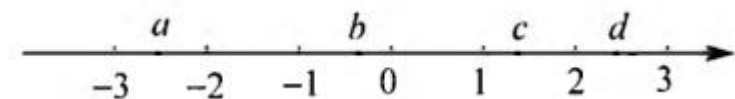


2018 年四川省成都市中考数学试卷（精校版）

A 卷（共 100 分）

一、选择题：本大题共 10 个小题,每小题 3 分,共 30 分.

1.实数 a, b, c, d 在数轴上对应的点的位置如图所示, 这四个数中最大的是 ()

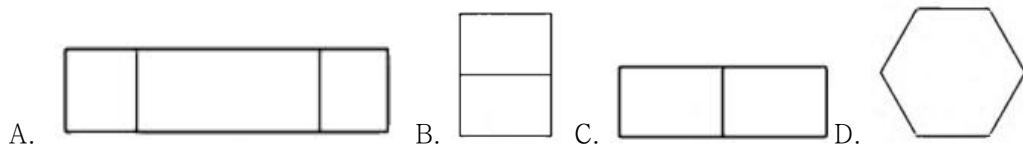


- A. a B. b C. c D. d

2.2018 年 5 月 21 日, 西昌卫星发射中心成功发射探月工程嫦娥四号任务“鹊桥号”中继星, 卫星进入近地点高度为 200 公里、远地点高度为 40 万公里的预定轨道.将数据 40 万用科学记数法表示为 ()

- A. 0.4×10^6 B. 4×10^5 C. 4×10^6 D. 0.4×10^6

3.如图所示的正六棱柱的主视图是 ()



4.在平面直角坐标系中, 点 $P(-3, -5)$ 关于原点对称的点的坐标是 ()

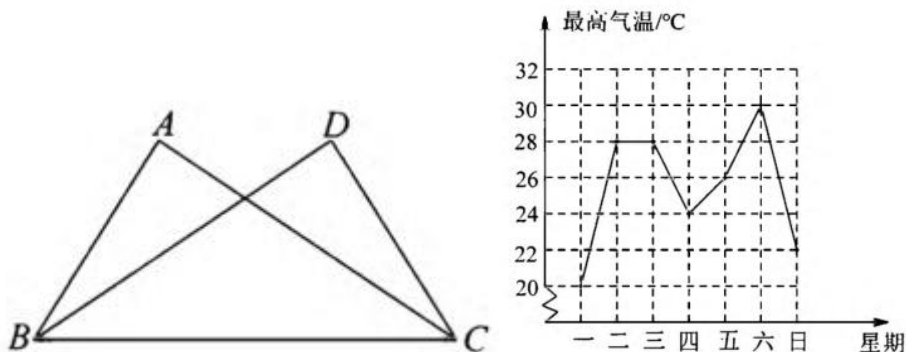
- A. $(3, -5)$ B. $(-3, 5)$ C. $(3, 5)$ D. $(-3, -5)$

5.下列计算正确的是 ()

- A. $x^2 + x^2 = x^4$ B. $(x - y)^2 = x^2 - y^2$ C. $(x^2 y)^3 = x^6 y$ D. $(-x)^2 \cdot x^3 = x^5$

6.如图, 已知 $\angle ABC = \angle DCB$, 添加以下条件, 不能判定 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ 的是 ()

- A. $\angle A = \angle D$ B. $\angle ACB = \angle DBC$ C. $AC = DB$ D. $AB = DC$



7.如图是成都市某周内日最高气温的折线统计图, 关于这 7 天的日最高气温的说法正确的是 ()

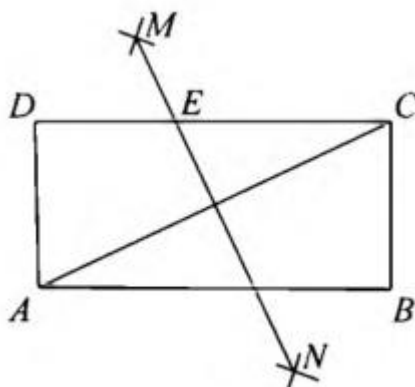
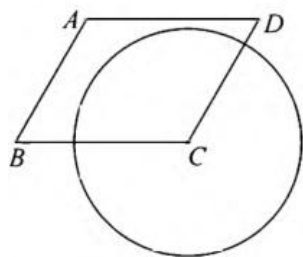
- A. 极差是 8°C B. 众数是 28°C C. 中位数是 24°C D. 平均数是 26°C

8.分式方程 $\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$ 的解是 ()

- A. y B. $x = -1$ C. $x = 3$ D. $x = -3$

9.如图，在 $\square ABCD$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $\odot C$ 的半径为 3，则图中阴影部分的面积是（ ）

- A. π B. 2π C. 3π D. 6π



10.关于二次函数 $y = 2x^2 + 4x - 1$ ，下列说法正确的是（ ）

- A. 图像与 y 轴的交点坐标为 $(0,1)$ B. 图像的对称轴在 y 轴的右侧

- C. 当 $x < 0$ 时， y 的值随 x 值的增大而减小 D. y 的最小值为 -3

二、填空题（每题 4 分，满分 16 分，将答案填在答题纸上）

11.等腰三角形的一个底角为 50° ，则它的顶角的度数为_____.

12.在一个不透明的盒子中，装有除颜色外完全相同的乒乓球共 16 个，从中随机摸出一个乒乓球，若摸到黄色乒乓球的概率为 $\frac{3}{8}$ ，则该盒子中装有黄色乒乓球的个数是_____.

13.已知 $\frac{a}{b} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4}$ ，且 $a + b - 2c = 6$ ，则 a 的值为_____.

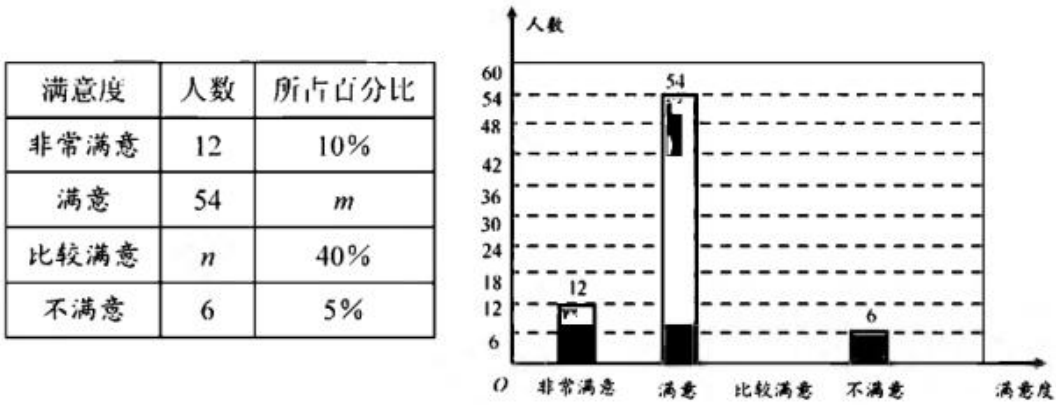
14.如图，在矩形 $ABCD$ 中，按以下步骤作图：①分别以点 A 和 C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 M 和 N ；②作直线 MN 交 CD 于点 E .若 $DE = 2$ ， $CE = 3$ ，则矩形的对角线 AC 的长为_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 54 分.）

15. (1) $2^2 + \sqrt[3]{8} - 2\sin 60^\circ + |-\sqrt{3}|$. (2) 化简 $\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \div \frac{x}{x^2-1}$.

16. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0$ 有两个不相等的实数根，求 a 的取值范围.

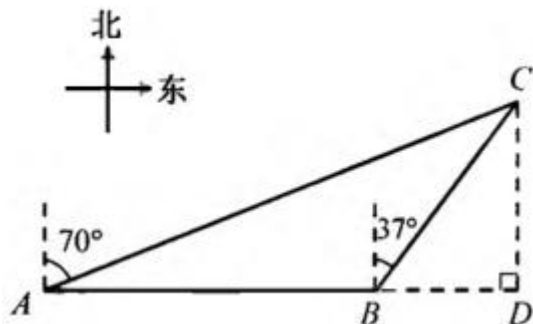
17. 为了给游客提供更好的服务，某景区随机对部分游客进行了关于“景区服务工作满意度”的调查，并根据调查结果绘制成如下不完整的统计图表.



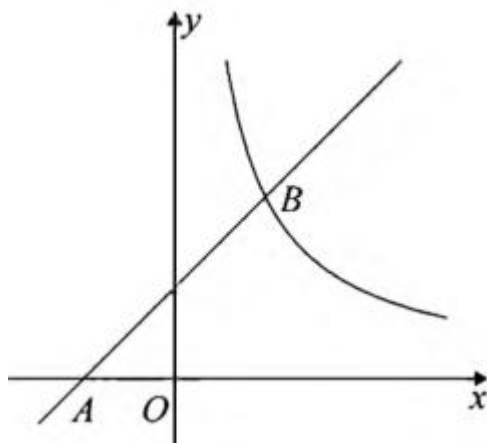
根据图标信息，解答下列问题:

- (1) 本次调查的总人数为_____，表中 m 的值_____；
- (2) 请补全条形统计图；
- (3) 据统计，该景区平均每天接待游客约 3600 人，若将“非常满意”和“满意”作为游客对景区服务工作的肯定，请你估计该景区服务工作平均每天得到多少名游客的肯定.

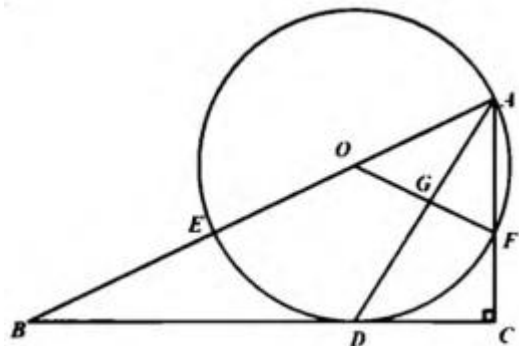
18. 由我国完全自主设计、自主建造的首艘国产航母于 2018 年 5 月成功完成第一次海上试验任务.如图, 航母由西向东航行, 到达 A 处时, 测得小岛 C 位于它的北偏东 70° 方向, 且于航母相距 80 海里, 再航行一段时间后到达 B 处, 测得小岛 C 位于它的北偏东 37° 方向.如果航母继续航行至小岛 C 的正南方向的 D 处, 求还需航行的距离 BD 的长. (参考数据: $\sin 70^\circ \approx 0.94$, $\cos 70^\circ \approx 0.34$, $\tan 70^\circ \approx 2.75$, $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)



19. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = x + b$ 的图象经过点 $A(-2, 0)$, 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于 $B(a, 4)$. (1) 求一次函数和反比例函数的表达式; (2) 设 M 是直线 AB 上一点, 过 M 作 $MN \parallel x$ 轴, 交反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象于点 N , 若 A, O, M, N 为顶点的四边形为平行四边形, 求点 M 的坐标.



- 20.如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , O 为 AB 上一点, 经过点 A, D 的 $\odot O$ 分别交 AB, AC 于点 E, F , 连接 OF 交 AD 于点 G . (1) 求证: BC 是 $\odot O$ 的切线; (2) 设 $AB = x$, $AF = y$, 试用含 x, y 的代数式表示线段 AD 的长; (3) 若 $BE = 8$, $\sin B = \frac{5}{13}$, 求 DG 的长.

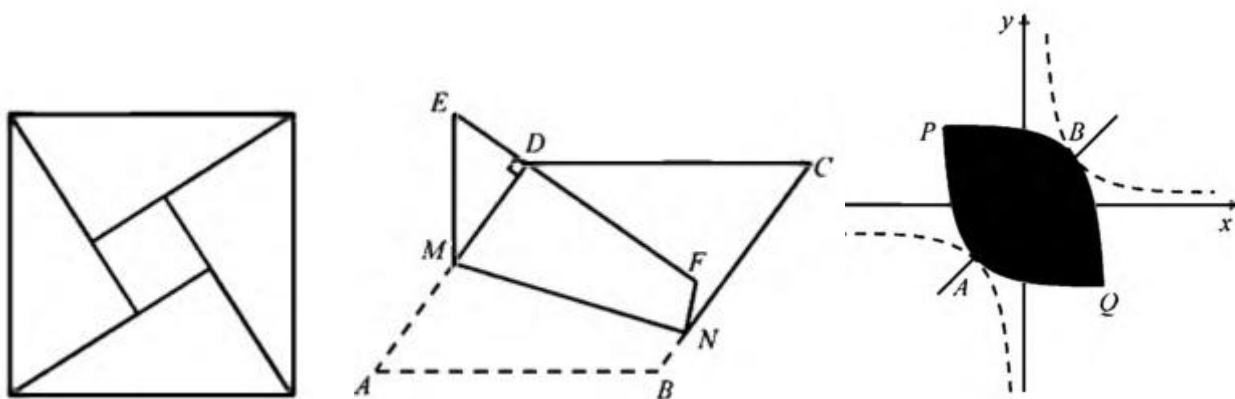


B 卷 (共 50 分)

一、填空题 (每题 4 分, 满分 20 分, 将答案填在答题纸上)

21. 已知 $x + y = 0.2$, $x + 3y = 1$, 则代数式 $x^2 + 4xy + 4y^2$ 的值为_____.

22. 汉代数学家赵爽在注解《周髀算经》时给出的“赵爽弦图”是我国古代数学的瑰宝. 如图所示的弦图中, 四个直角三角形都是全等的, 它们的两直角边之比均为 $2:3$, 现随机向该图形内掷一枚小针, 则针尖落在阴影区域的概率为_____.



23. 已知 $a > 0$, $S_1 = \frac{1}{a}$, $S_2 = -S_1 - 1$, $S_3 = \frac{1}{S_2}$, $S_4 = -S_3 - 1$, $S_5 = \frac{1}{S_4}$, $\dots$ (即当 n 为大于 1 的奇数时,

$S_n = \frac{1}{S_{n-1}}$; 当 n 为大于 1 的偶数时, $S_n = -S_{n-1} - 1$), 按此规律, $S_{2018} =$ _____.

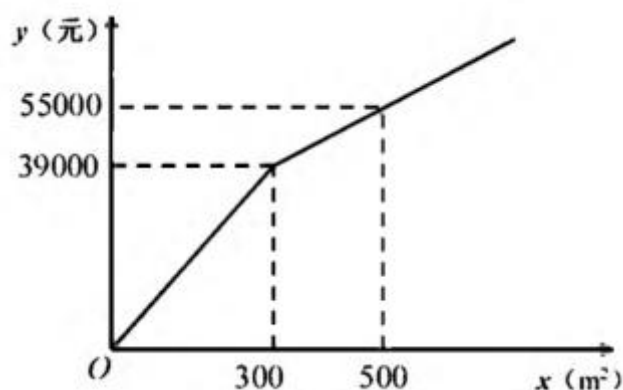
24.如图,在菱形 $ABCD$ 中, $\tan A = \frac{4}{3}$, M, N 分别在边 AD, BC 上, 将四边形 $AMNB$ 沿 MN 翻折, 使 AB 的对应线段 EF 经过顶点 D , 当 $EF \perp AD$ 时, $\frac{BN}{CN}$ 的值为_____.

25.设双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 与直线 $y = x$ 交于 A, B 两点 (点 A 在第三象限), 将双曲线在第一象限的一支沿射线 BA 的方向平移, 使其经过点 A , 将双曲线在第三象限的一支沿射线 AB 的方向平移, 使其经过点 B , 平移后的两条曲线相交于点 P, Q 两点, 此时我称平移后的两条曲线所围部分 (如图中阴影部分) 为双曲线的“眸”, PQ 为双曲线的“眸径”当双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的眸径为 6 时, k 的值为_____.

二、解答题 (本大题共 3 小题, 共 30 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

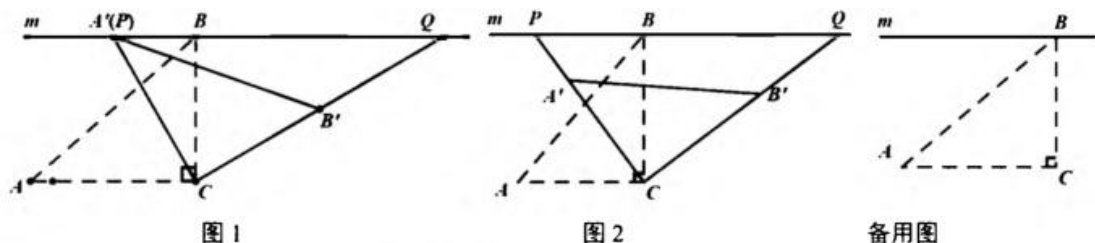
26.为了美化环境, 建设宜居成都, 我市准备在一个广场上种植甲、乙两种花卉.经市场调查, 甲种花卉的种植费用 y (元) 与种植面积 $x (m^2)$ 之间的函数关系如图所示, 乙种花卉的种植费用为每平方米 100 元.

(1) 直接写出当 $0 \leq x \leq 300$ 和 $x > 300$ 时, y 与 x 的函数关系式; (2) 广场上甲、乙两种花卉的种植面积共 $1200m^2$, 若甲种花卉的种植面积不少于 $200m^2$, 且不超过乙种花卉种植面积的 2 倍, 那么应该怎样分配甲、乙两种花卉的种植面积才能使种植费用最少? 最少总费用为多少元?



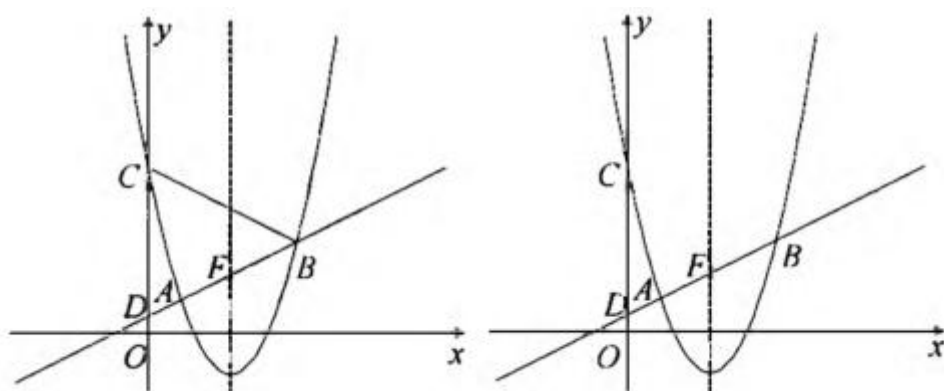
27. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = \sqrt{7}$, $AC = 2$, 过点 B 作直线 $m \parallel AC$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针得到 $\triangle A'B'C$ (点 A, B 的对应点分别为 A', B') 射线 CA', CB' 分别交直线 m 于点 P, Q .

(1) 如图 1, 当 P 与 A' 重合时, 求 $\angle ACA'$ 的度数; (2) 如图 2, 设 $A'B'$ 与 BC 的交点为 M , 当 M 为 $A'B'$ 的中点时, 求线段 PQ 的长; (3) 在旋转过程时, 当点 P, Q 分别在 CA', CB' 的延长线上时, 试探究四边形 $PA'B'Q$ 的面积是否存在最小值. 若存在, 求出四边形 $PA'B'Q$ 的最小面积; 若不存在, 请说明理由.



28. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 以直线 $x = \frac{5}{12}$ 为对称轴的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线

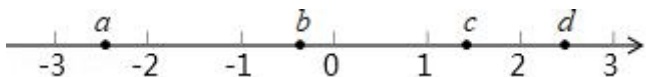
$l: y = kx + m$ ($k > 0$) 交于 $A(1, 1)$, B 两点, 与 y 轴交于 $C(0, 5)$, 直线 l 与 y 轴交于 D 点. (1) 求抛物线的函数表达式; (2) 设直线 l 与抛物线的对称轴的交点为 F , G 是抛物线上位于对称轴右侧的一点, 若 $\frac{AF}{FB} = \frac{3}{4}$, 且 $\triangle BCG$ 与 $\triangle BCD$ 面积相等, 求点 G 的坐标; (3) 若在 x 轴上有且仅有一点 P , 使 $\angle APB = 90^\circ$, 求 k 的值.



2018 年四川省成都市中考数学试卷（解析版）

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) 实数 a, b, c, d 在数轴上上对应的点的位置如图所示，这四个数中最大的是（ ）



- A. a B. b C. c D. d

【分析】根据实数的大小比较解答即可.

【解答】解：由数轴可得： $a < b < c < d$,

故选：D.

【点评】此题考查实数大小比较，关键是根据实数的大小比较解答.

2. (3 分) 2018 年 5 月 21 日，西昌卫星发射中心成功发射探月工程嫦娥四号任务“鹊桥号”中继星，卫星进入近地点高度为 200 公里、远地点高度为 40 万公里的预定轨道. 将数据 40 万用科学记数法表示为（ ）

- A. 4×10^4 B. 4×10^5 C. 4×10^6 D. 0.4×10^6

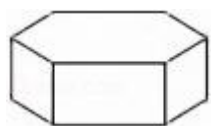
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 万=10000= 10^4 .

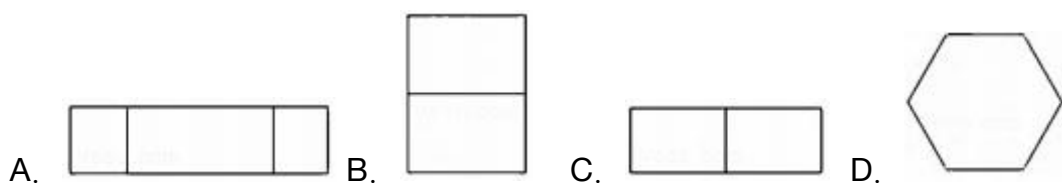
【解答】解：40 万= 4×10^5 ,

故选：B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) 如图所示的正六棱柱的主视图是（ ）





【分析】根据主视图是从正面看到的图象判定则可.

【解答】解：从正面看是左右相邻的 3 个矩形，中间的矩形的面积较大，两边相同.

故选：A.

【点评】本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图.

4. (3 分) 在平面直角坐标系中，点 $P(-3, -5)$ 关于原点对称的点的坐标是 ()

A. $(3, -5)$ B. $(-3, 5)$ C. $(3, 5)$ D. $(-3, -5)$

【分析】根据关于原点对称的点的坐标特点解答.

【解答】解：点 $P(-3, -5)$ 关于原点对称的点的坐标是 $(3, 5)$,

故选：C.

【点评】本题考查的是关于原点的对称的点的坐标，平面直角坐标系中任意一点 $P(x, y)$ ，关于原点的对称点是 $(-x, -y)$ ，即关于原点的对称点，横纵坐标都变成相反数.

5. (3 分) 下列计算正确的是 ()

A. $x^2+x^2=x^4$ B. $(x-y)^2=x^2-y^2$ C. $(x^2y)^3=x^6y$ D. $(-x)^2 \cdot x^3=x^5$

【分析】根据合并同类项法则、完全平方公式、积的乘方法则、同底数幂的乘方法则计算，判断即可.

【解答】解： $x^2+x^2=2x^2$ ，A 错误；

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ ，B 错误；

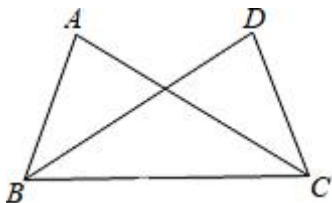
$(x^2y)^3=x^6y^3$ ，C 错误；

$(-x)^2 \cdot x^3=x^2 \cdot x^3=x^5$ ，D 正确；

故选：D.

【点评】本题考查的是合并同类项、完全平方公式、积的乘方、同底数幂的乘法，掌握它们的运算法则是解题的关键.

6. (3 分) 如图, 已知 $\angle ABC = \angle DCB$, 添加以下条件, 不能判定 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ 的是 ()



A. $\angle A = \angle D$ B. $\angle ACB = \angle DBC$ C. $AC = DB$ D. $AB = DC$

【分析】全等三角形的判定定理有 SAS, ASA, AAS, SSS, 根据定理逐个判断即可.

【解答】解: A、 $\angle A = \angle D$, $\angle ABC = \angle DCB$, $BC = BC$, 符合 AAS 定理, 即能推出 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 故本选项错误;

B、 $\angle ABC = \angle DCB$, $BC = CB$, $\angle ACB = \angle DBC$, 符合 ASA 定理, 即能推出 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 故本选项错误;

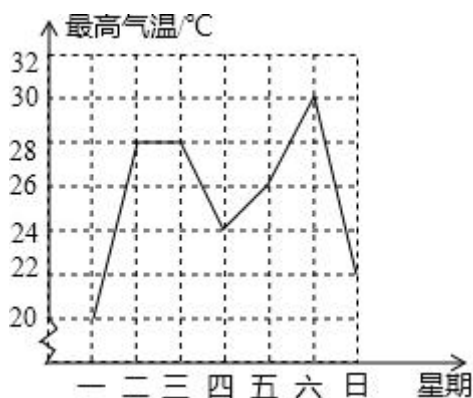
C、 $\angle ABC = \angle DCB$, $AC = BD$, $BC = BC$, 不符合全等三角形的判定定理, 即不能推出 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 故本选项正确;

D、 $AB = DC$, $\angle ABC = \angle DCB$, $BC = BC$, 符合 SAS 定理, 即能推出 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 故本选项错误;

故选: C.

【点评】本题考查了全等三角形的性质和判定, 等腰三角形的性质的应用, 能正确根据全等三角形的判定定理进行推理是解此题的关键, 注意: 全等三角形的判定定理有 SAS, ASA, AAS, SSS.

7. (3 分) 如图是成都市某周内最高气温的折线统计图, 关于这 7 天的日最高气温的说法正确的是 ()



A. 极差是 8°C B. 众数是 28°C C. 中位数是 24°C D. 平均数是 26°C

【分析】根据折线统计图中的数据可以判断各个选项中的数据是否正确，从而可以解答本题.

【解答】解：由图可得，

极差是： $30 - 20 = 10^{\circ}\text{C}$ ，故选项 A 错误，

众数是 28°C ，故选项 B 正确，

这组数按照从小到大排列是：20、22、24、26、28、28、30，故中位数是 26°C ，故选项 C 错误，

平均数是： $\frac{20+22+24+26+28+28+30}{7} = 25\frac{3}{7}^{\circ}\text{C}$ ，故选项 D 错误，

故选：B.

【点评】本题考查折线统计图、极差、众数、中位数、平均数，解答本题的关键是明确题意，能够判断各个选项中结论是否正确.

8. (3 分) 分式方程 $\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$ 的解是 ()

A. $x=1$ B. $x=-1$ C. $x=3$ D. $x=-3$

【分析】观察可得最简公分母是 $x(x-2)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解.

【解答】解： $\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$ ，

去分母，方程两边同时乘以 $x(x-2)$ 得：

$$(x+1)(x-2) + x = x(x-2),$$

$$x^2 - x - 2 + x = x^2 - 2x,$$

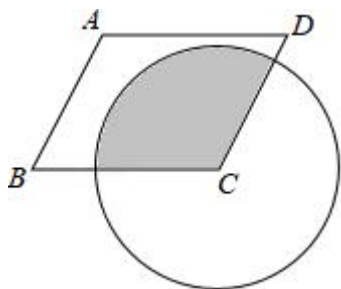
$x=1$,

经检验, $x=1$ 是原分式方程的解,

故选: A.

【点评】考查了解分式方程, (1) 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解. (2) 解分式方程一定要注意要验根.

9. (3 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle B=60^\circ$, $\odot C$ 的半径为 3, 则图中阴影部分的面积是 ()



A. π B. 2π C. 3π D. 6π

【分析】根据平行四边形的性质可以求得 $\angle C$ 的度数, 然后根据扇形面积公式即可求得阴影部分的面积.

【解答】解: $\because$ 在 $\square ABCD$ 中, $\angle B=60^\circ$, $\odot C$ 的半径为 3,

$\therefore \angle C=120^\circ$,

$\therefore$ 图中阴影部分的面积是: $\frac{120 \times \pi \times 3^2}{360} = 3\pi$,

故选: C.

【点评】本题考查扇形面积的计算、平行四边形的性质, 解答本题的关键是明确题意, 利用扇形面积的计算公式解答.

10. (3 分) 关于二次函数 $y=2x^2+4x-1$, 下列说法正确的是 ()

A. 图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, 1)$

B. 图象的对称轴在 y 轴的右侧

C. 当 $x < 0$ 时, y 的值随 x 值的增大而减小

D. y 的最小值为 -3

【分析】根据题目中的函数解析式可以判断各个选项中的结论是否在成立,从而可以解答本题.

【解答】解: $\because y=2x^2+4x-1=2(x+1)^2-3$,

$\therefore$ 当 $x=0$ 时, $y=-1$, 故选项 A 错误,

该函数的对称轴是直线 $x=-1$, 故选项 B 错误,

当 $x < -1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故选项 C 错误,

当 $x=-1$ 时, y 取得最小值, 此时 $y=-3$, 故选项 D 正确,

故选: D.

【点评】本题考查二次函数的性质、二次函数的最值, 解答本题的关键是明确题意, 利用二次函数的性质解答.

二、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

11. (4 分) 等腰三角形的一个底角为 50° , 则它的顶角的度数为 80.

【分析】本题给出了一个底角为 50° , 利用等腰三角形的性质得另一底角的大小, 然后利用三角形内角和可求顶角的大小.

【解答】解: $\because$ 等腰三角形底角相等,

$$\therefore 180^\circ - 50^\circ \times 2 = 80^\circ,$$

$\therefore$ 顶角为 80° .

故填 80.

【点评】本题考查等腰三角形的性质, 即等边对等角. 找出角之间的关系利用三角形内角和求角度是解答本题的关键.

12. (4 分) 在一个不透明的盒子中, 装有除颜色外完全个相同的乒乓球共 16 个, 从中随机摸出一个乒乓球, 若摸到黄色乒乓球的概率为 $\frac{3}{8}$, 则该盒子中装有黄色乒乓球的个数是 6.

【分析】直接利用摸到黄色乒乓球的概率为 $\frac{3}{8}$, 利用总数乘以概率即可得出该盒子中装有黄色

乒乓球的个数.

【解答】解：∵装有除颜色外完全个相同的乒乓球共 16 个，从中随机摸出一个乒乓球，若摸到黄色乒乓球的概率为 $\frac{3}{8}$,

∴该盒子中装有黄色乒乓球的个数是： $16 \times \frac{3}{8} = 6$.

故答案为：6.

【点评】此题主要考查了概率公式，正确利用摸到黄色乒乓球的概率求出黄球个数是解题关键.

13. (4 分) 已知 $\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4}$ ，且 $a+b-2c=6$ ，则 a 的值为 12.

【分析】直接利用已知比例式假设出 a, b, c 的值，进而利用 $a+b-2c=6$ ，得出答案.

【解答】解：∵ $\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4}$,

∴设 $a=6x$, $b=5x$, $c=4x$,

∴ $a+b-2c=6$,

∴ $6x+5x-8x=6$,

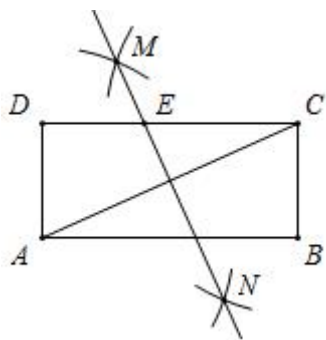
解得： $x=2$,

故 $a=12$.

故答案为：12.

【点评】此题主要考查了比例的性质，正确表示出各数是解题关键.

14. (4 分) 如图，在矩形 ABCD 中，按以下步骤作图：①分别以点 A 和 C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 M 和 N；②作直线 MN 交 CD 于点 E. 若 $DE=2$, $CE=3$ ，则矩形的对角线 AC 的长为 $\sqrt{30}$.



【分析】连接 AE ，如图，利用基本作图得到 MN 垂直平分 AC ，则 $EA=EC=3$ ，然后利用勾股定理先计算出 AD ，再计算出 AC 。

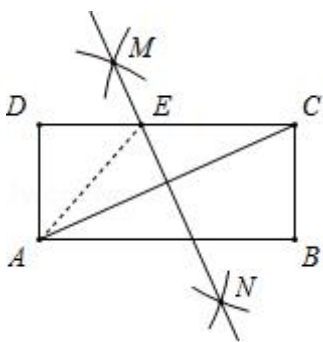
【解答】解：连接 AE ，如图，
由作法得 MN 垂直平分 AC ，

$$\therefore EA=EC=3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } AD=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } AC=\sqrt{(\sqrt{5})^2+5^2}=\sqrt{30}.$$

故答案为 $\sqrt{30}$ 。



【点评】本题考查了作图 - 基本作图：熟练掌握基本作图（作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；作已知线段的垂直平分线；作已知角的角平分线；过一点作已知直线的垂线）。

三、解答题（本大题共 6 个小题，共 54 分）

15. (12 分) (1) $2^2 + \sqrt[3]{8} - 2\sin 60^\circ + |- \sqrt{3}|$

(2) 化简： $(1 - \frac{1}{x+1}) \div \frac{x}{x^2-1}$

【分析】(1) 根据立方根的意义，特殊角锐角三角函数，绝对值的意义即可求出答案。

(2) 根据分式的运算法则即可求出答案.

【解答】解: (1) 原式 $=4+2-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=6$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \frac{x+1-1}{x+1} \times \frac{(x+1)(x-1)}{x} \\ &= \frac{x}{x+1} \times \frac{(x+1)(x-1)}{x} \\ &= x-1 \end{aligned}$$

【点评】本题考查学生的运算能力, 解题的关键是熟练运用运算法则, 本题属于基础题型.

16. (6 分) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0$ 有两个不相等的实数根, 求 a 的取值范围.

【分析】根据方程的系数结合根的判别式 $\Delta > 0$, 即可得出关于 a 的一元一次不等式, 解之即可得出 a 的取值范围.

【解答】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0$ 有两个不相等的实数根,
 $\therefore \Delta = [-(2a+1)]^2 - 4a^2 = 4a+1 > 0$,
解得: $a > -\frac{1}{4}$.

【点评】本题考查了根的判别式, 牢记“当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根”是解题的关键.

17. (8 分) 为了给游客提供更好的服务, 某景区随机对部分游客进行了关于“景区服务工作满意度”的调查, 并根据调查结果绘制成如下不完整的统计图表.

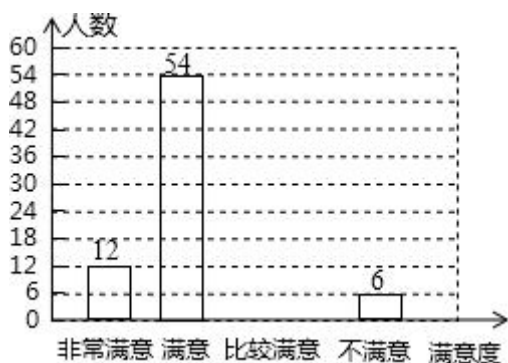
满意度	学生数 (名)	百分比
非常满意	12	10%
满意	54	m
比较满意	n	40%
不满意	6	5%

根据图表信息, 解答下列问题:

(1) 本次调查的总人数为 120, 表中 m 的值 45%;

(2) 请补全条形统计图；

(3) 据统计，该景区平均每天接待游客约 3600 人，若将“非常满意”和“满意”作为游客对景区服务工作的肯定，请你估计该景区服务工作平均每天得到多少名游客的肯定.



【分析】(1) 利用 $12 \div 10\% = 120$ ，即可得到 m 的值；用 $120 \times 40\%$ 即可得到 n 的值.

(2) 根据 n 的值即可补全条形统计图；

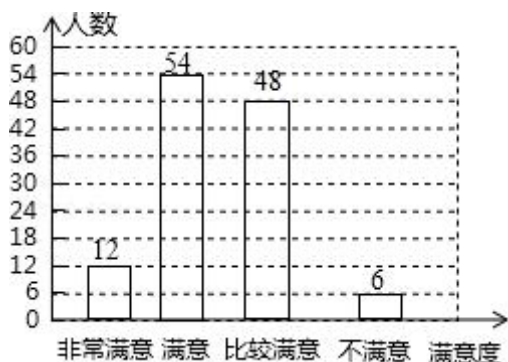
(3) 根据用样本估计总体， $3600 \times \frac{12+54}{120} \times 100\%$ ，即可答.

【解答】解：(1) $12 \div 10\% = 120$ ，故 $m = 120$ ，

$$n = 120 \times 40\% = 48, \quad m = \frac{54}{120} = 45\%.$$

故答案为 120.45%.

(2) 根据 $n = 48$ ，画出条形图：



$$(3) \quad 3600 \times \frac{12+54}{120} \times 100\% = 1980 \text{ (人)},$$

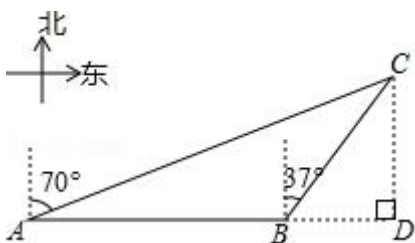
答：估计该景区服务工作平均每天得到 1980 人游客的肯定.

【点评】本题考查了条形统计图、扇形统计图等知识，读懂统计图，从统计图中得到必要的信

息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据.

18. (8 分) 由我国完全自主设计、自主建造的首艘国产航母于 2018 年 5 月成功完成第一次海上实验任务. 如图, 航母由西向东航行, 到达 A 处时, 测得小岛 C 位于它的北偏东 70° 方向, 且与航母相距 80 海里, 再航行一段时间后到达 B 处, 测得小岛 C 位于它的北偏东 37° 方向. 如果航母继续航行至小岛 C 的正南方向的 D 处, 求还需航行的距离 BD 的长.

(参考数据: $\sin 70^\circ \approx 0.94$, $\cos 70^\circ \approx 0.34$, $\tan 70^\circ \approx 2.75$, $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)



【分析】根据题意得: $\angle ACD=70^\circ$, $\angle BCD=37^\circ$, $AC=80$ 海里, 在直角三角形 ACD 中, 由三角函数得出 $CD=27.2$ 海里, 在直角三角形 BCD 中, 得出 BD, 即可得出答案.

【解答】解: 由题意得: $\angle ACD=70^\circ$, $\angle BCD=37^\circ$, $AC=80$ 海里,
在直角三角形 ACD 中, $CD=AC \cdot \cos \angle ACD=27.2$ 海里,
在直角三角形 BCD 中, $BD=CD \cdot \tan \angle BCD=20.4$ 海里.

答: 还需航行的距离 BD 的长为 20.4 海里.

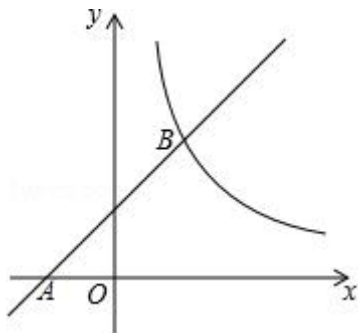
【点评】此题考查了解直角三角形的应用 - 方向角问题, 三角函数的应用; 求出 CD 的长度是解决问题的关键.

19. (10 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y=x+b$ 的图象经过点 A (-2, 0), 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象交于 B (a, 4).

(1) 求一次函数和反比例函数的表达式;

(2) 设 M 是直线 AB 上一点, 过 M 作 $MN \parallel x$ 轴, 交反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象于点 N,

若 A, O, M, N 为顶点的四边形为平行四边形, 求点 M 的坐标.



【分析】(1) 根据一次函数 $y=x+b$ 的图象经过点 A $(-2, 0)$, 可以求得 b 的值, 从而可以解答本题;

(2) 根据平行四边形的性质和题意, 可以求得点 M 的坐标, 注意点 M 的横坐标大于 0.

【解答】解: (1) $\because$ 一次函数 $y=x+b$ 的图象经过点 A $(-2, 0)$,

$$\therefore 0 = -2 + b, \text{ 得 } b=2,$$

$$\therefore \text{一次函数的解析式为 } y=x+2,$$

$$\therefore \text{一次函数的解析式为 } y=x+2 \text{ 与反比例函数 } y=\frac{k}{x} \text{ (} x>0 \text{)} \text{ 的图象交于 B (} a, 4 \text{),}$$

$$\therefore 4=a+2, \text{ 得 } a=2,$$

$$\therefore 4=\frac{k}{2}, \text{ 得 } k=8,$$

$$\text{即反比例函数解析式为: } y=\frac{8}{x} \text{ (} x>0 \text{);}$$

$$(2) \because \text{点 A } (-2, 0),$$

$$\therefore OA=2,$$

$$\text{设点 M (} m-2, m \text{), 点 N } (\frac{8}{m}, m),$$

当 $MN \parallel AO$ 且 $MN=AO$ 时, 四边形 AOMN 是平行四边形,

$$|\frac{8}{m} - (m-2)| = 2,$$

$$\text{解得, } m=2\sqrt{2} \text{ 或 } m=2\sqrt{3}+2,$$

$$\therefore \text{点 M 的坐标为 } (2\sqrt{2}-2, 2\sqrt{2}) \text{ 或 } (2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+2).$$

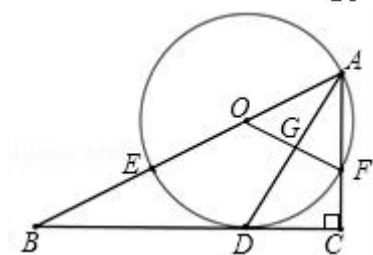
【点评】本题考查反比例函数与一次函数的交点问题, 解答本题的关键是明确题意, 利用数形结合的思想解答.

20. (10 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , O 为 AB 上一点, 经过点 A, D 的 $\odot O$ 分别交 AB, AC 于点 E, F , 连接 OF 交 AD 于点 G .

(1) 求证: BC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 设 $AB=x$, $AF=y$, 试用含 x, y 的代数式表示线段 AD 的长;

(3) 若 $BE=8$, $\sin B = \frac{5}{13}$, 求 DG 的长,



【分析】(1) 连接 OD , 由 AD 为角平分线得到一对角相等, 再由等边对等角得到一对角相等, 等量代换得到内错角相等, 进而得到 OD 与 AC 平行, 得到 OD 与 BC 垂直, 即可得证;

(2) 连接 DF , 由 (1) 得到 BC 为圆 O 的切线, 由弦切角等于夹弧所对的圆周角, 进而得到三角形 ABD 与三角形 ADF 相似, 由相似得比例, 即可表示出 AD ;

(3) 连接 EF , 设圆的半径为 r , 由 $\sin B$ 的值, 利用锐角三角函数定义求出 r 的值, 由直径所对的圆周角为直角, 得到 EF 与 BC 平行, 得到 $\sin \angle AEF = \sin B$, 进而求出 DG 的长即可.

【解答】(1) 证明: 如图, 连接 OD ,

$\because AD$ 为 $\angle BAC$ 的角平分线,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$,

$\because OA = OD$,

$\therefore \angle ODA = \angle OAD$,

$\therefore \angle ODA = \angle CAD$,

$\therefore OD \parallel AC$,

$\because \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ODC=90^{\circ},$$

$$\therefore OD \perp BC,$$

$\therefore BC$ 为圆 O 的切线;

(2) 解: 连接 DF , 由 (1) 知 BC 为圆 O 的切线,

$$\therefore \angle FDC=\angle DAF,$$

$$\therefore \angle CDA=\angle CFD,$$

$$\therefore \angle AFD=\angle ADB,$$

$$\therefore \angle BAD=\angle DAF,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ADF,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AF}, \text{ 即 } AD^2=AB \cdot AF=xy,$$

$$\text{则 } AD=\sqrt{xy};$$

$$(3) \text{ 解: 连接 } EF, \text{ 在 } Rt\triangle BOD \text{ 中, } \sin B=\frac{OD}{OB}=\frac{5}{13},$$

$$\text{设圆的半径为 } r, \text{ 可得 } \frac{r}{r+8}=\frac{5}{13},$$

$$\text{解得: } r=5,$$

$$\therefore AE=10, AB=18,$$

$\therefore AE$ 是直径,

$$\therefore \angle AFE=\angle C=90^{\circ},$$

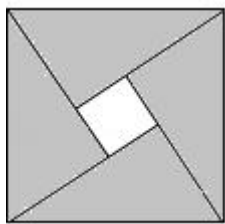
$$\therefore EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEF=\angle B,$$

$$\therefore \sin \angle AEF=\frac{AF}{AE}=\frac{5}{13},$$

$$\therefore AF=AE \cdot \sin \angle AEF=10 \times \frac{5}{13}=\frac{50}{13},$$

$$\therefore AF \parallel OD,$$



【分析】针尖落在阴影区域的概率就是四个直角三角形的面积之和与大正方形面积的比.

【解答】解：设两直角边分别是 $2x$, $3x$, 则斜边即大正方形的边长为 $\sqrt{13}x$, 小正方形边长为 x ,

所以 $S_{\text{大正方形}}=13x^2$, $S_{\text{小正方形}}=x^2$, $S_{\text{阴影}}=12x^2$,

则针尖落在阴影区域的概率为 $\frac{12x^2}{13x^2}=\frac{12}{13}$.

故答案为: $\frac{12}{13}$.

【点评】此题主要考查了几何概率问题, 用到的知识点为: 概率=相应的面积与总面积之比.

23. (4 分) 已知 $a > 0$, $S_1=\frac{1}{a}$, $S_2=-S_1-1$, $S_3=\frac{1}{S_2}$, $S_4=-S_3-1$, $S_5=\frac{1}{S_4}$, ... (即当 n 为大于 1 的奇数时, $S_n=\frac{1}{S_{n-1}}$; 当 n 为大于 1 的偶数时, $S_n=-S_{n-1}-1$), 按此规律, $S_{2018}=\underline{-\frac{a+1}{a}}$.

【分析】根据 S_n 数的变化找出 S_n 的值每 6 个一循环, 结合 $2018=336 \times 6+2$, 即可得出 $S_{2018}=S_2$, 此题得解.

【解答】解: $S_1=\frac{1}{a}$, $S_2=-S_1-1=-\frac{1}{a}-1=-\frac{a+1}{a}$, $S_3=\frac{1}{S_2}=-\frac{a}{a+1}$, $S_4=-S_3-1=\frac{a}{a+1}-1=-\frac{1}{a+1}$, $S_5=\frac{1}{S_4}=-(a+1)$, $S_6=-S_5-1=(a+1)-1=a$, $S_7=\frac{1}{S_6}=\frac{1}{a}$, ...,

$\therefore S_n$ 的值每 6 个一循环.

$\because 2018=336 \times 6+2$,

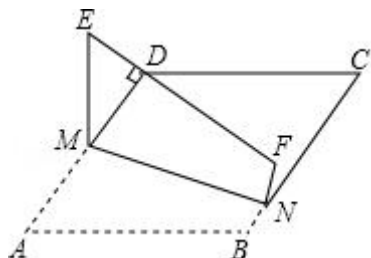
$\therefore S_{2018}=S_2=-\frac{a+1}{a}$.

故答案为: $-\frac{a+1}{a}$.

【点评】本题考查了规律型中数字的变化类, 根据数值的变化找出 S_n 的值每 6 个一循环是解

题的关键.

24. (4 分) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\tan A = \frac{4}{3}$, M , N 分别在边 AD , BC 上, 将四边形 $AMNB$ 沿 MN 翻折, 使 AB 的对应线段 EF 经过顶点 D , 当 $EF \perp AD$ 时, $\frac{BN}{CN}$ 的值为 $\frac{2}{7}$.



【分析】首先延长 NF 与 DC 交于点 H , 进而利用翻折变换的性质得出 $NH \perp DC$, 再利用边角关系得出 BN , CN 的长进而得出答案.

【解答】解: 延长 NF 与 DC 交于点 H ,

$$\therefore \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle FDH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFN + \angle DFH = 180^\circ, \quad \angle A + \angle B = 180^\circ, \quad \angle B = \angle DFN,$$

$$\therefore \angle A = \angle DFH,$$

$$\therefore \angle FDH + \angle DFH = 90^\circ,$$

$$\therefore NH \perp DC,$$

设 $DM = 4k$, $DE = 3k$, $EM = 5k$,

$$\therefore AD = 9k = DC, \quad DF = 6k,$$

$$\therefore \tan A = \tan \angle DFH = \frac{4}{3},$$

$$\text{则 } \sin \angle DFH = \frac{4}{5},$$

$$\therefore DH = \frac{4}{5}DF = \frac{24}{5}k,$$

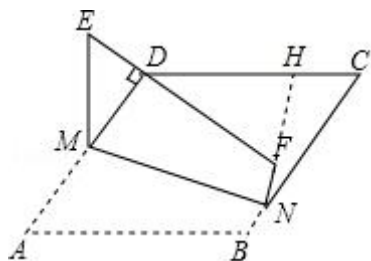
$$\therefore CH = 9k - \frac{24}{5}k = \frac{21}{5}k,$$

$$\therefore \cos C = \cos A = \frac{CH}{NC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore CN = \frac{5}{3}CH = 7k,$$

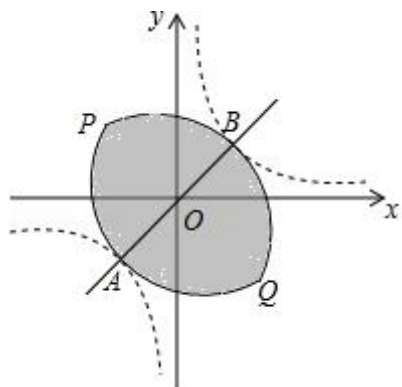
$$\therefore BN = 2k,$$

$$\therefore \frac{BN}{CN} = \frac{2}{7}.$$



【点评】此题主要考查了翻折变换的性质以及解直角三角形，正确表示出 CN 的长是解题关键.

25. (4 分) 设双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 与直线 $y = x$ 交于 A , B 两点 (点 A 在第三象限), 将双曲线在第一象限的一支沿射线 BA 的方向平移, 使其经过点 A , 将双曲线在第三象限的一支沿射线 AB 的方向平移, 使其经过点 B , 平移后的两条曲线相交于 P , Q 两点, 此时我们称平移后的两条曲线所围部分 (如图中阴影部分) 为双曲线的“眸”, PQ 为双曲线的“眸径”, 当双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的眸径为 6 时, k 的值为 $\frac{3}{2}$.



【分析】以 PQ 为边, 作矩形 $PQQ'P'$ 交双曲线于点 P' , Q' , 联立直线 AB 及双曲线解析式成方程组, 通过解方程组可求出点 A 、 B 的坐标, 由 PQ 的长度可得出点 P 的坐标 (点 P 在直线 $y = -x$ 上找出点 P 的坐标), 由图形的对称性结合点 A 、 B 和 P 的坐标可得出点 P' 的坐标, 再利用反比例函数图象上点的坐标特征即可得出关于 k 的一元一次方程, 解之即可得出结论.

【解答】解: 以 PQ 为边, 作矩形 $PQQ'P'$ 交双曲线于点 P' , Q' , 如图所示.

联立直线 **AB** 及双曲线解析式成方程组, $\begin{cases} y=x \\ y=\frac{k}{x} \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} x_1=-\sqrt{k} \\ y_1=-\sqrt{k} \end{cases}, \begin{cases} x_2=\sqrt{k} \\ y_2=\sqrt{k} \end{cases}$,

$\therefore$ 点 **A** 的坐标为 $(-\sqrt{k}, -\sqrt{k})$, 点 **B** 的坐标为 $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$.

$\therefore PQ=6$,

$\therefore OP=3$, 点 **P** 的坐标为 $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$.

根据图形的对称性可知: $AB=OO'=PP'$,

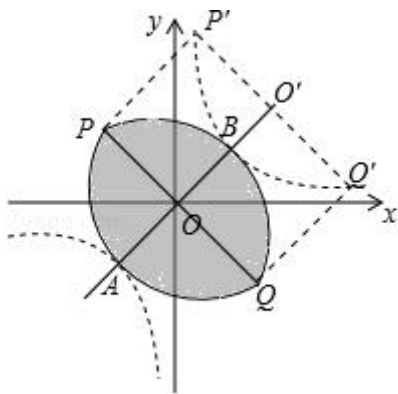
$\therefore$ 点 **P'** 的坐标为 $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{k}, \frac{3\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{k})$.

又 $\therefore$ 点 **P'** 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上,

$\therefore (-\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{k}) \cdot (\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{k}) = k$,

解得: $k=\frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$.



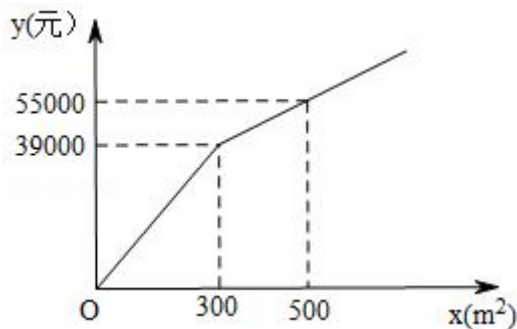
【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题、反比例函数图象上点的坐标特征、矩形的性质以及解一元一次方程, 利用矩形的性质结合函数图象找出点 **P'** 的坐标是解题的关键.

二、解答题 (本大题共 3 小题, 共 30 分)

26. (8 分) 为了美化环境, 建设宜居成都, 我市准备在一个广场上种植甲、乙两种花卉, 经市场调查, 甲种花卉的种植费用 y (元) 与种植面积 x (m^2) 之间的函数关系如图所示, 乙种花卉的种植费用为每平方米 100 元.

(1) 直接写出当 $0 \leq x \leq 300$ 和 $x > 300$ 时, y 与 x 的函数关系式;

(2) 广场上甲、乙两种花卉的种植面积共 1200m^2 , 若甲种花卉的种植面积不少于 200m^2 , 且不超过乙种花卉种植面积的 2 倍, 那么应该怎样分配甲、乙两种花卉的种植面积才能使种植总费用最少? 最少总费用为多少元?



【分析】(1) 由图可知 y 与 x 的函数关系式是分段函数, 待定系数法求解析式即可.

(2) 设甲种花卉种植为 $a\text{m}^2$, 则乙种花卉种植 $(1200 - a)\text{m}^2$, 根据实际意义可以确定 a 的范围, 结合种植费用 y (元) 与种植面积 x (m^2) 之间的函数关系可以分类讨论最少费用为多少.

【解答】解: (1) $y = \begin{cases} 130x & (0 \leq x \leq 300) \\ 80x + 15000 & (x > 300) \end{cases}$

(2) 设甲种花卉种植为 $a\text{m}^2$, 则乙种花卉种植 $(1200 - a)\text{m}^2$.

$$\therefore \begin{cases} a \geq 200 \\ a \leq 2(1200 - a) \end{cases},$$

$$\therefore 200 \leq a \leq 800$$

当 $200 \leq a < 300$ 时, $W_1 = 130a + 100(1200 - a) = 30a + 12000$.

当 $a = 200$ 时, $W_{\min} = 126000$ 元

当 $300 \leq a \leq 800$ 时, $W_2 = 80a + 15000 + 100(1200 - a) = 135000 - 20a$.

当 $a = 800$ 时, $W_{\min} = 119000$ 元

$$\therefore 119000 < 126000$$

$\therefore$ 当 $a = 800$ 时, 总费用最少, 最少总费用为 119000 元.

此时乙种花卉种植面积为 $1200 - 800 = 400\text{m}^2$.

答: 应该分配甲、乙两种花卉的种植面积分别是 800m^2 和 400m^2 , 才能使种植总费用最少,

最少总费用为 119000 元.

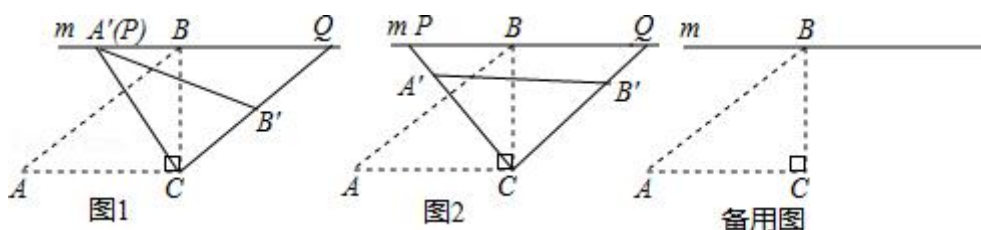
【点评】本题是看图写函数解析式并利用解析式的题目，考查分段函数的表达和分类讨论的数学思想.

27. (10 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=\sqrt{7}$, $AC=2$, 过点 B 作直线 $m\parallel AC$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle A'B'C'$ (点 A , B 的对应点分别为 A' , B'), 射线 CA' , CB' 分别交直线 m 于点 P , Q .

(1) 如图 1, 当 P 与 A' 重合时, 求 $\angle ACA'$ 的度数;

(2) 如图 2, 设 $A'B'$ 与 BC 的交点为 M , 当 M 为 $A'B'$ 的中点时, 求线段 PQ 的长;

(3) 在旋转过程中, 当点 P , Q 分别在 CA' , CB' 的延长线上时, 试探究四边形 $PA'B'Q$ 的面积是否存在最小值. 若存在, 求出四边形 $PA'B'Q$ 的最小面积; 若不存在, 请说明理由.



【分析】(1) 由旋转可得: $AC=A'C=2$, 进而得到 $BC=\sqrt{3}$, 依据 $\angle A'BC=90^\circ$, 可得 $\cos \angle A'CB = \frac{BC}{A'C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即可得到 $\angle A'CB=30^\circ$, $\angle ACA'=60^\circ$;

(2) 根据 M 为 $A'B'$ 的中点, 即可得出 $\angle A = \angle A'CM$, 进而得到 $PB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{3}{2}$, 依据 $\tan \angle Q = \tan \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即可得到 $BQ = BC \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$, 进而得出 $PQ = PB + BQ = \frac{7}{2}$;

(3) 依据 $S_{\text{四边形 } PA'B'Q} = S_{\triangle PCQ} - S_{\triangle A'CB'} = S_{\triangle PCQ} - \sqrt{3}$, 即可得到 $S_{\text{四边形 } PA'B'Q}$ 最小, 即 $S_{\triangle PCQ}$ 最小, 而 $S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}PQ \times BC = \frac{\sqrt{3}}{2}PQ$, 利用几何法或代数法即可得到 $S_{\triangle PCQ}$ 的最小值 $=3$, $S_{\text{四边形 } PA'B'Q} = 3 - \sqrt{3}$.

【解答】解: (1) 由旋转可得: $AC=A'C=2$,

$\therefore \angle ACB=90^\circ$, $AB=\sqrt{7}$, $AC=2$,

$\therefore BC=\sqrt{3}$,

$$\therefore \angle ACB=90^\circ, m \parallel AC,$$

$$\therefore \angle A'BC=90^\circ,$$

$$\therefore \cos \angle A'CB = \frac{BC}{A'C} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle A'CB=30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACA'=60^\circ;$$

(2) $\therefore M$ 为 $A'B'$ 的中点,

$$\therefore \angle A'CM = \angle MA'C,$$

由旋转可得, $\angle MA'C = \angle A$,

$$\therefore \angle A = \angle A'CM,$$

$$\therefore \tan \angle PCB = \tan \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore PB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \tan \angle Q = \tan \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BQ = BC \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2,$$

$$\therefore PQ = PB + BQ = \frac{7}{2};$$

$$(3) \therefore S_{\text{四边形 } PA'B'Q} = S_{\triangle PCQ} - S_{\triangle A'CB'} = S_{\triangle PCQ} - \sqrt{3},$$

$\therefore S_{\text{四边形 } PA'B'Q}$ 最小, 即 $S_{\triangle PCQ}$ 最小,

$$\therefore S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}PQ \times BC = \frac{\sqrt{3}}{2}PQ,$$

法一: (几何法) 取 PQ 的中点 G , 则 $\angle PCQ=90^\circ$,

$$\therefore CG = \frac{1}{2}PQ, \text{ 即 } PQ = 2CG,$$

当 CG 最小时, PQ 最小,

$\therefore CG \perp PQ$, 即 CG 与 CB 重合时, CG 最小,

$$\therefore CG_{\min} = \sqrt{3}, PQ_{\min} = 2\sqrt{3},$$

$\therefore S_{\triangle PCQ}$ 的最小值=3, $S_{\text{四边形 PA'B'Q}}=3-\sqrt{3}$;

法二 (代数法) 设 $PB=x$, $BQ=y$,

由射影定理得: $xy=3$,

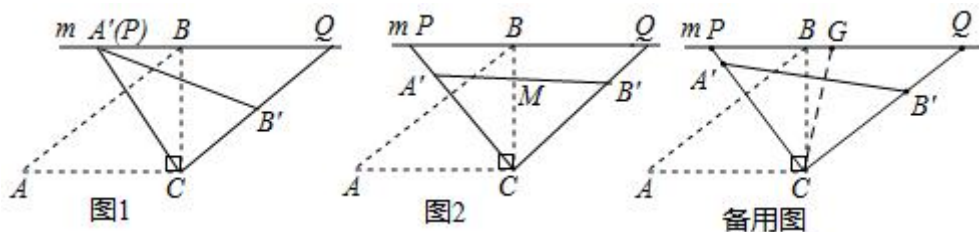
$\therefore$ 当 PQ 最小时, $x+y$ 最小,

$\therefore (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 6 + y^2 \geq 2xy + 6 = 12$,

当 $x=y=\sqrt{3}$ 时, “=” 成立,

$\therefore PQ=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle PCQ}$ 的最小值=3, $S_{\text{四边形 PA'B'Q}}=3-\sqrt{3}$.



【点评】本题属于四边形综合题, 主要考查了旋转的性质, 解直角三角形以及直角三角形的性质的综合运用, 解题时注意: 旋转变换中, 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角; 旋转前、后的图形全等.

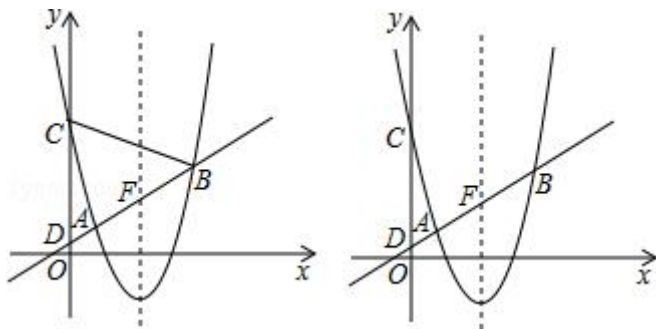
28. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 以直线 $x=\frac{5}{2}$ 对称轴的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $l: y=kx+m$ ($k>0$) 交于 $A(1, 1)$, B 两点, 与 y 轴交于 $C(0, 5)$, 直线与 y 轴交于点 D .

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 设直线 l 与抛物线的对称轴的交点为 F , G 是抛物线上位于对称轴右侧的一点, 若 $\frac{AF}{FB}=\frac{3}{4}$,

且 $\triangle BCG$ 与 $\triangle BCD$ 面积相等, 求点 G 的坐标;

(3) 若在 x 轴上有且仅有一点 P , 使 $\angle APB=90^\circ$, 求 k 的值.



【分析】(1) 根据已知列出方程组求解即可；

(2) 作 $AM \perp x$ 轴， $BN \perp x$ 轴，垂足分别为 M ， N ，求出直线 l 的解析式，在分两种情况分别分析出 G 点坐标即可；

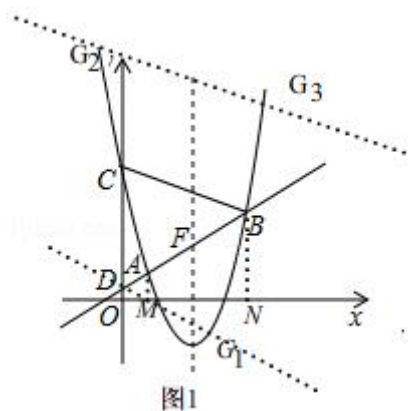
(3) 根据题意分析得出以 AB 为直径的圆与 x 轴只有一个交点，且 P 为切点， P 为 MN 的中点，运用三角形相似建立等量关系列出方程求解即可。

【解答】解：(1) 由题意可得，
$$\begin{cases} \frac{b}{2a} = -\frac{5}{2} \\ c = 5 \\ a + b + c = 1 \end{cases},$$

解得， $a = 1$ ， $b = -5$ ， $c = 5$ ；

$\therefore$ 二次函数的解析式为： $y = x^2 - 5x + 5$ ，

(2) 作 $AM \perp x$ 轴， $BN \perp x$ 轴，垂足分别为 M ， N ，



则

$$\frac{AF}{FB} = \frac{MQ}{QN} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore MQ = \frac{3}{2},$$

$$\therefore NQ = 2, B \left(\frac{9}{2}, \frac{11}{4} \right);$$

$$\therefore \begin{cases} k+m=1 \\ \frac{9}{2}k+m=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ m=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \quad D(0, \frac{1}{2}),$$

$$\text{同理可求, } y_{BC} = -\frac{1}{2}x + 5,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BCG},$$

$$\therefore \textcircled{1} DG \parallel BC \text{ (G 在 BC 下方), } y_{DG} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

$$\therefore -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x^2 - 5x + 5,$$

$$\text{解得, } x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = 3,$$

$$\therefore x > \frac{5}{2},$$

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore G(3, -1).$$

②G 在 BC 上方时, 直线 G_2G_3 与 DG_1 关于 BC 对称,

$$\therefore y_{G_2G_3} = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2},$$

$$\therefore -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2} = x^2 - 5x + 5,$$

$$\text{解得, } x_1 = \frac{9+3\sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{9-3\sqrt{17}}{4},$$

$$\therefore x > \frac{5}{2},$$

$$\therefore x = \frac{9+3\sqrt{17}}{4},$$

$$\therefore G\left(\frac{9+3\sqrt{17}}{4}, \frac{67-3\sqrt{17}}{8}\right),$$

综上所述点 G 的坐标为 $G(3, -1)$, $G\left(\frac{9+3\sqrt{17}}{4}, \frac{67-3\sqrt{17}}{8}\right)$.

(3) 由题意可知: $k+m=1$,

$$\therefore m = 1 - k,$$

$$\therefore y_1 = kx + 1 - k,$$

$$\therefore kx+1-k=x^2-5x+5,$$

解得, $x_1=1$, $x_2=k+4$,

$$\therefore B(k+4, k^2+3k+1),$$

设 AB 中点为 O' ,

$\therefore P$ 点有且只有一个,

$\therefore$ 以 AB 为直径的圆与 x 轴只有一个交点, 且 P 为切点,

$\therefore O'P \perp x$ 轴,

$\therefore P$ 为 MN 的中点,

$$\therefore P\left(\frac{k+5}{2}, 0\right),$$

$\therefore \triangle AMP \sim \triangle PNB$,

$$\therefore \frac{AM}{PM} = \frac{PN}{BN},$$

$$\therefore AM \cdot BN = PN \cdot PM,$$

$$\therefore 1 \times (k^2+3k+1) = \left(k+4 - \frac{k+5}{2}\right) \left(\frac{k+5}{2} - 1\right),$$

$\therefore k > 0$,

$$\therefore k = \frac{-6+4\sqrt{6}}{6} = -1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

【点评】此题主要考查二次函数的综合问题, 会灵活根据题意求抛物线解析式, 会分析题中的基本关系列方程解决问题, 会分类讨论各种情况是解题的关键.