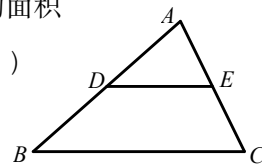


考点：几何体的三视图.

分析：几何体的三视图是从正面、左面和从上面看几何体得到的平面图形，主视图是从正面几何体得到的平面图形，本题从正面看几何体得到的是  . 故选 B.

6.如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点，若 $\triangle ADE$ 的面积为 4，则是 $\triangle ABC$ 的面积为

()



- A. 8 B. 12 C. 14 D. 16

考点：三角形的中位线定理、相似三角形的性质等.

分析：本题关键是抓住点 D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点，根据三角形的中位线定理可以推出

$$DE \parallel BC \text{ 且 } DE = \frac{1}{2}BC; \therefore DE \parallel BC \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC \therefore S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} =$$

$(DE:BC)^2 = 1:4$; 又 $\because \triangle ADE$ 的面积为 4 $\therefore \triangle ABC$ 的面积为 16. 故选 D.

7.在一次数学测试后，随机抽取九年级 (3) 班 5 名学生的成绩 (单位：分) 如下：80、98、98、83、91，关于这组数据的说法错误的是 ()

- A. 众数是 98 B. 平均数是 90 C. 中位数是 91 D. 方差是 56

考点：平均数、中位数、众数以及方差.

分析：本可以先确定平均数、中位数、众数分别为 90、91、98 . 所以用“排除法”就可以得出答案，直接计算 $S^2 = \frac{1}{5}[(80-90)^2 + \dots + (91-90)^2] = 55.6$ ，D 是错误的 . 故选 D.

8.回顾初中阶段函数的学习过程，从函数解析式到函数图象，再利用函数图象研究函数的性质，这种研究方法主要体现的数学思想是 ()

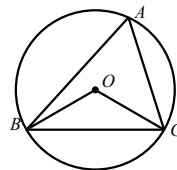
- A. 数形结合 B. 类比 C. 演绎 D. 公理化

考点：函数的表示法、函数的图象及其性质.

分析：函数的解析式和函数的图象都是函数的不同表示方法，从“函数解析式到函数图象”是数形结合起来研究函数的性质，所以体现的是“数形结合”的数学思想. 故选 A.

9.如图，若 $\triangle ABC$ 内接于半径为 R 的 $\odot O$ ，且 $\angle A = 60^\circ$ ，连接 OB 、 OC ，则边 BC 的长为

()



- A. $\sqrt{2}R$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ D. $\sqrt{3}R$

考点：圆周角定理、垂径定理、等腰三角形性质以及勾股定理等.

分析：本题可以根据垂径定理把问题转化在直角三角形，然后再利用勾股定理能使问题可以获得解决.

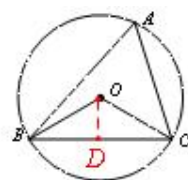
略解：过 $\odot O$ 的圆心 O 作 $OE \perp BC$ 于点 D .由垂径定理可得 $BC = 2CD$.

$$\because \widehat{BC} = \widehat{BC} \quad \therefore \angle BOC = 2\angle A = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

$$\because OB = OC, OD \perp BC \quad \therefore \angle DOC = \frac{1}{2} \angle BOC = 60^\circ$$

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{在 } Rt \triangle ODC \text{ 中, } OD = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} R$$



$$\text{根据勾股定理计算: } CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\therefore BC = 2CD = 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{3}R = \sqrt{3}R. \text{ 故选 D.}$$

10.从 $-1, 2, 3, -6$ 这四个数中任取两数,分别记为 m, n ,那么点 (m, n) 在函数 $y = \frac{6}{x}$ 图象的概率是 ()

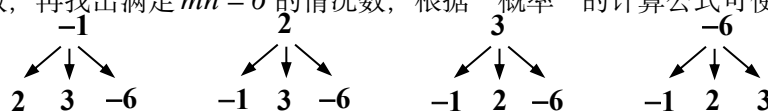
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

考点：概率、函数的图象及其性质.

分析：要使点 (m, n) 在函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上,则需满足 $mn = 6$.利用列举法(列表法或画树状图)

列举所有等可能的总数,再找出满足 $mn = 6$ 的情况数,根据“概率”的计算公式可使问题得以解决.

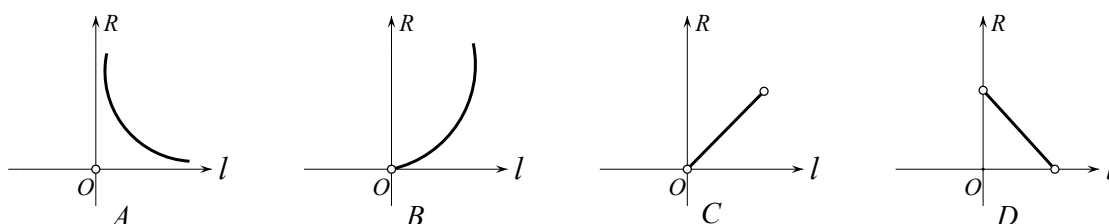
略解:



画出树状图为:

所有等可能的总数为 12 种,要关注的 $mn = 6$ 的情况数有 4 种; $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. 故选 B.

11.已知圆锥的侧面积是 $8\pi cm^2$,若圆锥底面半径为 $R(cm)$,母线长为 $l(cm)$,则 R 关于 l 的函数图象大致是 ()



考点：圆锥的侧面展开图、扇形的面积、反比例函数的图象及其性质.

分析：圆锥的侧面展开图是一个扇形，扇形的弧长为底圆的周长 $2\pi R$ ，扇形的半径为圆锥的母线长 $l(\text{cm})$. 根据扇形的面积公式有： $8 = \frac{1}{2}l \times 2\pi R$ 即 $R = \frac{8}{\pi l} (l > 0)$ ；根据反比例函数的图象及其性质，选择支 A 符合；故选 A.

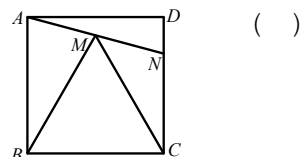
12. 如图，在边长为 a 正方形 $ABCD$ 中，把边 BC 绕点 B 逆时针旋转 60° ，得到线段 BM ，连接 AM 并延长交 CD 于 N ，连接 MC ，则 $\triangle MNC$ 的面积为

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}a^2$

B. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}a^2$

C. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}a^2$

D. $\frac{\sqrt{2}-1}{4}a^2$



考点：正方形的性质、等腰、等边三角形的性质、勾股定理以及三角形的面积等.

分析：

本题用正方形的面积来减去其它三个三角形的面积来得到 $\triangle MNC$ 的面积比较麻烦. 若我们抓住要正方形的性质、等腰、等边三角形的性质计算出在 $\triangle MNC$ 的 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 是特殊角，再通过添加边 MC 的高线，把问题先转化到直角三角形中后可以逐一解决.

略解：过 N 作 $NE \perp MC$ 于点 E .

如图根据正方形的性质、等腰、等边三角形的性质可以得到：

$$MC = BC = MB = AB = a, \quad \angle 1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \quad \angle 4 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

$$\text{容易计算出 } \angle 2 = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$

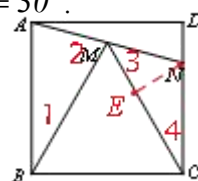
$$\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle BMC - \angle 2 = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$$

$$\therefore \angle MNE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \quad \therefore NE = ME$$

$$\text{若设 } NE = x, \text{ 则 } ME = x. \therefore \text{在 } Rt \triangle NEC \text{ 中, } \angle 4 = 30^\circ \therefore NC = 2NE = 2x$$

$$\text{根据勾股定理有 } EC = \sqrt{NC^2 - NE^2} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

$$\therefore ME + CE = x + \sqrt{3}x \text{ 即 } x + \sqrt{3}x = a, \text{ 解得: } x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a \text{ 即 } NE = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a$$



$$\therefore S_{\triangle MNC} = \frac{1}{2} MC \cdot DE = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}-1}{2} a = \frac{\sqrt{3}-1}{4} a^2. \text{ 故选 C.}$$

点评:

本题求 $\triangle MNC$ 的面积抓住图形是由特殊四边形和特殊三角形搭建起来的所以, 比较容易通过找出 $\triangle MNC$ 内角中的特殊角作为突破口, 然后通过作高线转化在直角三角形中解决问题, 是一道高质量的中考题!

二. 填空题(共 6 个小题, 每题 4 分, 共 24 分)

13. 分解因式: $ax^2 + 2axy + ay^2 =$ _____ .

考点: 因式分解.

分析: 本题先提取公因式, 再根据完全平方公式分解因式

略解: $ax^2 + 2axy + ay^2 = a(x^2 + 2xy + y^2) = a(x+y)^2$. 故应填: $a(x+y)^2$.

14. 化简 $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1}$ 的结果是 _____ .

考点: 分式的运算.

分析: 先通分, 再加减, 最后化简.

略解: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \dots = \frac{1}{x-1}$. 故应填: $\frac{1}{x-1}$.

15. 若函数 $y = x^2 + 2x - m$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点, 则 m 的值为 _____ .

考点: 二次函数的图象及其性质、二次综合问题.

分析: 二次函数 $y = x^2 + 2x - m$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点, 这个交点就是二次函数图象的顶点; 当令 $y=0$ 时, 对于方程 $x^2 + 2x - m = 0$ 有两个相等的实数根, 即 $\Delta = 0$, 可保证图象与 x 轴有且只有一个交点. 所以 $2^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 0$, 解得: $m = -1$. 故应填 -1 .

16. 六一儿童节, 某幼儿园用 100 元钱给小朋友买了甲、乙两种不同的玩具共 30 个, 单价分别为 2 元和 4 元, 则该幼儿园购买了甲、乙两种玩具分别为 _____ 、 _____ 个.

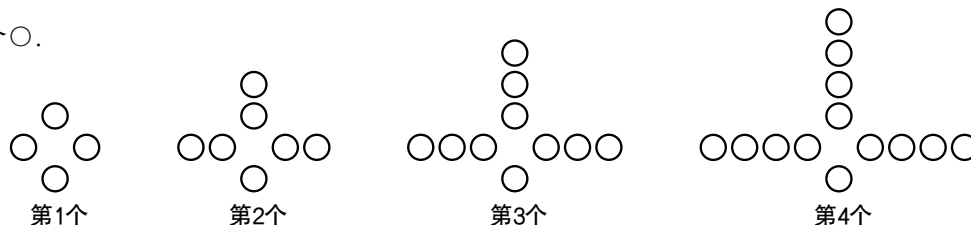
考点: 列方程 (组) 解应用题.

分析: 本题可以总费用和总个数建立方程则解决问题.

略解: 设该幼儿园购买了甲、乙两种玩具分别为 x 个和 y 个, 根据题意列:
$$\begin{cases} x+y=30 \\ 2x+4y=100 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} x=10 \\ y=20 \end{cases}$; 经检验, 符合题意. 故应填 10、20.

17. 观察下列图中所示的一系列图形, 它们是按一定规律排列的, 依照此规律, 第 2018 个图形共有 个 $\bigcirc$.

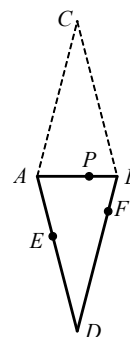


考点: 寻找规律、求代数式的值.

分析:

观察图形的排列: 第一个图 ($3+1$ 个 $\bigcirc$ 开始, 第二个图 ($3 \times 2+1$) 个 $\bigcirc$ 后面每个图在前面一个图形的基础上增加 3 个 $\bigcirc$, 故第 n 个图形是 $3n+1$;

故当 $n=2018$ 时, $3n+1=3 \times 2018+1=6055$. 故应填 6055.



18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC=2, AB=1$, 将它沿 AB 翻折得到 $\triangle ABD$, 则四边形 $ADBC$ 的形状是 形, 点 P 、 E 、 F 分别为线段 AB 、 AD 、 DB 的任意点, 则 $PE+PF$ 的最小值是 .

考点: 菱形、轴对称、等腰三角形的性质, 两点之间线段最短, 垂线段最短, 勾股定理, 菱形面积等

分析:

翻折前后两个部分就是成轴对称的. 再加上 $AC=BC$, 可以推出 $AC=BC=DA=DB$, 所以四边形 $ADBC$ 的形状是菱形.

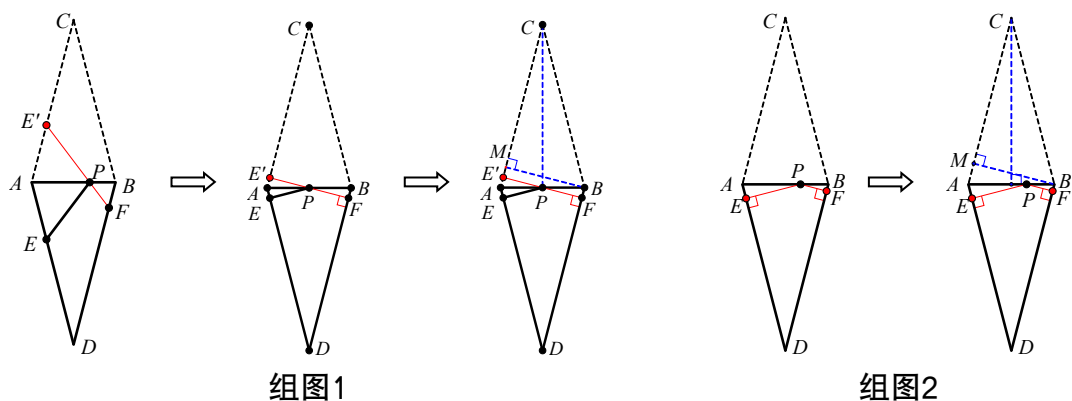
关于求 $PE+PF$ 的最小值:

方法一. 本题关键是 E 、 F 不是定点, 而是动点; 仍然可以先作 E 关于线段 BC 的对称点 E' , 连接 $E'F$, 再将 E' 、 F 移动使 $E'F \perp BD$, 因为“垂线段最短”. 再根据轴对称的性质可得到 $PE+PF=PE'+PF=E'F$; 实际上此时的点 P 恰好是 AB 的中点. $E'F$ 就是菱形一边上的高, 可把 $E'F$ 平移成等腰 $\triangle ABC$ 腰上的高来解决. 见下面的分析流程图组图 I.

见下面组图 1 最后一个图, 过 B 作 $BM \perp AC$ 于 M , 连接 AP ; $\because AC=BC$, P 是 AB 的中点;

$$\begin{aligned}
 &\therefore CP \perp AB; \text{在 } Rt \triangle ABC \text{ 中有 } BP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, BC = 2 \therefore CP = \sqrt{BC^2 - BP^2} \\
 &= \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}; \text{根据面积公式可知 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times CP = \frac{1}{2} \times AC \times BM \\
 &\therefore 1 \times \frac{\sqrt{15}}{2} = 2 \times BM, \text{解得 } BM = \frac{\sqrt{15}}{4}; \text{易证 } E'F = BM \therefore PE + PF = E'F = \frac{\sqrt{15}}{4}. \text{故应填} \\
 &\frac{\sqrt{15}}{4}.
 \end{aligned}$$

方法二.大家都知道从等腰三角形底边上的任何一点向该三角形两腰作垂线段, 两垂线段的和是个恒值, 且等于等腰三角形一腰上的高. 所以直接过点 P 向菱形的两邻边作垂线段, 因为“垂线段最短”, 所以 PE 与 PF 之和便最小, 然后也把 PE 、 PF 转化成等腰三角形一腰的高的高来解决, 见下面流程组图 2, 同样可以 $PE + PF = BM$ (计算略). 两种方法的计算量是一样的.



点评:

本题三个点都是动点, 可以把其中一个点作为定点切入思考, 有两条思路: 一是除了要注意利用轴对称知识、“两点之间, 线段最短.”, 其次还结合“垂线段最短”来求出最小值, 就是在变化中寻找“不变”的部分. 本题是一道高质量的中考题.

三. 解答题(共 8 个题, 共 78 分)

19. (本题满分 8 分) 计算: $|- \sqrt{2}| + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2 \cos 45^\circ$.

考点: 实数的混合运算.

分析: 先计算乘方、绝对值、特殊角的三角函数值, 再乘除, 最后加减.

略解: 原式 = $\sqrt{2} + 2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ 5 分

$$= \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}$$

$$= 2 \text{ 8 分}$$

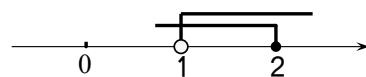
20. (本题满分 8 分) 解不等式组: $\begin{cases} 3x - 5 \leq 1 & \text{..... ①} \\ \frac{13 - x}{3} < 4x & \text{..... ②} \end{cases}$, 并在数轴上表示其解集.

考点: 解不等式组、在数轴上表示不等式的解集.

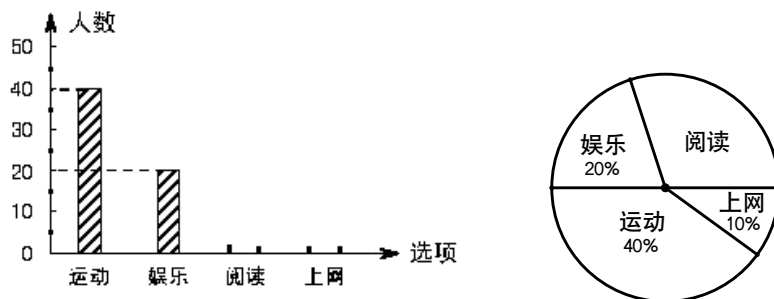
分析: 先解每个不等式, 然后求出它们的公共部分, 表示在数轴上要注意弧 (折线) 的方向和起始位置的标记是实心点还是空心圆圈.

略解: 解不等式①得: $x \leq 2$; 解不等式②得: $x > 1$ 4 分

所以不等式组的解集为: $1 < x \leq 2$ 6 分

在数轴上表示出来为:  8 分

21. (本题满分 8 分) 某校研究学生的课余爱好情况吧, 采取抽样调查的方法, 从阅读、运动、娱乐、上网等四个方面调查了若干名学生的兴趣爱好, 并将调查结果绘制成下面两幅不完整的统计图, 请你根据图中提供的信息解答下列问题:



- (1).在这次调查中，一共调查了 _____ 名学生；
- (2).补全条形统计图；
- (3).若该校共有 1500 名，估计爱好运动的学生有 _____ 人；
- (4).在全校同学中随机选取一名学生参加演讲比赛，用频率估计概率，则选出的恰好是爱好阅读的学生的概率是 _____ .

考点：统计图、样本估计总体、用频率估计概率.

分析：(1).结合统计图能读出运动或娱乐的人数和所占总数的百分比，可以计算出总人数；(2).根据总人数和扇形图反映出的阅读和上网的百分比可以计算出相应的人数，以此可以补全条形图；(3).样本爱好运动的 40%可以估计总体爱好运动也占 40%，以此可计算出该校爱好运动的人数；(4).根据扇形图可以计算出样本中阅读所占的百分比，从而估计出在总体中的频率，以此得出概率的近似值.

略解：

(1). $40 \div 40\% = 100$.故因填写 100 ； 2 分

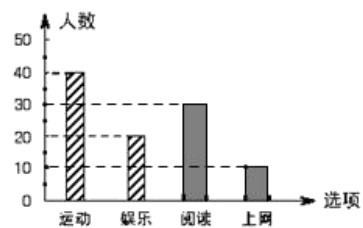
(2).上网的人数为： $100 \times 10\% = 10$ (人)

阅读的人数为： $100 - 40 - 20 - 10 = 30$ (人)

补全条形图（见右面） 5 分

(3). $1500 \times 40\% = 600$.故因填写 600 ； 7 分

(4).样本中阅读频率为 $30 \div 100 = 0.3$, 故概率为 $\frac{3}{10}$. 故应填 $\frac{3}{10}$ 8 分



22. (本题满分 8 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 12, \tan A = \frac{3}{4}, \angle B = 30^\circ$ ；求 AC 和 AB 的长.

考点：三角函数、直角三角形的性质、勾股定理等.

分析：本题关键爱是把问题转化在直角三角形中，当我们过点 C 作出边 AB 的高后，可以问题转化在两个直角三角形中，利用高作为桥梁使问题获得解决.

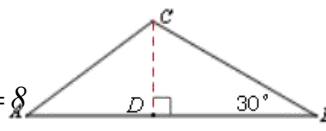
略解：

过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 则 $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$ 1 分

在 $Rt \triangle DBC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $BC = 12cm$ $\therefore DC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 12 = 6cm$ 3 分

根据勾股定理可求 $BD = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}cm$.

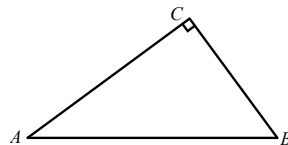
在 $Rt \triangle DBC$ 中, $\tan A = \frac{CD}{AD} = \frac{3}{4}$, 即 $\frac{6}{AD} = \frac{3}{4}$, 解得: $AD = 8$



$$\therefore AB = BD + DC = (6\sqrt{3} + 8) \text{ cm} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{根据勾股定理可求 } AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

23. (本题满分 10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$.



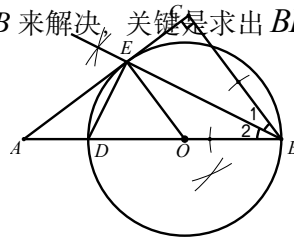
(1). 作出经过点 B , 圆心 O 在斜边 AB 上且与边 AC 相切于点 E 的 $\odot O$; (要求: 用尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法和证明)

(2). 设(1)中所作的 $\odot O$ 与边 AB 交于异于点 B 的另外一点 D , 若 $\odot O$ 的直径为 5, $BC = 4$; 求 DE 的长. (如果用尺规作图画不出图形, 可画出草图完成(2)问)

考点: 尺规作图、圆的相关性质、垂径定理、圆周角定理及其推论、勾股定理以及圆的切线的性质和判定等.

分析:

本题的(1)问可以先画出草图逆推: 关键是抓住既要过点 B , 又要切点落在边 AC 上, 换句话说要达到 $OE = OB$, 同时要求 $OE \perp AC$ 于 E , 通过作角的平分线以及作平行线找交点确定圆心的办法来解决. 本题的(2)问“求 DE 的长”可以化归在 $Rt \triangle DEB$ 来解决, 关键是求出 BE 的长度, 而这个可以通过 $\triangle EBC \sim \triangle EDB$ 来获得解决.



略解:

(1). 尺规作图: 如图所示. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2). 如图所示.

$\because DB$ 为 $\odot O$ 的直径

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle DEB = \angle ACB$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC \quad \therefore \angle 1 = \angle 2 \quad \therefore \triangle EDB \sim \triangle EBC \quad \therefore \frac{DB}{BE} = \frac{BE}{BC} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\because BD = 5, BC = 4 \quad \therefore \frac{5}{BE} = \frac{BE}{4} \quad \therefore BE^2 = 20 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because \angle DEB = 90^\circ$$

$$\therefore DE^2 + BE^2 = BD^2 \quad \text{即 } DE^2 + 20 = 5^2; \text{ 解得 } DE = \sqrt{5} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

点评:

本题主要(1)问作图要进行逆向思考, 才能找出作图的突破口, 最好先画出草图进行逆推.

24. (本题满分 10 分) 阅读以下材料:

对数的创始人是苏格兰数学家纳皮尔 (J.Nplcr,1550 - 1617 年), 纳皮尔发明对数是在指数书写方式之前, 直到 18 世纪瑞士数学家欧拉 (Evlcr,1707 - 1783 年) 才发现指数与对数之间的联系.

对数的定义: 一般地, 若 $a^x = N (a > 0, a \neq 1)$, 那么 x 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作: $x = \log_a N$.

比如指数式 $2^4 = 16$ 可以转化为 $4 = \log_2 16$, 对数式 $2 = \log_5 25$ 可以转化为 $5^2 = 25$.

我们根据对数的定义可得到对数的一个性质:

$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N (a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0)$; 理由如下:

设 $\log_a M = m, \log_a N = n$, 则 $M = a^m, N = a^n$

$\therefore M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, 由对数的定义得 $m+n = \log_a (M \cdot N)$

又 $\therefore m+n = \log_a M + \log_a N$

$\therefore \log (M \cdot N) = \log M + \log N$

解决以下问题:

(1). 将指数 $4^3 = 64$ 转化为对数式 _____ ;

(2). 证明 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N (a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0)$

(3). 拓展运用: 计算 $\log_3 2 + \log_3 6 - \log_3 4 =$ _____ .

考点: 阅读运用、对数的定义、对数式与指数式的相互转化、对数性质的证明与运用.

分析: 本题的(1)问直接根据对数的定义以及对数式与指数式的相互转化可以解决问题; 本题的(2)问可以参照材料中的“积的对数”的证明来“商的对数”; 本题的(3)问是对对数性质的逆运用.

略解:

(1). 根据对数的定义 $4^3 = 64$ 转化为对数式 $3 = \log_4 64$. 故应填 $3 = \log_4 64$. ……2 分

(2). $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N (a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0)$. 理由如下:

设 $\log_a M = m, \log_a N = n$, 则 $M = a^m, N = a^n$

$\therefore \frac{M}{N} = a^m \div a^n = a^{m-n}$, 由对数的定义得 $m-n = \log_a \frac{M}{N}$

又 $\therefore m-n = \log_a M - \log_a N$

$$\therefore \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(3).根据对数的性质有:

$$\log_3 2 + \log_3 6 - \log_3 4 = \log_3 2 \times 6 - \log_3 4 = \log_3 \frac{12}{4} = \log_3 3 = 1. \text{ 故应填 } \underline{1}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

25. (本题满分 12 分) 如图, 已知 $\angle AOB = 60^\circ$, 在 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上有一点 C , 将一个 120° 角的顶点与点 C 重合, 它的两条边分别与直线 OA 、 OB 相交于点 D 、 E .

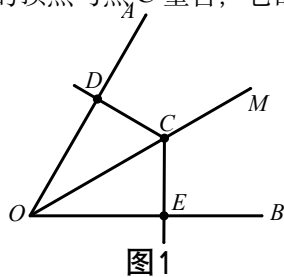


图1

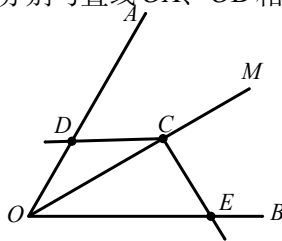


图2

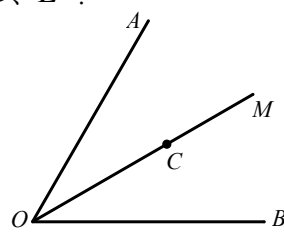


图3

(1).当 $\angle DCE$ 绕点 C 旋转到 CD 与 OA 垂直时 (如图 1), 请猜想 $OE + OD$ 与 OC 的数量关系, 并说明理由;

(2).当 $\angle DCE$ 绕点 C 旋转到 CD 与 OA 不垂直时, 到达图 2 的位置, (1)中的结论是否成立? 并说明理由;

(3).当 $\angle DCE$ 绕点 C 旋转到 CD 与 OA 的反向延长线相交时, 上述结论是否成立? 请在图 3 中画出图形, 若成立, 请给予证明; 若不成立, 线段 OD 、 OE 与 OC 之间又有怎样的数量关系? 请写出你的猜想, 不需证明.

考点: 旋转的特征、直角三角形的性质、勾股定理、角平分线的性质、全等三角形等、线段的和差.
分析:

本题的(1)问根据直角三角形的性质和勾股定理可以计算出 OE 、 OD 与 OC 的关系, 从而得出 $OE + OD$ 与 OC 的关系; 本题的(2)问可以过点 C 向 $\angle AOB$ 的两边作垂线段, 从而可以把问题转化为问题(1)的方式, 然后利用线段的和差关系进行转换. 本题的(3)问也可以过点 C 向 $\angle AOB$ 的两边作垂线段, 从而可以把问题转化为问题(1)的方式, 然后利用线段的和差关系进行转换, 使问题得以解决, 本题是一道高质量的中考题.

略解:

(1). $OD + OE = \sqrt{3} OC$.理由如下: 1 分

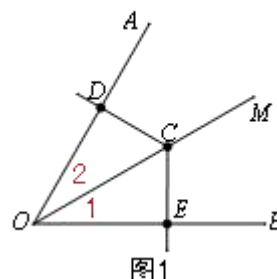
$\because \angle AOB = 60^\circ$, 且 OM 平分 $\angle AOB$.

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

$\because \angle DCE$ 绕点 C 旋转到 CD 与 OA 垂直

$$\therefore \angle ODC = \angle OEC = 90^\circ$$

$$\therefore DC = \frac{1}{2} OC, EC = \frac{1}{2} OC$$



在 $Rt \triangle ODC$ 中根据勾股定理有: $OD^2 + CD^2 = OC^2$, $OD^2 + \left(\frac{1}{2} OC\right)^2 = OC^2$.

$$\text{解得: } OD = \frac{\sqrt{3}}{2} OC; \text{同理可得: } OE = \frac{\sqrt{3}}{2} OC$$

$$\therefore OD + OE = \frac{\sqrt{3}}{2} OC + \frac{\sqrt{3}}{2} OC = \sqrt{3} OC. \text{ 即 } OD + OE = \sqrt{3} OC. \text{ 4 分}$$

(2). (1)中的结论仍然成立.理由如下: 5 分

过点 C 向 $\angle AOB$ 的两边作 $CG \perp OA, CH \perp OB$, 垂足分别为 G, H .

$$\therefore \angle OGC = \angle OHC = 90^\circ$$

参照(1)的方法同理可证: $OG + OH = \sqrt{3} OC$.

根据旋转的特征可以得到: $\angle DCE = \angle GCH$, 即 $\angle 4 + \angle DCH = \angle 3 + \angle DCH$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4$$

$\because OM$ 平分 $\angle AOB, CG \perp OA, CH \perp OB$

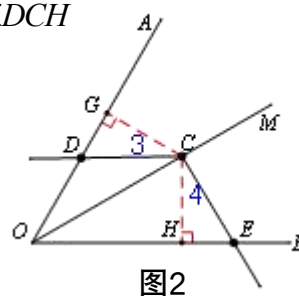
$$\therefore CG = CH$$

$$\therefore \triangle CGD \cong \triangle CHE \quad \therefore DG = EH$$

$$\therefore OG + OH = OD + DG + OE - EH = OD + OE$$

$$\therefore OG + OH = \sqrt{3} OC$$

$$\therefore OD + OE = \sqrt{3} OC \text{ 8 分}$$



(3). (1)中的结论不成立.

猜想: 线段 OD, OE 与 OC 之间的数量关系是 $OE - OD = \sqrt{3} OC$ 9 分

理由如下:

过点 C 向 $\angle AOB$ 的两边作 $CP \perp OA, CQ \perp OB$, 垂足分别为 G, H .射线 CD 交 OA 反向延长射线于 D .

$$\therefore \angle OGC = \angle OHC = 90^\circ$$

参照(1)的方法同理可证: $OP + OQ = \sqrt{3} OC$.

根据旋转的特征可以得到: $\angle DCE = \angle GCH$,即 $\angle PCD + \angle 5 = \angle QCE + \angle 5$.

$$\therefore \angle PCD = \angle QCE$$

$$\because OM \text{ 平分 } \angle AOB, CP \perp OA, CQ \perp OB$$

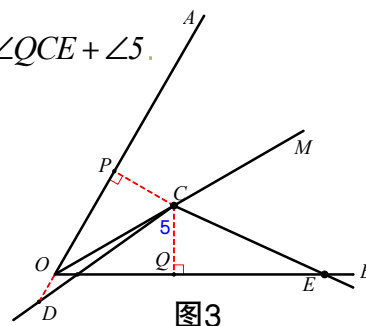
$$\therefore CP = CQ$$

$$\therefore \triangle CPD \cong \triangle CQE \quad \therefore PD = QE$$

$$\therefore OP + OQ = PD - OD + OE - QE = OE - OD \quad (OE > OD)$$

$$\therefore OP + OQ = \sqrt{3} OC$$

$$\therefore OE - OD = \sqrt{3} OC \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



故线段 OD 、 OE 与 OC 之间的数量关系是 $OE - OD = \sqrt{3} OC$.

点评:

本题的三个图形首先要旋转过程中旋转角度不变, 其次注意两点: 其一.过点 C 向两边作垂线段后, 都存在一对全等的直角三角形; 其二.要注意利用线段和差进行式子的转换.

26. (本题满分 14 分)

如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 过 $A(1, 0)$ 、 $B(-3, 0)$, 直线 AD 交抛物线于点 D ,点 D 的横坐标为 -2 , 点 $P(m, n)$ 是线段 AD 上的动点.

(1).求直线 AD 及抛物线的解析式;

(2).过点 P 的直线垂直于 x 轴, 交抛物线于点 Q ,求线段 PQ 的长度 l 与 m 的关系式, m 为何值时, PQ 最长?

(3).在平面内是否存在整点 (横、纵坐标都为整数) R ,使得 P 、 Q 、 D 、 R 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 直接写出点 R 的坐标; 若不存在, 说明理由.

考点: 待定系数法求函数解析式、函数的图象及其性质、二次函数求最值问题、平行四边的判定、整点问题、分类讨论思想等.

分析:

本题的(1)问先由抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 过 $A(1, 0)$ 、 $B(-3, 0)$ 利用待定系数法可以求出抛物线的解析式, 利用抛物线可以求出点 D 的纵坐标, 再求出直线 AD 的解析式. 本题的(2)问是一个二次函数最值应用问题, 关键是用纵坐标之差的绝对值表示出线段的长度, 同时要注意分类讨论思想的应用. 本题的(3)问要先假设存在, 由于点 D 是个定点, 同时是个整点, 根据两个函数解析式的特征, 所以点 P 、 Q 也应为整点才能确保点 R 才可能为整点, 所以本题应确定 P 的坐标变化范围, 从中找出 P 、 Q 整点坐标, 然后进行分类讨论其存在的可能性.

略解:

(1). $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 过 $A(1, 0)$ 、 $B(-3, 0)$

$$\therefore \begin{cases} a+b-3=0 \\ 9a-3b-3=0 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \quad \text{所以 } y = x^2 + 2x - 3 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$\because$ 点 D 的横坐标为 -2

$$\therefore \text{当 } x = -2 \text{ 时, } y = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3 \quad \therefore D(-2, -3)$$

设直线 AD 的解析式为 $y = kx + b$

$$\therefore A(1, 0)、D(-2, -3)$$

$$\therefore \begin{cases} k+b=0 \\ -2k+b=-3 \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases} \quad \text{所以 } y = x - 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2). $\because$ 点 $P(m, n)$, 过点 P 的直线垂直于 x 轴, 交抛物线于点 Q .

$\therefore$ 点 P 和点 Q 的横坐标相等. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

当 $x = m$ 时代入 $y = x - 1$ 得: $y = m - 1$; 则点 $P(m, m - 1)$.

当 $x = m$ 时代入 $y = x^2 + 2x - 3$ 得: $y = m^2 + 2m - 3$. 则点 $Q(m, m^2 + 2m - 3)$.

$$\therefore PQ = \left| (m - 1) - (m^2 + 2m - 3) \right| \quad \text{即 } l = \left| (m - 1) - (m^2 + 2m - 3) \right|$$

①. 当 $m - 1 \geq m^2 + 2m - 3$ 时, $l = (m - 1) - (m^2 + 2m - 3)$; 整理 $l = -m^2 - m + 2$

$\because a = -1 < 0 \quad \therefore$ 当 $m = -\frac{-1}{2 \times (-1)} = -\frac{1}{2}$ 时, l 有最大值; 即此时线段 PQ 最长.

②. 当 $m - 1 < m^2 + 2m - 3$ 时, $l = (m^2 + 2m - 3) - (m - 1)$; 整理 $l = m^2 + m - 2$

$\therefore a=1>0 \quad \therefore l$ 此时有最小值；不合本问题意，舍去。

综上所述：当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，线段 PQ 最长。…………… 10 分

(3).在平面内存在整点（横、纵坐标都为整数） R ,使得 P 、 Q 、 D 、 R 为顶点的四边形是平行四边形. 整点 R 坐标分别为： $(-2,-1)$ 、 $(-2,-5)$ 、 $(0,-3)$ 、 $(2,-1)$. …………… 14 分

因为 $P(m,n)$ 是线段 AD 上的动点，计算出 $A(1,0)$ 、 $D(-2,-3)$ ，从而确定点 P 横纵坐标的变化范围进行整点坐标的分类讨论（根据解析式和点 D 的坐标，点 P 、 Q 也应为整点）。

①.当 $P_1(-1,-2)$ 时， $Q_1(-1,-4)$ ；以 P_1 、 D 、 Q_1 作为定点，能使点 R 与它们构成平行四边形（分别以 PQ 为边和对角线讨论）的 R 整点坐标情况有： $R_1(-2,-1)$ 、 $R_2(-2,-5)$ 、 $R_3(0,-3)$ （见分析示意图①）。

②.当 $P_2(0,-1)$ 时， $Q_2(0,-3)$ ；以 P_2 、 D 、 Q_2 作为定点，能使点 R 与它们构成平行四边形（分别以 PQ 为边和对角线讨论）的 R 整点坐标情况有： $R_4(-2,-1)$ 、 $R_5(-2,-5)$ 、 $R_6(2,-1)$ （见分析示意图②）。

注：当 P 点与 A 、 D 重合时，点 Q 点也同时会相应的与 A 、 D 重合时，该四边形不存在。

综上所述，满足条件的整点 R 的坐标有 $(-2,-1)$ 、 $(-2,-5)$ 、 $(0,-3)$ 、 $(2,-1)$ 。

点评：

本题主要(1)问求出点的坐标后，用待定系数法可以求出两个函数的解析式，比较简单！在函数的相关题型中，求“最值”问题，常通过建立二次函数的模型来解；本题(2)问就是抓住长度等于 P 、 Q 纵坐标之差的绝对值建立二次函数来解决，注意讨论.本题以 P 、 Q 、 D 、 R 为顶点的四边形顶点有 3 个动点，是本问的难点所在，结合解析式和其中一个顶点是定点且为整点，把动点中的 P 、 Q 也视为“定点”，在此基础上讨论就比较容易破题了。