

四川省广安市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题（每小题，只有一个选项符合题意，请将正确选项填涂在答题卡上的相应位置，本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。）

1. (3.00 分) -3 的倒数是 ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. -3

2. (3.00 分) 下列运算正确的 ()

- A. $(b^2)^3=b^5$ B. $x^3 \div x^3=x$ C. $5y^3 \cdot 3y^2=15y^5$ D. $a+a^2=a^3$

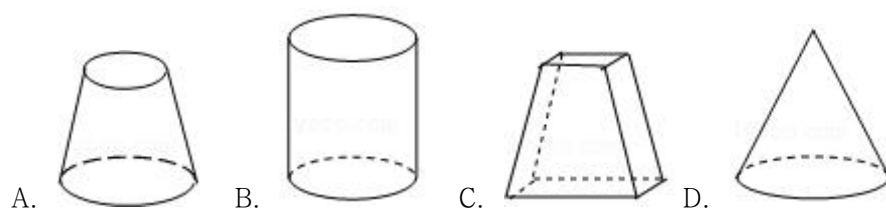
3. (3.00 分) 近年来，国家重视精准扶贫，收效显著. 据统计约有 65 000 000 人脱贫，把 65 000 000 用科学记数法表示，正确的是 ()

- A. 0.65×10^8 B. 6.5×10^7 C. 6.5×10^8 D. 65×10^6

4. (3.00 分) 下列图形中，主视图为①的是 ()



图①



5. (3.00 分) 下列说法正确的是 ()

- A. 为了解我国中学生课外阅读的情况，应采取全面调查的方式
B. 一组数据 1、2、5、5、5、3、3 的中位数和众数都是 5
C. 投掷一枚硬币 100 次，一定有 50 次“正面朝上”
D. 若甲组数据的方差是 0.03，乙组数据的方差是 0.1，则甲组数据比乙组数据稳定

6. (3.00 分) 已知点 P $(1-a, 2a+6)$ 在第四象限，则 a 的取值范围是 ()

- A. $a < -3$ B. $-3 < a < 1$ C. $a > -3$ D. $a > 1$

7. (3.00 分) 抛物线 $y = (x-2)^2 - 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 平移而得到，下列平移正确的是 ()

- A. 先向左平移 2 个单位长度，然后向上平移 1 个单位长度
B. 先向左平移 2 个单位长度，然后向下平移 1 个单位长度

C. 先向右平移 2 个单位长度, 然后向上平移 1 个单位长度

D. 先向右平移 2 个单位长度, 然后向下平移 1 个单位长度

8. (3.00 分) 下列命题中:

①如果 $a > b$, 那么 $a^2 > b^2$

②一组对边平行, 另一组对边相等的四边形是平行四边形

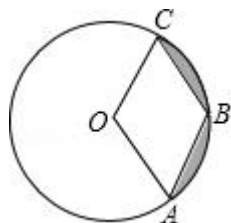
③从圆外一点可以引圆的两条切线, 它们的切线长相等

④关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根, 则 a 的取值范围是 $a \leq 1$

其中真命题的个数是 ()

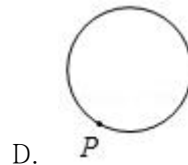
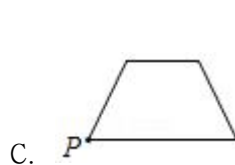
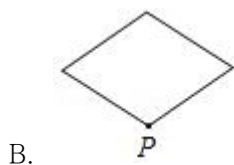
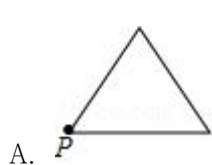
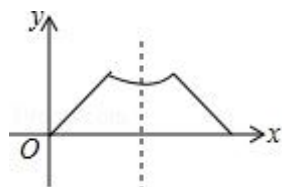
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. (3.00 分) 如图, 已知 $\odot O$ 的半径是 2, 点 A、B、C 在 $\odot O$ 上, 若四边形 OABC 为菱形, 则图中阴影部分面积为 ()



A. $\frac{2}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ B. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ C. $\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ D. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

10. (3.00 分) 已知点 P 为某个封闭图形边界上的一定点, 动点 M 从点 P 出发, 沿其边界顺时针匀速运动一周, 设点 M 的运动时间为 x , 线段 PM 的长度为 y , 表示 y 与 x 的函数图象大致如图所示, 则该封闭图形可能是 ()

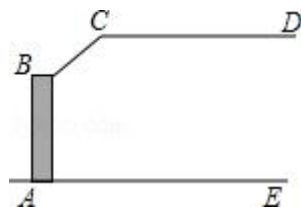


二、填空题 (请把最简单答案填在答题卡相应位置。本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

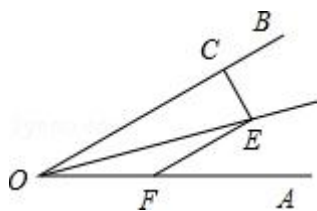
11. (3.00 分) 要使 $\sqrt{x+1}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.

12. (3.00 分) 一个 n 边形的每一个内角等于 108° ，那么 $n=$ _____.

13. (3.00 分) 一大门栏杆的平面示意图如图所示，BA 垂直地面 AE 于点 A，CD 平行于地面 AE，若 $\angle BCD=150^\circ$ ，则 $\angle ABC=$ _____度.



14. (3.00 分) 如图， $\angle AOE=\angle BOE=15^\circ$ ， $EF\parallel OB$ ， $EC\perp OB$ 于 C，若 $EC=1$ ，则 $OF=$ _____.



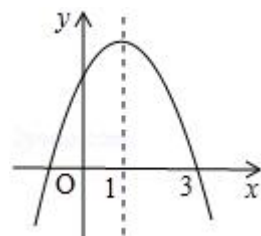
15. (3.00 分) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，对称轴为直线 $x=1$ ，则下列结论正确的有_____.

① $abc > 0$

② 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 $x_1=-1$ ， $x_2=3$

③ $2a+b=0$

④ 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小



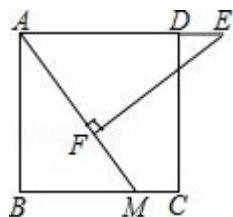
16. (3.00 分) 为了从 2018 枚外形相同的金蛋中找出唯一的有奖金蛋，检查员将这些金蛋按 1 - 2018 的顺序进行标号. 第一次先取出编号为单数的金蛋，发现其中没有有奖金蛋，他将剩下的金蛋在原来的位置上又按 1 - 1009 编了号 (即原来的 2 号变为 1 号，原来的 4 号变为 2 号……原来的 2018 号变为 1009 号)，又从中取出新的编号为单数的金蛋进行检验，仍没有发现有奖金蛋……如此下去，检查到最后一枚金蛋才是有奖金蛋，问这枚有奖金蛋最初的编号是_____.

三、简答题 (本大题共 4 个小题，第 17 题 5 分，第 18、19、20 小题各 6 分，共 23 分)

17. (5.00 分) 计算: $(\frac{1}{3})^{-2} + |\sqrt{3} - 2| - \sqrt{12} + 6\cos 30^\circ + (\pi - 3.14)^0$.

18. (6.00 分) 先化简, 再求值: $\frac{a}{a+1} \div (a - 1 - \frac{2a-1}{a+1})$, 并从 -1, 0, 1, 2 四个数中, 选一个合适的数代入求值

19. (6.00 分) 如图, 四边形 ABCD 是正方形, M 为 BC 上一点, 连接 AM, 延长 AD 至点 E, 使得 AE=AM, 过点 E 作 EF ⊥ AM, 垂足为 F, 求证: AB=EF.

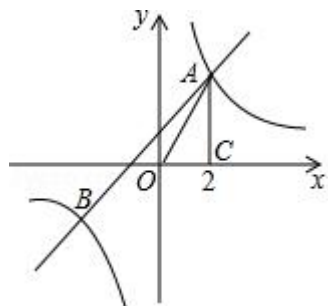


20. (6.00 分) 如图, 一次函数 $y_1 = ax + b$ ($a \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象交于 A、B 两点, 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴, 垂足为 C, 连接 OA, 已知 $OC = 2$, $\tan \angle AOC = \frac{3}{2}$,

B (m, -2)

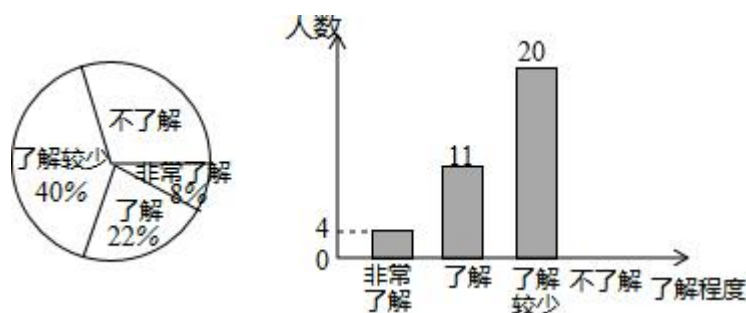
(1) 求一次函数和反比例函数的解析式.

(2) 结合图象直接写出: 当 $y_1 > y_2$ 时, x 的取值范围.



四、实践应用题 (本大题共 4 个小题, 第 21 题 6 分, 第 22、23、24 题各 8 分, 共 30 分)

21. (6.00 分) 某校为了了解了解节能减排、垃圾分类等知识的普及情况, 从该校 2000 名学生中随机抽取了部分学生进行调查调查, 调查结果分为“非常了解”、“了解”、“了解较少”、“不了解”四类, 并将调查结果绘制出以下两幅不完整的统计图, 请根据统计图回答下列问题:



(1) 本次调查的学生共有_____人，估计该校 2000 名学生中“不了解”的人数约有人.

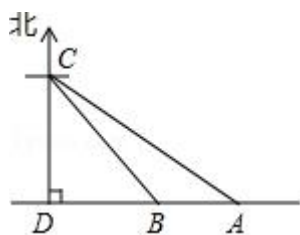
(2) “非常了解”的 4 人中有 A_1, A_2 两名男生, B_1, B_2 两名女生, 若从中随机抽取两人去参加环保知识竞赛, 请用画树状图和列表的方法, 求恰好抽到 2 名男生的概率.

22. (8.00 分) 某车行去年 A 型车的销售总额为 6 万元, 今年每辆车的售价比去年减少 400 元. 若卖出的数量相同, 销售总额将比去年减少 20%.

(1) 求今年 A 型车每辆车的售价.

(2) 该车行计划新进一批 A 型车和 B 型车共 45 辆, 已知 A、B 型车的进货价格分别是 1100 元, 1400 元, 今年 B 型车的销售价格是 2000 元, 要求 B 型车的进货数量不超过 A 型车数量的两倍, 应如何进货才能使这批车获得最大利润, 最大利润是多少?

23. (8.00 分) 据调查, 超速行驶是引发交通事故的主要原因之一. 小强用所学知识对一条笔直公路上的车辆进行测速, 如图所示, 观测点 C 到公路的距离 $CD=200\text{m}$, 检测路段的起点 A 位于点 C 的南偏东 60° 方向上, 终点 B 位于点 C 的南偏东 45° 方向上. 一辆轿车由东向西匀速行驶, 测得此车由 A 处行驶到 B 处的时间为 10s. 问此车是否超过了该路段 16m/s 的限制速度? (观测点 C 离地面的距离忽略不计, 参考数据: $\sqrt{2}\approx 1.41$, $\sqrt{3}\approx 1.73$)



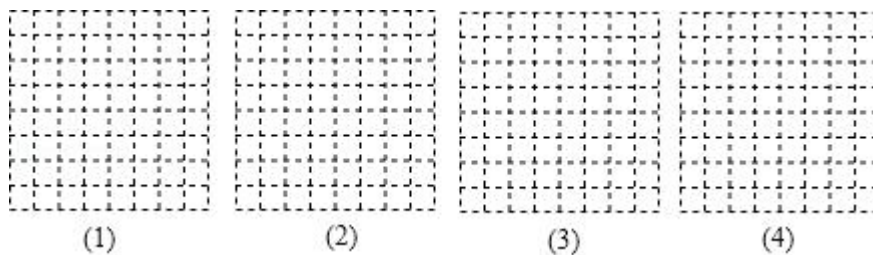
24. (8.00 分) 下面有 4 张形状、大小完全相同的方格纸, 方格纸中的每个小正方形的边长都是 1, 请在方格纸中分别画出符合要求的图形, 所画图形各顶点必须与方格纸中小正方形的顶点重合, 具体要求如下:

(1) 画一个直角边长为 4, 面积为 6 的直角三角形.

(2) 画一个底边长为 4, 面积为 8 的等腰三角形.

(3) 画一个面积为 5 的等腰直角三角形.

(4) 画一个边长为 $2\sqrt{2}$, 面积为 6 的等腰三角形.

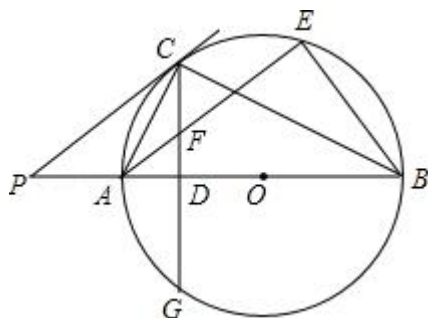


五、推理论证题 (9 分)

25. (9.00 分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, P 是 BA 延长线上一点, PC 切 $\odot O$ 于点 C, CG 是 $\odot O$ 的弦, $CG \perp AB$, 垂足为 D.

(1) 求证: $\angle PCA = \angle ABC$.

(2) 过点 A 作 $AE \parallel PC$ 交 $\odot O$ 于点 E, 交 CD 于点 F, 连接 BE, 若 $\cos \angle P = \frac{4}{5}$, $CF = 10$, 求 BE 的长



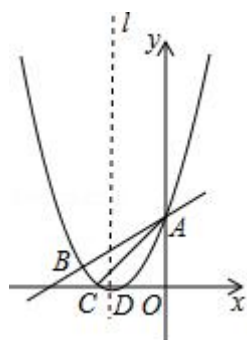
六、拓展探索题 (10 分)

26. (10.00 分) 如图, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 交于 A, B 两点, 交 x 轴于 C, D 两点, 连接 AC, BC, 已知 A (0, 3), C (-3, 0).

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在抛物线对称轴 l 上找一点 M, 使 $|MB - MD|$ 的值最大, 并求出这个最大值;

(3) 点 P 为 y 轴右侧抛物线上一动点, 连接 PA, 过点 P 作 $PQ \perp PA$ 交 y 轴于点 Q, 问: 是否存在点 P 使得以 A, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似? 若存在, 请求出所有符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



参考答案与试题解析

一、选择题（每小题，只有一个选项符合题意，请将正确选项填涂在答题卡上的相应位置，本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。）

1. (3.00 分) -3 的倒数是 ()

A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. -3

【分析】利用倒数的定义，直接得出结果.

【解答】解： $\because -3 \times (-\frac{1}{3}) = 1$,

$\therefore -3$ 的倒数是 $-\frac{1}{3}$.

故选：C.

【点评】主要考查倒数的定义，要求熟练掌握. 需要注意的是负数的倒数还是负数.

倒数的定义：若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数.

2. (3.00 分) 下列运算正确的 ()

A. $(b^2)^3 = b^5$ B. $x^3 \div x^3 = x$ C. $5y^3 \cdot 3y^2 = 15y^5$ D. $a + a^2 = a^3$

【分析】直接利用幂的乘方运算法则以及同底数幂的除法运算法则、单项式乘以单项式和合并同类项法则.

【解答】解：A、 $(b^2)^3 = b^6$ ，故此选项错误；

B、 $x^3 \div x^3 = 1$ ，故此选项错误；

C、 $5y^3 \cdot 3y^2 = 15y^5$ ，正确；

D、 $a + a^2$ ，无法计算，故此选项错误.

故选：C.

【点评】此题主要考查了幂的乘方运算以及同底数幂的除法运算、单项式乘以单项式和合并同类项，正确掌握相关运算法则是解题关键.

3. (3.00 分) 近年来，国家重视精准扶贫，收效显著. 据统计约有 65 000 000 人脱贫，把 65 000 000 用科学记数法表示，正确的是 ()

A. 0.65×10^8 B. 6.5×10^7 C. 6.5×10^8 D. 65×10^6

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当

原数绝对值大于 10 时， n 是正数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负数.

【解答】解：65 000 000= 6.5×10^7 .

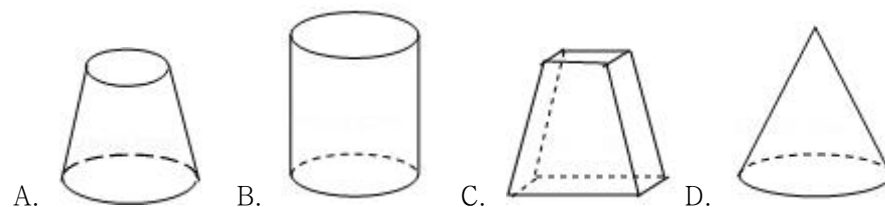
故选：B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (3.00 分) 下列图形中，主视图为①的是 ()



图①



【分析】主视图是从物体的正面看得到的图形，分别写出每个选项中的主视图，即可得到答案.

【解答】解：A、主视图是等腰梯形，故此选项错误；

B、主视图是长方形，故此选项正确；

C、主视图是等腰梯形，故此选项错误；

D、主视图是三角形，故此选项错误；

故选：B.

【点评】此题主要考查了简单几何体的主视图，关键是掌握主视图所看的位置.

5. (3.00 分) 下列说法正确的是 ()

A. 为了解我国中学生课外阅读的情况，应采取全面调查的方式

B. 一组数据 1、2、5、5、5、3、3 的中位数和众数都是 5

C. 投掷一枚硬币 100 次，一定有 50 次“正面朝上”

D. 若甲组数据的方差是 0.03，乙组数据的方差是 0.1，则甲组数据比乙组数据稳定

【分析】根据各个选项中的说法，可以判断是否正确，从而可以解答本题.

【解答】解：为了解我国中学生课外阅读的情况，应采取抽样调查的方式，故选项 A 错误，

一组数据 1、2、5、5、5、3、3 的中位数和众数分别是 3、5，故选项 B 错误，

投掷一枚硬币 100 次，可能有 50 次“正面朝上”，但不一定有 50 次“正面朝上”，故选项 C 错误，

若甲组数据的方差是 0.03，乙组数据的方差是 0.1，则甲组数据比乙组数据稳定，故选项 D 正确，

故选：D.

【点评】 本题考查全面调查与抽样调查、中位数、众数、方差，解答本题的关键是明确它们各自的含义.

6. (3.00 分) 已知点 P $(1-a, 2a+6)$ 在第四象限，则 a 的取值范围是 ()

A. $a < -3$ B. $-3 < a < 1$ C. $a > -3$ D. $a > 1$

【分析】 根据第四象限的点的横坐标是正数，纵坐标是负数列出不等式组求解即可.

【解答】 解：∵ 点 P $(1-a, 2a+6)$ 在第四象限，

$$\therefore \begin{cases} 1-a > 0 \\ 2a+6 < 0 \end{cases},$$

解得 $a < -3$.

故选：A.

【点评】 本题考查了点的坐标，一元一次不等式组的解法，求不等式组解集的口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）.

7. (3.00 分) 抛物线 $y = (x-2)^2 - 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 平移而得到，下列平移正确的是 ()

A. 先向左平移 2 个单位长度，然后向上平移 1 个单位长度

B. 先向左平移 2 个单位长度，然后向下平移 1 个单位长度

C. 先向右平移 2 个单位长度，然后向上平移 1 个单位长度

D. 先向右平移 2 个单位长度，然后向下平移 1 个单位长度

【分析】 抛物线平移问题可以以平移前后两个解析式的顶点坐标为基准研究.

【解答】 解：抛物线 $y = x^2$ 顶点为 $(0, 0)$ ，抛物线 $y = (x-2)^2 - 1$ 的顶点为 $(2, -1)$ ，则抛物线 $y = x^2$ 向右平移 2 个单位，向下平移 1 个单位得到抛物线 $y = (x-2)^2 - 1$ 的图象.

故选：D.

【点评】本题考查二次函数图象平移问题，解答时最简单方法是确定平移前后的抛物线顶点，从而确定平移方向.

8. (3.00 分) 下列命题中:

- ①如果 $a > b$, 那么 $a^2 > b^2$
- ②一组对边平行, 另一组对边相等的四边形是平行四边形
- ③从圆外一点可以引圆的两条切线, 它们的切线长相等
- ④关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根, 则 a 的取值范围是 $a \leq 1$

其中真命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

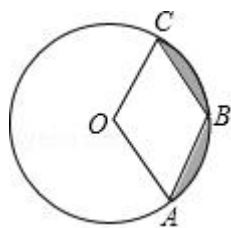
【分析】直接利用切线长定理以及平行四边形的判定和一元二次方程根的判别式分别判断得出答案.

【解答】解: ①如果 $a > b$, 那么 $a^2 > b^2$, 错误;
②一组对边平行, 另一组对边相等的四边形是平行四边形, 错误;
③从圆外一点可以引圆的两条切线, 它们的切线长相等, 正确;
④关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根, 则 a 的取值范围是 $a \leq 1$ 且 $a \neq 0$, 故此选项错误.

故选: A.

【点评】此题主要考查了命题与定理, 正确把握相关性质是解题关键.

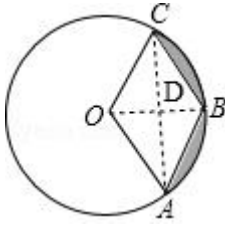
9. (3.00 分) 如图, 已知 $\odot O$ 的半径是 2, 点 A、B、C 在 $\odot O$ 上, 若四边形 OABC 为菱形, 则图中阴影部分面积为 ()



- A. $\frac{2}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ B. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ C. $\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ D. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

【分析】连接 OB 和 AC 交于点 D, 根据菱形及直角三角形的性质先求出 AC 的长及 $\angle AOC$ 的度数, 然后求出菱形 ABCO 及扇形 AOC 的面积, 则由 $S_{\text{菱形 ABCO}} - S_{\text{扇形 AOC}}$ 可得答案.

【解答】解：连接 OB 和 AC 交于点 D，如图所示：



∵ 圆的半径为 2，

∴ $OB=OA=OC=2$ ，

又四边形 OACB 是菱形，

∴ $OB \perp AC$ ， $OD = \frac{1}{2}OB = 1$ ，

在 $Rt\triangle COD$ 中利用勾股定理可知： $CD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ， $AC = 2CD = 2\sqrt{3}$ ，

∴ $\sin \angle COD = \frac{CD}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

∴ $\angle COD = 60^\circ$ ， $\angle AOC = 2\angle COD = 120^\circ$ ，

∴ $S_{\text{菱形} ABCO} = \frac{1}{2}OB \times AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ，

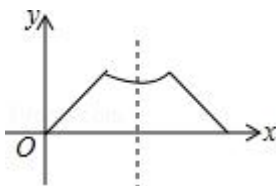
$S_{\text{扇形} AOC} = \frac{120 \cdot \pi \cdot 2^2}{360} = \frac{4\pi}{3}$ ，

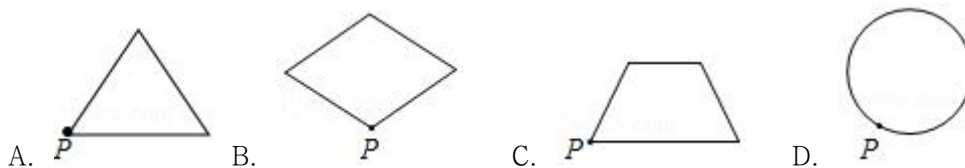
则图中阴影部分面积为 $S_{\text{菱形} ABCO} - S_{\text{扇形} AOC} = \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 。

故选：C。

【点评】本题考查扇形面积的计算及菱形的性质，解题关键是熟练掌握菱形的面积 $= \frac{1}{2}a \cdot b$ （a、b 是两条对角线的长度）；扇形的面积 $= \frac{n\pi r^2}{360}$ ，有一定的难度。

10. (3.00 分) 已知点 P 为某个封闭图形边界上的一点，动点 M 从点 P 出发，沿其边界顺时针匀速运动一周，设点 M 的运动时间为 x，线段 PM 的长度为 y，表示 y 与 x 的函数图象大致如图所示，则该封闭图形可能是 ()





【分析】先观察图象得到 y 与 x 的函数图象分三个部分, 则可对有 4 边的封闭图形进行淘汰, 利用圆的定义, P 点在圆上运动时, PM 总上等于半径, 则可对 D 进行判断, 从而得到正确选项.

【解答】解: y 与 x 的函数图象分三个部分, 而 B 选项和 C 选项中的封闭图形都有 4 条线段, 其图象要分四个部分, 所以 B 、 C 选项不正确; D 选项中的封闭图形为圆, y 为定中, 所以 D 选项不正确; A 选项为三角形, M 点在三边上运动对应三段图象, 且 M 点在 P 点的对边上运动时, PM 的长有最小值.

故选: A .

【点评】本题考查了动点问题的函数图象: 函数图象是典型的数形结合, 图象应用信息广泛, 通过看图获取信息, 不仅可以解决生活中的实际问题, 还可以提高分析问题、解决问题的能力. 用图象解决问题时, 要理清图象的含义即会识图.

二、填空题 (请把最简单答案填在答题卡相应位置. 本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

11. (3.00 分) 要使 $\sqrt{x+1}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是 $x \geq -1$.

【分析】根据二次根式的性质可以得到 $x+1$ 是非负数, 由此即可求解.

【解答】解: 依题意得

$$x+1 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -1.$$

故答案为: $x \geq -1$.

【点评】此题主要考查了二次根式有意义的条件, 根据被开方数是非负数即可解决问题.

12. (3.00 分) 一个 n 边形的每一个内角等于 108° , 那么 $n = 5$.

【分析】首先求得外角的度数, 然后利用 360 度除以外角的度数即可求得.

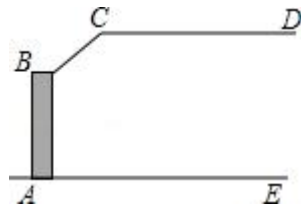
【解答】解: 外角的度数是: $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$,

$$\text{则 } n = \frac{360^\circ}{72^\circ} = 5,$$

故答案为：5.

【点评】本题考查根据多边形的内角和计算公式求多边形的边数，解答时要会根据公式进行正确运算、变形和数据处理.

13. (3.00 分) 一大门栏杆的平面示意图如图所示，BA 垂直地面 AE 于点 A，CD 平行于地面 AE，若 $\angle BCD=150^\circ$ ，则 $\angle ABC=$ 120 度.



【分析】先过点 B 作 $BF \parallel CD$ ，由 $CD \parallel AE$ ，可得 $CD \parallel BF \parallel AE$ ，继而证得 $\angle 1 + \angle BCD = 180^\circ$ ， $\angle 2 + \angle BAE = 180^\circ$ ，又由 BA 垂直于地面 AE 于 A， $\angle BCD = 150^\circ$ ，求得答案.

【解答】解：如图，过点 B 作 $BF \parallel CD$ ，

$\because CD \parallel AE$ ，

$\therefore CD \parallel BF \parallel AE$ ，

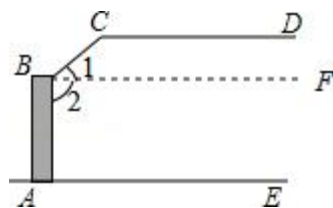
$\therefore \angle 1 + \angle BCD = 180^\circ$ ， $\angle 2 + \angle BAE = 180^\circ$ ，

$\because \angle BCD = 150^\circ$ ， $\angle BAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = 30^\circ$ ， $\angle 2 = 90^\circ$ ，

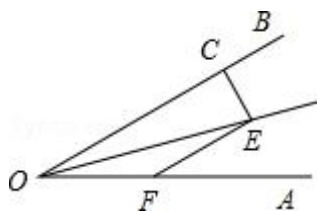
$\therefore \angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = 120^\circ$.

故答案为：120.



【点评】此题考查了平行线的性质. 注意掌握辅助线的作法，注意数形结合思想的应用.

14. (3.00 分) 如图， $\angle AOE = \angle BOE = 15^\circ$ ， $EF \parallel OB$ ， $EC \perp OB$ 于 C，若 $EC = 1$ ，则 $OF =$ 2.



【分析】作 $EH \perp OA$ 于 H ，根据角平分线的性质求出 EH ，根据直角三角形的性质求出 EF ，根据等腰三角形的性质解答.

【解答】解：作 $EH \perp OA$ 于 H ，

$\because \angle AOE = \angle BOE = 15^\circ$ ， $EC \perp OB$ ， $EH \perp OA$ ，

$\therefore EH = EC = 1$ ， $\angle AOB = 30^\circ$ ，

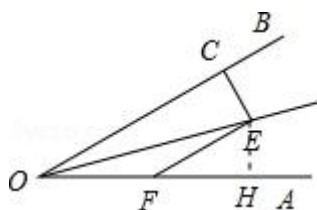
$\because EF \parallel OB$ ，

$\therefore \angle EFH = \angle AOB = 30^\circ$ ， $\angle FEO = \angle BOE$ ，

$\therefore EF = 2EH = 2$ ， $\angle FEO = \angle FOE$ ，

$\therefore OF = EF = 2$ ，

故答案为：2.



【点评】本题考查的是角平分线的性质、平行线的性质，掌握角的平分线上的点到角的两边的距离相等是解题的关键.

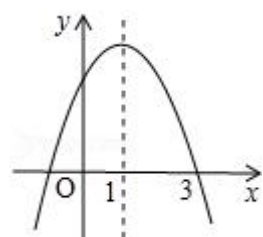
15. (3.00 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，对称轴为直线 $x = 1$ ，则下列结论正确的有 ②③.

① $abc > 0$

② 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根是 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$

③ $2a + b = 0$

④ 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小



【分析】由函数图象可得抛物线开口向下，得到 $a < 0$ ，又对称轴在 y 轴右侧，可得 $b > 0$ ，根据抛物线与 y 轴的交点在 y 轴正半轴，得到 $c > 0$ ，进而得到 $abc < 0$ ，结论①错误；由抛物线与 x 轴的交点为 $(3, 0)$ 及对称轴为 $x=1$ ，利用对称性得到抛物线与 x 轴另一个交点为 $(-1, 0)$ ，进而得到方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根分别为 -1 和 3 ，结论②正确；由抛物线的对称轴为 $x=1$ ，利用对称轴公式得到 $2a+b=0$ ，结论③正确；由抛物线的对称轴为直线 $x=1$ ，得到对称轴右边 y 随 x 的增大而减小，对称轴左边 y 随 x 的增大而增大，故 x 大于 0 小于 1 时， y 随 x 的增大而增大，结论④错误。

【解答】解：∵ 抛物线开口向下，∴ $a < 0$ ，
∵ 对称轴在 y 轴右侧，∴ $-\frac{b}{2a} > 0$ ，∴ $b > 0$ ，
∵ 抛物线与 y 轴的交点在 y 轴正半轴，∴ $c > 0$ ，
∴ $abc < 0$ ，故①错误；
∵ 抛物线与 x 轴的一个交点为 $(3, 0)$ ，又对称轴为直线 $x=1$ ，
∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(-1, 0)$ ，
∴ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根是 $x_1=-1$ ， $x_2=3$ ，故②正确；
∵ 对称轴为直线 $x=1$ ，∴ $-\frac{b}{2a}=1$ ，即 $2a+b=0$ ，故③正确；
∵ 由函数图象可得：当 $0 < x < 1$ 时， y 随 x 的增大而增大；
当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而减小，故④错误；
故答案为②③。

【点评】此题考查了二次函数图象与系数的关系，以及抛物线与 x 轴的交点，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)， a 的符号由抛物线的开口方向决定， c 的符号由抛物线与 y 轴交点的位置确定， b 的符号由 a 及对称轴的位置决定，抛物线的增减性由对称轴与开口方向共同决定，当抛物线开口向上时，对称轴左边 y 随 x 的增大而减小，对称轴右边 y 随 x 的增大而增大；当抛物线开口向下时，对称轴左边 y 随 x 的增大而增大，对称轴右边 y 随 x 的增大而减小。此外抛物线解析式中 $y=0$ 得到一元二次方程的解即为抛物线与 x 轴交点的横坐标。

16. (3.00 分) 为了从 2018 枚外形相同的金蛋中找出唯一的有奖金蛋，检查员将这些金蛋按 1-2018 的顺序进行标号。第一次先取出编号为单数的金蛋，发现其中没有有奖金蛋，他将剩下的金蛋在原来的位置上又按 1-1009 编了号 (即原来的 2 号变为 1 号，原来的 4 号变为 2 号……原来的 2018 号变为 1009 号)，又从中取出新的编号为单数的金蛋进行检验，仍没

发现有奖金蛋……如此下去，检查到最后一枚金蛋才是有奖金蛋，问这枚有奖金蛋最初的编号是1024。

【分析】根据题意可得每次挑选都是去掉偶数，进而得出需要挑选的总次数进而得出答案。

【解答】解：∵将这些金蛋按 1 - 2018 的顺序进行标号，第一次先取出编号为单数的金蛋，发现其中没有有奖金蛋，

∴ 剩余的数字都是偶数，是 2 的倍数，

∴ 他将剩下的金蛋在原来的位置上又按 1 - 1009 编了号，

又从中取出新的编号为单数的金蛋进行检验，仍没有发现有奖金蛋，

∴ 剩余的数字为 4 的倍数，

以此类推：2018 → 1009 → 504 → 252 → 126 → 63 → 31 → 15 → 7 → 3 → 1

共经历 10 次重新编号，故最后剩余的数字为： $2^{10}=1024$ 。

故答案为：1024。

【点评】此题主要考查了推理与论证，正确得出挑选金蛋的规律进而得出挑选的次数是解题关键。

三、简答题（本大题共 4 个小题，第 17 题 5 分，第 18、19、20 小题各 6 分，共 23 分）

17. (5.00 分) 计算： $(\frac{1}{3})^{-2} + |\sqrt{3} - 2| - \sqrt{12} + 6\cos 30^\circ + (\pi - 3.14)^0$ 。

【分析】原式利用零指数幂、负整数指数幂法则，绝对值的代数意义，以及特殊角的三角函数值计算即可求出值。

【解答】解：原式 $= 9 + 2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 12$ 。

【点评】此题考查了实数的运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键。

18. (6.00 分) 先化简，再求值： $\frac{a}{a+1} \div (a - 1 - \frac{2a-1}{a+1})$ ，并从 -1, 0, 1, 2 四个数中，选一个合适的数代入求值

【分析】先根据分式混合运算顺序和运算法则化简原式，再选取是分式有意义的 a 的值代入计算可得。

【解答】解：原式 $= \frac{a}{a+1} \div (\frac{a^2-1}{a+1} - \frac{2a-1}{a+1})$
 $= \frac{a}{a+1} \div \frac{a^2-2a}{a+1}$

$$= \frac{a}{a+1} \cdot \frac{a+1}{a(a-2)}$$

$$= \frac{1}{a-2},$$

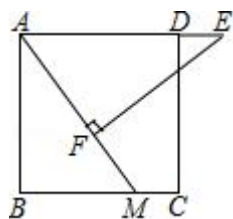
$\because a \neq -1$ 且 $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$,

$\therefore a=1$,

则原式 $= \frac{1}{1-2} = -1$.

【点评】 本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是掌握分式混合运算顺序和运算法则及分式有意义的条件.

19. (6.00 分) 如图，四边形 ABCD 是正方形，M 为 BC 上一点，连接 AM，延长 AD 至点 E，使得 AE=AM，过点 E 作 EF⊥AM，垂足为 F，求证：AB=EF.



【分析】 根据 AAS 证明 $\triangle ABM \cong \triangle EFA$ ，可得结论.

【解答】 证明： $\because$ 四边形 ABCD 为正方形，

$\therefore \angle B = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，(2 分)

$\therefore \angle EAF = \angle BMA$ ，

$\because EF \perp AM$ ，

$\therefore \angle AFE = 90^\circ = \angle B$ ，(4 分)

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle EFA$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle EAF = \angle BMA \\ \angle AFE = \angle B = 90^\circ \\ AE = AM \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle EFA$ (AAS)，(5 分)

$\therefore AB = EF$. (6 分)

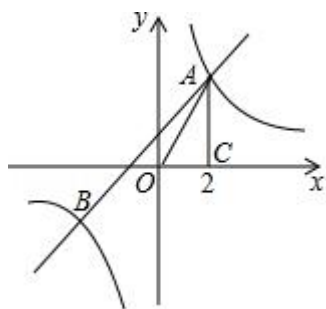
【点评】 本题考查了正方形的性质、三角形全等的性质和判定，熟练掌握三角形全等的判定是关键.

20. (6.00 分) 如图, 一次函数 $y_1=ax+b$ ($a \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象交于 A、B 两点, 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴, 垂足为 C, 连接 OA, 已知 $OC=2$, $\tan \angle AOC=\frac{3}{2}$,

B (m, -2)

(1) 求一次函数和反比例函数的解析式.

(2) 结合图象直接写出: 当 $y_1 > y_2$ 时, x 的取值范围.



【分析】 (1) 求得 A (2, 3), 把 A (2, 3) 代入 $y_2=\frac{k}{x}$ 可得反比例函数的解析式为 $y=\frac{6}{x}$, 求得 B (-3, -2), 把 A (2, 3), B (-3, -2) 代入一次函数 $y_1=ax+b$, 可得一次函数的解析式为 $y=x+1$.

(2) 由图可得, 当 $y_1 > y_2$ 时, x 的取值范围为 $-3 < x < 0$ 或 $x > 2$.

【解答】 解: (1) $\because OC=2$, $\tan \angle AOC=\frac{3}{2}$,

$\therefore AC=3$,

$\therefore A (2, 3)$,

把 A (2, 3) 代入 $y_2=\frac{k}{x}$ 可得, $k=6$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y=\frac{6}{x}$,

把 B (m, -2) 代入反比例函数, 可得 $m=-3$,

$\therefore B (-3, -2)$,

把 A (2, 3), B (-3, -2) 代入一次函数 $y_1=ax+b$, 可得

$$\begin{cases} 3=2a+b \\ -2=-3a+b \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y=x+1$.

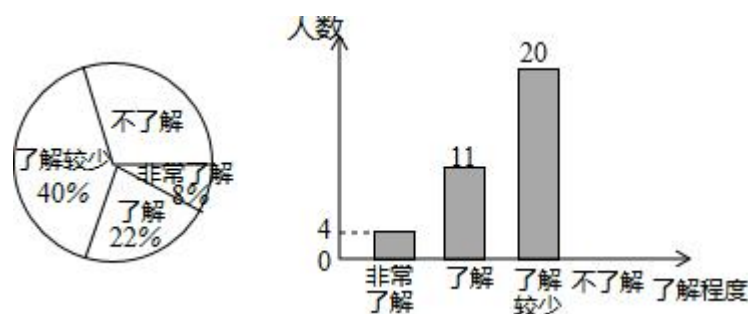
(2) 由图可得, 当 $y_1 > y_2$ 时, x 的取值范围为 $-3 < x < 0$ 或 $x > 2$.

【点评】 本题考查一次函数与反比例函数的交点问题, 解题的关键是学会利用待定系数法确

定函数解析式，知道两个函数图象的交点坐标可以利用解方程组解决，学会利用图象确定自变量取值范围.

四、实践应用题（本大题共 4 个小题，第 21 题 6 分，第 22、23、24 题各 8 分，共 30 分）

21. (6.00 分) 某校为了了解了解节能减排、垃圾分类等知识的普及情况，从该校 2000 名学生中随机抽取了部分学生进行调查调查，调查结果分为“非常了解”、“了解”、“了解较少”、“不了解”四类，并将调查结果绘制出以下两幅不完整的统计图，请根据统计图回答下列问题：



(1) 本次调查的学生共有 50 人，估计该校 2000 名学生中“不了解”的人数约有 600 人.

(2) “非常了解”的 4 人中有 A_1, A_2 两名男生， B_1, B_2 两名女生，若从中随机抽取两人去参加环保知识竞赛，请用画树状图和列表的方法，求恰好抽到 2 名男生的概率.

【分析】 (1) 由“非常了解”的人数及其所占百分比求得总人数，继而由各了解程度的人数之和等于总人数求得“不了解”的人数，用总人数乘以样本中“不了解”人数所占比例可得；

(2) 分别用树状图和列表两种方法表示出所有等可能结果，从中找到恰好抽到 2 名男生的结果数，利用概率公式计算可得.

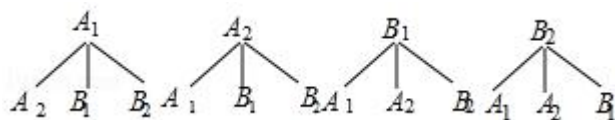
【解答】 解：(1) 本次调查的学生总人数为 $4 \div 8\% = 50$ 人，

则不了解的学生人数为 $50 - (4 + 11 + 20) = 15$ 人，

$\therefore$ 估计该校 2000 名学生中“不了解”的人数约有 $2000 \times \frac{15}{50} = 600$ 人，

故答案为：50、600；

(2) 画树状图如下：



共有 12 种可能的结果，恰好抽到 2 名男生的结果有 2 个，

$$\therefore P(\text{恰好抽到 2 名男生}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

列表如下：

	A_1	A_2	B_1	B_2
A_1		(A_2, A_1)	(B_1, A_1)	(B_2, A_1)
A_2	(A_1, A_2)		(B_1, A_2)	(B_2, A_2)
B_1	(A_1, B_1)	(A_2, B_1)		(B_2, B_1)
B_2	(A_1, B_2)	(A_2, B_2)	(B_1, B_2)	

由表可知共有 12 种可能的结果，恰好抽到 2 名男生的结果有 2 个，

$$\therefore P(\text{恰好抽到 2 名男生}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

【点评】 本题考查了列表法与树状图法、扇形统计图、条形统计图；通过列表法或树状图法展示所有等可能的结果求出 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后根据概率公式求出事件 A 或 B 的概率.

22. (8.00 分) 某车行去年 A 型车的销售总额为 6 万元，今年每辆车的售价比去年减少 400 元. 若卖出的数量相同，销售总额将比去年减少 20%.

(1) 求今年 A 型车每辆车的售价.

(2) 该车行计划新进一批 A 型车和 B 型车共 45 辆，已知 A、B 型车的进货价格分别是 1100 元，1400 元，今年 B 型车的销售价格是 2000 元，要求 B 型车的进货数量不超过 A 型车数量的两倍，应如何进货才能使这批车获得最大利润，最大利润是多少？

【分析】 (1) 设今年 A 型车每辆售价为 x 元，则去年每辆售价为 $(x+400)$ 元，根据数量=总价÷单价，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论；

(2) 设今年新进 A 型车 a 辆，销售利润为 y 元，则新进 B 型车 $(45-a)$ 辆，根据销售利润=单辆利润×销售数量，即可得出 y 关于 a 的函数关系式，由 B 型车的进货数量不超过 A 型车数量的两倍，即可得出关于 a 的一元一次不等式，解之即可得出 a 的取值范围，再利用一次函数的性质即可解决最值问题.

【解答】 解：(1) 设今年 A 型车每辆售价为 x 元，则去年每辆售价为 $(x+400)$ 元，

根据题意得： $\frac{60000}{x+400} = \frac{60000 \times (1-20\%)}{x}$,

解得： $x=1600$,

经检验， $x=1600$ 是原分式方程的解，

$\therefore$ 今年 A 型车每辆车售价为 1600 元.

(2) 设今年新进 A 型车 a 辆，销售利润为 y 元，则新进 B 型车 $(45-a)$ 辆，

根据题意得： $y = (1600 - 1100)a + (2000 - 1400)(45 - a) = -100a + 27000$.

$\because$ B 型车的进货数量不超过 A 型车数量的两倍，

$\therefore 45 - a \leq 2a$ ，解得： $a \geq 15$.

$\because -100 < 0$,

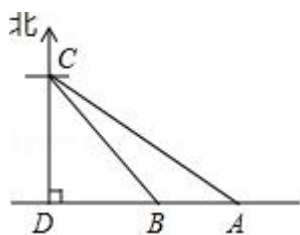
$\therefore y$ 随 a 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $a=15$ 时， y 取最大值，最大值 $= -100 \times 15 + 27000 = 25500$ ，此时 $45 - a = 30$.

答：购进 15 辆 A 型车、30 辆 B 型车时销售利润最大，最大利润是 25500 元.

【点评】 本题考查了分式方程的应用、一元一次不等式的应用以及一次函数的性质，解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出分式方程；(2) 利用一次函数的性质求出最大利润.

23. (8.00 分) 据调查，超速行驶是引发交通事故的主要原因之一. 小强用所学知识对一条笔直公路上的车辆进行测速，如图所示，观测点 C 到公路的距离 $CD=200\text{m}$ ，检测路段的起点 A 位于点 C 的南偏东 60° 方向上，终点 B 位于点 C 的南偏东 45° 方向上. 一辆轿车由东向西匀速行驶，测得此车由 A 处行驶到 B 处的时间为 10s. 问此车是否超过了该路段 16m/s 的限制速度？(观测点 C 离地面的距离忽略不计，参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$)



【分析】 根据直角三角形的性质和三角函数得出 DB，DA，进而解答即可.

【解答】 解：由题意得： $\angle DCA=60^\circ$ ， $\angle DCB=45^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CDB$ 中， $\tan \angle DCB = \frac{DB}{DC} = \frac{DB}{200} = 1$,

解得： $DB=200$,

在 $\text{Rt}\triangle CDA$ 中, $\tan \angle DCA = \frac{DA}{DC} = \frac{DA}{200} = \sqrt{3}$,

解得: $DA = 200\sqrt{3}$,

$\therefore AB = DA - DB = 200\sqrt{3} - 200 \approx 146$ 米,

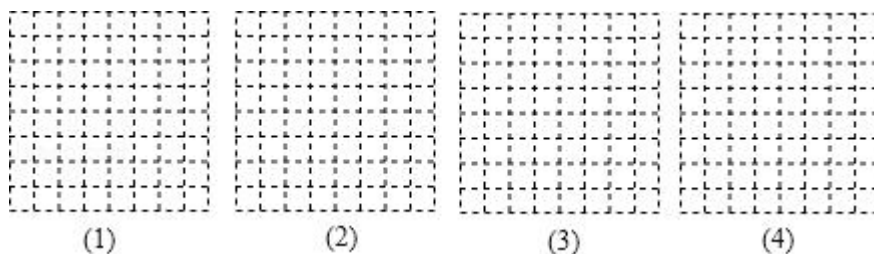
轿车速度 $v = \frac{AB}{t} = \frac{146}{10} = 14.6 < 16$.

答: 此车没有超过了该路段 16m/s 的限制速度.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 方向角问题, 解答本题的关键是利用三角函数求出 AD 与 BD 的长度, 难度一般.

24. (8.00 分) 下面有 4 张形状、大小完全相同的方格纸, 方格纸中的每个小正方形的边长都是 1, 请在方格纸中分别画出符合要求的图形, 所画图形各顶点必须与方格纸中小正方形的顶点重合, 具体要求如下:

- (1) 画一个直角边长为 4, 面积为 6 的直角三角形.
- (2) 画一个底边长为 4, 面积为 8 的等腰三角形.
- (3) 画一个面积为 5 的等腰直角三角形.
- (4) 画一个边长为 $2\sqrt{2}$, 面积为 6 的等腰三角形.



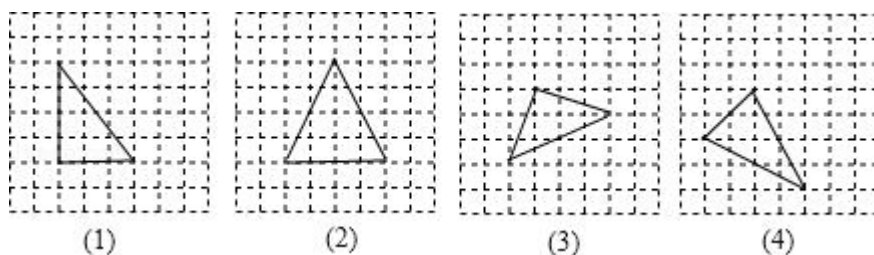
【分析】 (1) 利用三角形面积求法以及直角三角形的性质画即可;

(2) 利用三角形面积求法以及等腰三角形的性质画出即可.

(3) 利用三角形面积求法以及等腰直角三角形的性质画出即可;

(4) 利用三角形面积求法以及等腰三角形的性质画出即可.

【解 答】 解: (1) 如图 (1) 所示:



(2) 如图 (2) 所示:

(3) 如图 (3) 所示;

(4) 如图 (4) 所示.

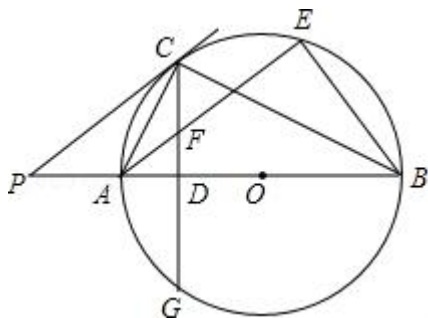
【点评】此题主要考查了等腰三角形的性质、等腰直角三角形的性质以及作图;熟练掌握等腰三角形的性质是关键.

五、推理论证题 (9 分)

25. (9.00 分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, P 是 BA 延长线上一点, PC 切 $\odot O$ 于点 C , CG 是 $\odot O$ 的弦, $CG \perp AB$, 垂足为 D .

(1) 求证: $\angle PCA = \angle ABC$.

(2) 过点 A 作 $AE \parallel PC$ 交 $\odot O$ 于点 E , 交 CD 于点 F , 连接 BE , 若 $\cos \angle P = \frac{4}{5}$, $CF = 10$, 求 BE 的长



【分析】(1) 连接半径 OC , 根据切线的性质得: $OC \perp PC$, 由圆周角定理得: $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle PCA = \angle OCB$, 再由同圆的半径相等可得: $\angle OCB = \angle ABC$, 从而得出结论;

(2) 本题介绍两种解法:

方法一: 先证明 $\angle CAF = \angle ACF$, 则 $AF = CF = 10$, 根据 $\cos \angle P = \cos \angle FAD = \frac{4}{5}$, 可得 $AD = 8$, $FD = 6$, 得 $CD = CF + FD = 16$, 设 $OC = r$, $OD = r - 8$, 根据勾股定理列方程可得 r 的值, 再由三角函数 $\cos \angle EAB = \frac{AF}{AB}$, 可得 AE 的长, 从而计算 BE 的长;

方法二: 根据平行线的性质得: $OC \perp AE$, $\angle P = \angle EAO$, 由垂直的定义得: $\angle OCD = \angle EAO = \angle P$, 同理利用三角函数求得: $CH = 8$, 并设 $AO = 5x$, $AH = 4x$, 表示 $OH = 3x$, $OC = 3x - 8$, 由 $OC = OA$ 列式可得 x 的值, 最后同理得出结论.

【解答】证明: (1) 连接 OC , 交 AE 于 H ,

$\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore OC \perp PC,$$

$$\therefore \angle PCO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PCA + \angle ACO = 90^\circ, \quad (1 \text{ 分})$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle ACO + \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PCA = \angle OCB, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\because OC = OB,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle PCA = \angle ABC; \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 方法一: $\because AE \parallel PC,$

$$\therefore \angle CAF = \angle PCA,$$

$$\because AB \perp CG,$$

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{AG},$$

$$\therefore \angle ACF = \angle ABC, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\because \angle ABC = \angle PCA,$$

$$\therefore \angle CAF = \angle ACF,$$

$$\therefore AF = CF = 10, \quad (6 \text{ 分})$$

$$\because AE \parallel PC,$$

$$\therefore \angle P = \angle FAD,$$

$$\therefore \cos \angle P = \cos \angle FAD = \frac{4}{5},$$

$$\text{在 Rt} \triangle AFD \text{ 中, } \cos \angle FAD = \frac{AD}{AF}, \quad AF = 10,$$

$$\therefore AD = 8, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\therefore FD = \sqrt{AF^2 - AD^2} = 6,$$

$$\therefore CD = CF + FD = 16,$$

在 $\text{Rt} \triangle OCD$ 中, 设 $OC = r$, $OD = r - 8$,

$$r^2 = (r - 8)^2 + 16^2,$$

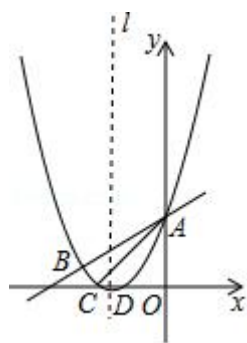
$$r = 20,$$

【点评】 本题考查了切线的性质，锐角三角函数，圆周角定理，等腰三角形的性质，连接 OC 构造直角三角形是解题的关键.

六、拓展探索题 (10 分)

26. (10.00 分) 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 交于 A, B 两点，交 x 轴于 C, D 两点，连接 AC、BC，已知 A (0, 3), C (-3, 0).

- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 在抛物线对称轴 l 上找一点 M，使 $|MB - MD|$ 的值最大，并求出这个最大值；
- (3) 点 P 为 y 轴右侧抛物线上一动点，连接 PA，过点 P 作 $PQ \perp PA$ 交 y 轴于点 Q，问：是否存在点 P 使得以 A, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似？若存在，请求出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



【分析】 (1) 根据待定系数法，可得函数解析式；

(2) 根据对称性，可得 $MC = MD$ ，根据解方程组，可得 B 点坐标，根据两边之差小于第三边，可得 B, C, M 共线，根据勾股定理，可得答案；

(3) 根据等腰直角三角形的判定，可得 $\angle BCE$, $\angle ACO$ ，根据相似三角形的判定与性质，可得关于 x 的方程，根据解方程，可得 x，根据自变量与函数值的对应关系，可得答案.

【解答】 解：(1) 将 A (0, 3), C (-3, 0) 代入函数解析式，得

$$\begin{cases} c=3 \\ \frac{9}{2} - 3b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = \frac{5}{2} \\ c = 3 \end{cases},$$

抛物线的解析式是 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$;

(2) 由抛物线的对称性可知，点 D 与点 C 关于对称轴对称，

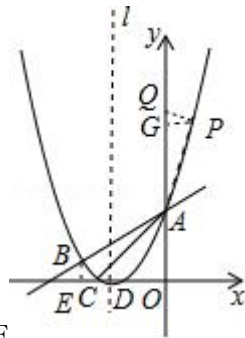
∴对l上任意一点有 MD=MC,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \text{ (不符合题意, 舍)}, \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases},$$

∴B (-4, 1),

当点 B, C, M 共线时, |MB - MD|取最大值, 即为 BC 的长,



过点 B 作 BE ⊥ x 轴于点 E

在 Rt△BEC 中, 由勾股定理, 得

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{2},$$

|MB - MD|取最大值为 $\sqrt{2}$;

(3) 存在点 P 使得以 A, P, Q 为顶点的三角形与△ABC 相似,

在 Rt△BEC 中, ∵BE=CE=1,

$$\therefore \angle BCE = 45^\circ,$$

在 Rt△ACO 中,

$$\therefore AO=CO=3,$$

$$\therefore \angle ACO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

过点 P 作 PQ ⊥ y 轴于 Q 点, $\angle PQA = 90^\circ$,

$$\text{设 P 点坐标为 } (x, \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3) \text{ (} x > 0 \text{)}$$

①当 $\angle PAQ = \angle BAC$ 时, $\triangle PAQ \sim \triangle CAB$,

$$\therefore \angle PGA = \angle ACB = 90^\circ, \angle PAQ = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle PGA \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{BC}{PG} = \frac{AC}{AG},$$

$$\text{即 } \frac{PG}{AG} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 - 3} = \frac{1}{3},$$

解得 $x_1=1$, $x_2=0$ (舍去),

$$\therefore P \text{ 点的纵坐标为 } \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{5}{2} \times 1 + 3 = 6,$$

$$\therefore P(1, 6),$$

②当 $\angle PAQ = \angle ABC$ 时, $\triangle PAQ \sim \triangle CBA$,

$$\because \angle PGA = \angle ACB = 90^\circ, \quad \angle PAQ = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle PGA \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{BC}{AG} = \frac{AC}{PG},$$

$$\text{即 } \frac{PG}{AG} = \frac{AC}{BC} = 3,$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 - 3} = 3,$$

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{13}{3} \text{ (舍去)}, \quad x_2 = 0 \text{ (舍去)}$$

$\therefore$ 此时无符合条件的点 P,

综上所述, 存在点 P (1, 6).

【点评】 本题考查了二次函数综合题, 解 (1) 的关键是利用待定系数法求函数解析式; 解 (2) 的关键是利用两边只差小于第三边得出 M, B, C 共线; 解 (3) 的关键是利用相似三角形的判定与性质得出关于 x 的方程, 要分类讨论, 以防遗漏.