y 轴右侧抛物线上一动点, 连接 OM , 过点 M 作 $MN \perp OM$ 交 x 轴于点 N . 问: 是否存在点 M , 使以点 O, M, N 为顶点的三角形与 (2) 中的 $\triangle AOC$ 相似, 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由.



【分析】(1) 设交点式 $y=ax(x-\frac{7}{2})$ ，然后把 A 点坐标代入求出 a 即可得到抛物线解析式；

(2) 延长 CA 交 y 轴于 D，如图 1，易得 $OA=\sqrt{2}$ ， $\angle DOA=45^\circ$ ，则可判断 $\triangle AOD$ 为等腰直角三角形，所以 $OD=\sqrt{2}OA=2$ ，则 D (0, 2)，利用待定系数法求出直线 AD 的解析式为

$$y=-x+2, \text{再解方程组} \begin{cases} y=-x+2 \\ y=-\frac{2}{5}x^2+\frac{7}{5}x \end{cases} \text{得 } C(5, -3), \text{然后利用三角形面积公式, 利用 } S_{\triangle AOC}=S_{\triangle COD}-S_{\triangle AOD} \text{ 进行计算;}$$

(3) 如图 2，作 $MH \perp x$ 轴于 H， $AC=4\sqrt{2}$ ， $OA=\sqrt{2}$ ，设 $M(x, -\frac{2}{5}x^2+\frac{7}{5}x)$ ($x>0$)，根据三角形相似的判定，由于 $\angle OHM=\angle OAC$ ，则当 $\frac{OH}{OA}=\frac{MH}{AC}$ 时， $\triangle OHM \sim \triangle OAC$ ，即

$$\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{|\frac{2}{5}x^2+\frac{7}{5}x|}{4\sqrt{5}}; \text{当 } \frac{OH}{AC}=\frac{MH}{OA} \text{ 时, } \triangle OHM \sim \triangle CAO, \text{ 即 } \frac{x}{4\sqrt{2}}=\frac{|\frac{2}{5}x^2+\frac{7}{5}x|}{\sqrt{2}}, \text{ 则分别}$$

解关于 x 的绝对值方程可得到对应 M 点的坐标，由于 $\triangle OMH \sim \triangle ONM$ ，所以求得的 M 点能以点 O，M，N 为顶点的三角形与 (2) 中的 $\triangle AOC$ 相似。

【解答】解：(1) 设抛物线解析式为 $y=ax(x-\frac{7}{2})$ ，

把 A (1, 1) 代入得 $a \cdot 1 \cdot (1-\frac{7}{2})=1$ ，解得 $a=-\frac{2}{5}$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-\frac{2}{5}x(x-\frac{7}{2})$ ，

即 $y=-\frac{2}{5}x^2+\frac{7}{5}x$ ；

(2) 延长 CA 交 y 轴于 D，如图 1，

$\therefore A(1, 1)$ ，

$\therefore OA=\sqrt{2}$ ， $\angle DOA=45^\circ$ ，

$\therefore \triangle AOD$ 为等腰直角三角形，

$\therefore OA \perp AC$ ，

$\therefore OD=\sqrt{2}OA=2$ ，

$\therefore D(0, 2)$ ，

易得直线 AD 的解析式为 $y=-x+2$ ，

$$\text{解方程组} \begin{cases} y=-x+2 \\ y=-\frac{2}{5}x^2+\frac{7}{5}x \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}, \text{则 } C(5, -3),$$

$\therefore S_{\triangle AOC}=S_{\triangle COD}-S_{\triangle AOD}$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 5 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1$$

=4;

(3) 存在.

如图 2, 作 $MH \perp x$ 轴于 H , $AC = \sqrt{(5-1)^2 + (-3-1)^2} = 4\sqrt{2}$, $OA = \sqrt{2}$.

设 $M(x, -\frac{2}{5}x^2 + \frac{7}{5}x)$ ($x > 0$),

$\therefore \angle OHM = \angle OAC$,

$\therefore$ 当 $\frac{OH}{OA} = \frac{MH}{AC}$ 时, $\triangle OHM \sim \triangle OAC$, 即 $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{|-\frac{2}{5}x^2 + \frac{7}{5}x|}{4\sqrt{5}}$,

解方程 $-\frac{2}{5}x^2 + \frac{7}{5}x = 4x$ 得 $x_1 = 0$ (舍去), $x_2 = -\frac{13}{2}$ (舍去),

解方程 $-\frac{2}{5}x^2 + \frac{7}{5}x = -4x$ 得 $x_1 = 0$ (舍去), $x_2 = \frac{27}{2}$, 此时 M 点坐标为 $(\frac{27}{2}, -54)$;

当 $\frac{OH}{AC} = \frac{MH}{OA}$ 时, $\triangle OHM \sim \triangle CAO$, 即 $\frac{x}{4\sqrt{2}} = \frac{|-\frac{2}{5}x^2 + \frac{7}{5}x|}{\sqrt{2}}$,

解方程 $-\frac{2}{5}x^2 + \frac{7}{5}x = \frac{1}{4}x$ 得 $x_1 = 0$ (舍去), $x_2 = \frac{23}{8}$, 此时 M 点的坐标为 $(\frac{23}{8}, \frac{23}{32})$,

解方程 $-\frac{2}{5}x^2 + \frac{7}{5}x = -\frac{1}{4}x$ 得 $x_1 = 0$ (舍去), $x_2 = -\frac{33}{8}$, 此时 M 点坐标为 $(-\frac{33}{8}, -\frac{33}{32})$;

$\therefore MN \perp OM$,

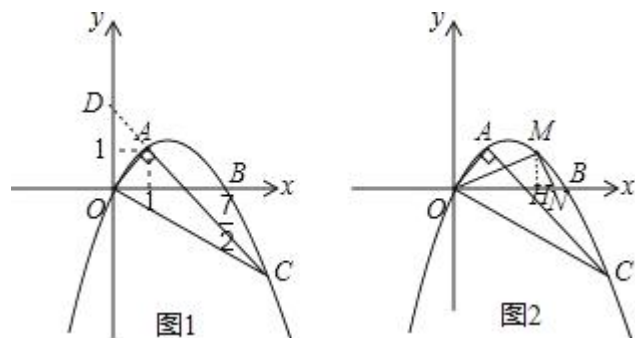
$\therefore \angle OMN = 90^\circ$,

$\therefore \angle MON = \angle HOM$,

$\therefore \triangle OMH \sim \triangle ONM$,

$\therefore$ 当 M 点的坐标为 $(\frac{27}{2}, -54)$ 或 $(\frac{23}{8}, \frac{23}{32})$ 或 $(-\frac{33}{8}, -\frac{33}{32})$ 时, 以点 O, M, N 为

顶点的三角形与 (2) 中的 $\triangle AOC$ 相似.



【点评】 本题考查了二次函数的综合题: 熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征和二次函数

的性质；会利用待定系数法求函数解析式，会解一元二次方程；理解坐标与图形性质；灵活运用相似比表示线段之间的关系；会运用分类讨论的思想解决数学问题.