

2017 年四川省遂宁市中考数学试卷

一、选择题 (每题 4 分, 共 40 分)

1. (4 分) -2 的倒数为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

2. (4 分) 下列运算正确的是 ()

- A. $a \cdot a^4 = a^4$ B. $(a^2)^3 = a^6$ C. $(a^2b^3)^2 = a^4b^5$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$ ($a \neq 0$)

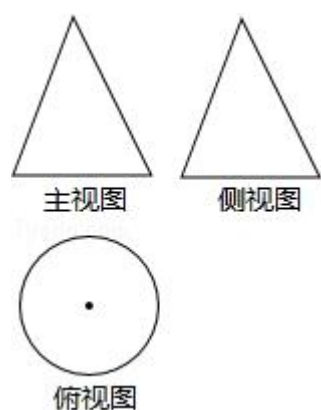
3. (4 分) 我市某地区发现了 H7N9 禽流感病毒. 政府十分重视, 积极开展病毒防御工作, 使 H7N9 禽流感病毒得到了很好的控制. 病毒 H7N9 的直径为 30 纳米 (1 纳米 = 10^{-9} 米). 将 30 纳米用科学记数法表示为 () 米.

- A. 30×10^{-9} B. 3×10^{-9} C. 0.3×10^{-7} D. 3×10^{-8}

4. (4 分) 点 A (a , b) 关于 x 轴对称的点 A' 的坐标为 ()

- A. (a , $-b$) B. ($-a$, b) C. ($-a$, $-b$) D. (b , a)

5. (4 分) 如图是某几何体的三视图, 该几何体是 ()



- A. 三棱柱 B. 三棱锥 C. 圆锥 D. 圆柱

6. (4 分) 若点 A (-6 , y_1), B (-2 , y_2), C (3 , y_3) 在反比例函数 $y = \frac{a^2+1}{x}$

(a 为常数) 的图象上, 则 y_1 , y_2 , y_3 大小关系为 ()

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_2 > y_3 > y_1$ C. $y_3 > y_2 > y_1$ D. $y_3 > y_1 > y_2$

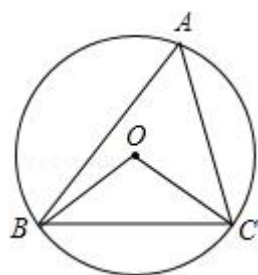
7. (4分) 顺次连接矩形四边中点所形成的四边形是 ()

A. 矩形 B. 菱形 C. 正方形 D. 梯形

8. (4分) 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+2x+1=0$ 有两个实数根, 则 a 的取值范围为 ()

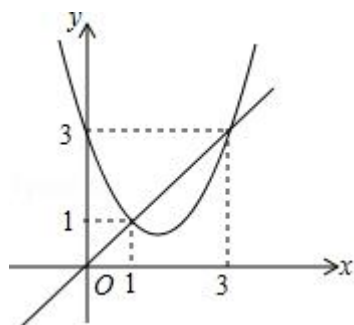
A. $a \leq 2$ B. $a < 2$ C. $a \leq 2$ 且 $a \neq 1$ D. $a < 2$ 且 $a \neq 1$

9. (4分) 如图, $\odot O$ 的半径为 6, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, 连接 OB 、 OC , 若 $\angle BAC$ 与 $\angle BOC$ 互补, 则线段 BC 的长为 ()



A. $3\sqrt{3}$ B. 3 C. $6\sqrt{3}$ D. 6

10. (4分) 函数 $y=x^2+bx+c$ 与函数 $y=x$ 的图象如图所示, 有以下结论: ① $b^2 - 4c > 0$; ② $b+c=0$; ③ $b < 0$; ④ 方程组 $\begin{cases} y = x^2 + bx + c \\ y = x \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$; ⑤ 当 $1 < x < 3$ 时, $x^2 + (b-1)x + c > 0$. 其中正确的是 ()



A. ①②③ B. ②③④ C. ③④⑤ D. ②③⑤

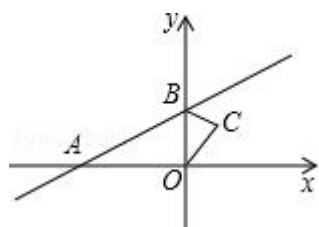
二、填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

11. (4分) 函数 $y = \frac{2}{x-1}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

12. (4分) 在一个不透明的盒子中装有 5 个红球, 2 个黄球, 3 个绿球, 这些球除颜色外没有任何其他区别, 现从这个盒子中随机摸出一个球, 摸到红球的概率为_____.

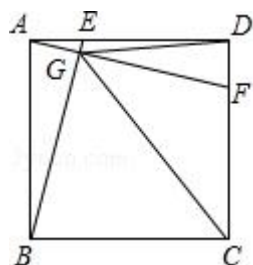
13. (4分) 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根, 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$ _____.

14. (4分) 如图, 直线 $y = \frac{1}{3}x + 1$ 与 x 轴, y 轴分别交于 A, B 两点, $\triangle BOC$ 与 $\triangle B'O'C'$ 是以点 A 为位似中心的位似图形, 且相似比为 1:2, 则点 B' 的坐标为_____.



15. (4分) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 点 E, F 分别从点 A, D 以相同速度同时出发, 点 E 从点 A 向点 D 运动, 点 F 从点 D 向点 C 运动, 点 E 运动到 D 点时, E, F 停止运动. 连接 BE, AF 相交于点 G , 连接 CG . 有下列结论:

- ① $AF \perp BE$; ② 点 G 随着点 E, F 的运动而运动, 且点 G 的运动路径的长度为 π ; ③ 线段 DG 的最小值为 $2\sqrt{5} - 2$; ④ 当线段 DG 最小时, $\triangle BCG$ 的面积 $S = 8 + \frac{8}{5}\sqrt{5}$. 其中正确的命题有_____. (填序号)



三、计算题 (每题 7 分, 共 21 分)

16. (7 分) 计算: $\sqrt[3]{8} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2\cos 60^\circ - (\pi - 2017)^0 + |1 - \sqrt{4}|$.

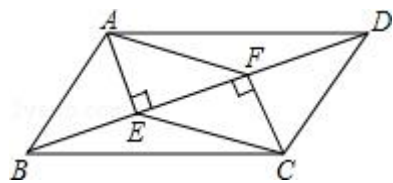
17. (7 分) 有这样一道题“求 $\frac{a^2+a}{a^2-1} - \frac{a+1}{a^2+2a+1} \div \frac{a-1}{a+1}$ 的值, 其中 $a=2017$ ”, “小马虎”不小心把 $a=2017$ 错抄成 $a=2007$, 但他的计算结果却是正确的, 请说明原因.

18. (7 分) 解方程: $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{1-x}{2-x}$.

四、解答题 (共 69 分)

19. (9 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, BD 为对角线, $AE \perp BD$, $CF \perp BD$, 垂足分别为 E 、 F , 连接 AF 、 CE .

求证: $AF=CE$.



20. (9 分) 在一次社会调查活动中, 小李收集到某“健步走运动”团队 20 名成员一天行走的步数, 记录如下:

5640	6430	6520	6798	7325
8430	8215	7453	7446	6754

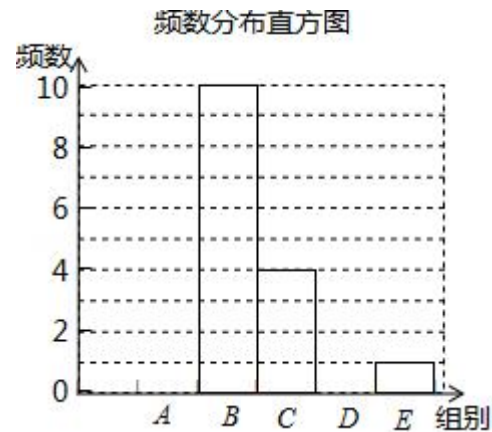
7638	6834	7326	6830	8648
8753	9450	9865	7290	7850

对这 20 个数据按组距 1000 进行分组，并统计整理，绘制了如下不完整的统计图表，步数分布统计图.

组别	步数分组	频数
A	$5500 \leq x < 6500$	m
B	$6500 \leq x < 7500$	10
C	$7500 \leq x < 8500$	4
D	$8500 \leq x < 9500$	n
E	$9500 \leq x < 10500$	1

根据以上信息解答下列问题:

- (1) 填空: $m=$ _____, $n=$ _____;
- (2) 请补全条形统计图;
- (3) 这 20 名“健步走运动”团队成员一天行走的步数的中位数落在_____组;
- (4) 若该团队共有 200 人, 请估计其中一天行走步数少于 8500 步的人数.



21. (9 分) 2017 年遂宁市吹响了全国文明城市创建决胜“集结号”. 为了加快创建步伐, 某运输公司承担了某标段的土方运输任务, 公司已派出大小两种型号的渣土运输车运输土方. 已知一辆大型渣土运输车和一辆小型渣土运输车每次共运 15 吨; 3 辆大型渣土运输车和 8 辆小型渣土运输车每次共运 70 吨.

(1) 一辆大型渣土运输车和一辆小型渣土运输车每次各运土方多少吨?

(2) 该渣土运输公司决定派出大小两种型号渣土运输车共 20 辆参与运输土方, 若每次运输土方总量不小于 148 吨, 且小型渣土运输车至少派出 7 辆, 问该渣土运输公司有几种派出方案?

(3) 在 (2) 的条件下, 已知一辆大型渣土运输车运输话费 500 元/次, 一辆小型渣土运输车运输花费 300 元/次, 为了节约开支, 该公司应选择哪种方案划算?

22. (10 分) 关于三角函数有如下公式: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\sin$

$$(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad (1 - \tan\alpha\tan\beta \neq 0)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \quad (1 + \tan\alpha\tan\beta \neq 0)$$

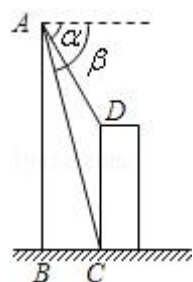
利用这些公式可以将一些不是特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数来求

值.

$$\text{如: } \tan 105^\circ = \tan (45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

根据上面的知识, 你可以选择适当的公式解决下面问题:

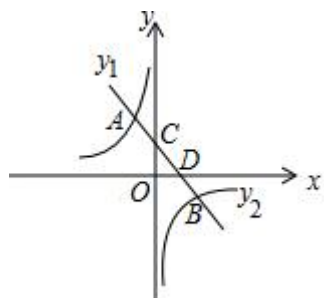
如图, 两座建筑物 AB 和 DC 的水平距离 BC 为 24 米, 从点 A 测得点 D 的俯角 $\alpha = 15^\circ$, 测得点 C 的俯角 $\beta = 75^\circ$, 求建筑物 CD 的高度.



23. (10 分) 如图, 直线 $y_1 = mx + n$ ($m \neq 0$) 与双曲线 $y_2 = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 相交于 A (-1, 2) 和 B (2, b) 两点, 与 y 轴交于点 C, 与 x 轴交于点 D.

(1) 求 m, n 的值;

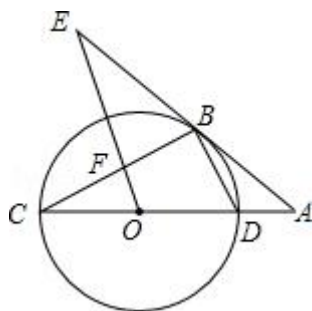
(2) 在 y 轴上是否存在一点 P, 使 $\triangle BCP$ 与 $\triangle OCD$ 相似? 若存在求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



24. (10 分) 如图, CD 是 $\odot O$ 的直径, 点 B 在 $\odot O$ 上, 连接 BC、BD, 直线 AB 与 CD 的延长线相交于点 A, $AB^2 = AD \cdot AC$, OE $\parallel$ BD 交直线 AB 于点 E, OE 与 BC 相交于点 F.

(1) 求证: 直线 AE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为3, $\cos A = \frac{4}{5}$ 求OF的长.

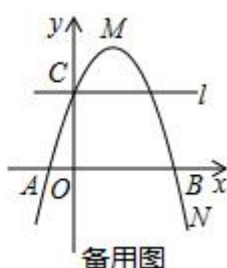
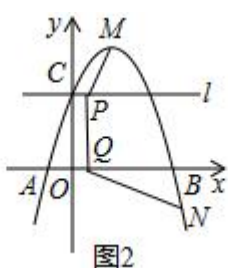
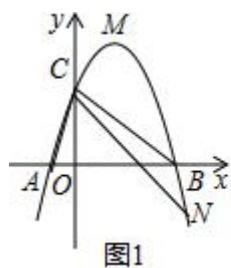


25. (12分) 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 经过点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3)$ 三点.

(1) 求抛物线的解析式及顶点 M 的坐标;

(2) 连接 AC 、 BC , N 为抛物线上的点且在第四象限, 当 $S_{\triangle NBC} = S_{\triangle ABC}$ 时, 求 N 点的坐标;

(3) 在 (2) 问的条件下, 过点 C 作直线 $l \parallel x$ 轴, 动点 $P(m, 3)$ 在直线 l 上, 动点 $Q(m, 0)$ 在 x 轴上, 连接 PM 、 PQ 、 NQ , 当 m 为何值时, $PM + PQ + QN$ 的和最小, 并求出 $PM + PQ + QN$ 和的最小值.



2017 年四川省遂宁市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每题 4 分，共 40 分）

1. (4 分) (2017•遂宁) -2 的倒数为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

【考点】17: 倒数.

【分析】乘积是 1 的两数互为倒数.

【解答】解: -2 的倒数是 $-\frac{1}{2}$.

故选: B.

【点评】本题主要考查的是倒数的定义, 熟练掌握倒数的定义是解题的关键.

2. (4 分) (2017•遂宁) 下列运算正确的是 ()

A. $a \cdot a^4 = a^4$ B. $(a^2)^3 = a^6$ C. $(a^2b^3)^2 = a^4b^5$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$ ($a \neq 0$)

【考点】48: 同底数幂的除法; 46: 同底数幂的乘法; 47: 幂的乘方与积的乘方.

【分析】先根据同底数幂的乘法和除法, 幂的乘方和积的乘方, 分别求出每个式子的值, 再判断即可.

【解答】解: A、 $a \cdot a^4 = a^5$, 故本选项错误;

B、 $(a^2)^3 = a^6$, 故本选项正确;

C、 $(a^2b^3)^2 = a^4b^6$, 故本选项错误;

D、 $a^6 \div a^2 = a^4$ ($a \neq 0$), 故本选项错误;

故选 B.

【点评】本题考查了同底数幂的乘法和除法, 幂的乘方和积的乘方等知识点, 能

正确求出每个式子的值是解此题的关键.

3. (4分) (2017•遂宁) 我市某地区发现了 H7N9 禽流感病毒. 政府十分重视, 积极开展病毒防御工作, 使 H7N9 禽流感病毒得到了很好的控制. 病毒 H7N9 的直径为 30 纳米 (1 纳米= 10^{-9} 米). 将 30 纳米用科学记数法表示为 () 米.

A. 30×10^{-9} B. 3×10^{-9} C. 0.3×10^{-7} D. 3×10^{-8}

【考点】1J: 科学记数法—表示较小的数.

【分析】绝对值小于 1 的负数也可以利用科学记数法表示, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂, 指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【解答】解: 禽流感病毒 H7N9 的直径约为 30 纳米, 即 0.00000003 米, 用科学记数法表示该数为 3×10^{-8} .

故选: D.

【点评】此题主要考查了用科学记数法表示较小的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

4. (4分) (2017•遂宁) 点 A (a , b) 关于 x 轴对称的点 A' 的坐标为 ()

A. (a , $-b$) B. ($-a$, b) C. ($-a$, $-b$) D. (b , a)

【考点】P5: 关于 x 轴、y 轴对称的点的坐标.

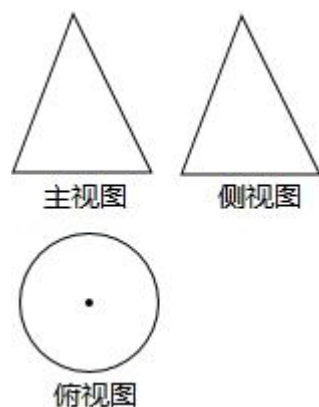
【分析】根据关于 x 轴的对称点的坐标特点即可求解.

【解答】解: 点 A (a , b) 关于 x 轴对称的点 A' 的坐标为 (a , $-b$).

故选 A.

【点评】 本题考查了关于 x 轴的对称点的坐标特点：横坐标不变，纵坐标互为相反数.

5. (4 分) (2017•遂宁) 如图是某几何体的三视图，该几何体是 ()



A. 三棱柱 B. 三棱锥 C. 圆锥 D. 圆柱

【考点】 U3: 由三视图判断几何体.

【分析】 由主视图和左视图确定是柱体，锥体还是球体，再由俯视图确定具体形状.

【解答】 解：主视图和左视图都是等腰三角形，那么此几何体为锥体，由俯视图为圆，可得此几何体为圆锥.

故选 C

【点评】 此题考查三视图问题，主视图和左视图的大致轮廓为长方形的几何体为锥体.

6. (4 分) (2017•遂宁) 若点 A $(-6, y_1)$ ，B $(-2, y_2)$ ，C $(3, y_3)$ 在反比

例函数 $y = \frac{a^2+1}{x}$ (a 为常数) 的图象上，则 y_1, y_2, y_3 大小关系为 ()

A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_2 > y_3 > y_1$ C. $y_3 > y_2 > y_1$ D. $y_3 > y_1 > y_2$

【考点】 G6: 反比例函数图象上点的坐标特征.

【分析】 先判断出反比例函数图象在第一三象限，再根据反比例函数的性质，在

每一个象限内，y 随 x 的增大而减小判断.

【解答】解： $\because a^2 \geq 0$,

$$\therefore a^2 + 1 \geq 1,$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{a^2 + 1}{x}$ (a 为常数) 的图象位于第一三象限,

$$\because -6 < -2,$$

$$\therefore 0 > y_1 > y_2,$$

$$\because 3 > 0,$$

$$\therefore y_3 > 0,$$

$$\therefore y_3 > y_1 > y_2.$$

故选 D.

【点评】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，熟记反比例函数的增减性是解题的关键.

7. (4 分) (2017•遂宁) 顺次连接矩形四边中点所形成的四边形是 ()

A. 矩形 B. 菱形 C. 正方形 D. 梯形

【考点】 LN: 中点四边形.

【分析】 因为题中给出的条件是中点，所以可利用三角形中位线性质，以及矩形对角线相等去证明四条边都相等，从而说明是一个菱形.

【解答】 解： 连接 AC、BD，

在 $\triangle ABD$ 中，

$$\because AH = HD, AE = EB,$$

$$\therefore EH = \frac{1}{2}BD,$$

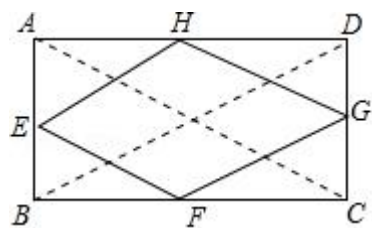
$$\text{同理 } FG = \frac{1}{2}BD, HG = \frac{1}{2}AC, EF = \frac{1}{2}AC,$$

又 $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中, $AC=BD$,

$\therefore EH=HG=GF=FE$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为菱形.

故选 B.



【点评】 本题考查了菱形的判定, 菱形的判别方法是说明一个四边形为菱形的理论依据, 常用三种方法: ①定义, ②四边相等, ③对角线互相垂直平分.

8. (4 分) (2017•遂宁) 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+2x+1=0$ 有两个实数根, 则 a 的取值范围为 ()

A. $a \leq 2$ B. $a < 2$ C. $a \leq 2$ 且 $a \neq 1$ D. $a < 2$ 且 $a \neq 1$

【考点】 AA: 根的判别式.

【分析】 根据二次项系数非零及根的判别式 $\Delta \geq 0$, 即可得出关于 x 的一元一次不等式组, 解之即可得出结论.

【解答】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+2x+1=0$ 有两个实数根,

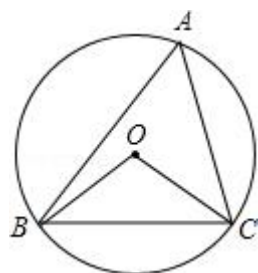
$$\therefore \begin{cases} a-1 \neq 0 \\ \Delta = 2^2 - 4(a-1) \geq 0 \end{cases}$$

解得: $a \leq 2$ 且 $a \neq 1$.

故选 C.

【点评】 本题考查了根的判别式以及一元二次方程的定义, 牢记“当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程有两个实数根”是解题的关键.

9. (4分) (2017•遂宁) 如图, $\odot O$ 的半径为 6, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, 连接 OB 、 OC , 若 $\angle BAC$ 与 $\angle BOC$ 互补, 则线段 BC 的长为 ()



A. $3\sqrt{3}$ B. 3 C. $6\sqrt{3}$ D. 6

【考点】 MA: 三角形的外接圆与外心.

【分析】 作弦心距 OD , 先根据已知求出 $\angle BOC=120^\circ$, 由等腰三角形三线合一的性质得: $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle BOC=60^\circ$, 利用 30° 角所对的直角边是斜边的一半可求得 OD 的长, 根据勾股定理得 DC 的长, 最后利用垂径定理得出结论.

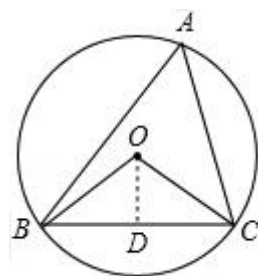
【解答】 解: $\because \angle BAC$ 与 $\angle BOC$ 互补,

$$\therefore \angle BAC + \angle BOC = 180^\circ,$$

$$\because \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC,$$

$$\therefore \angle BOC = 120^\circ,$$

过 O 作 $OD \perp BC$, 垂足为 D ,



$$\therefore BD = CD,$$

$$\because OB = OC,$$

$$\therefore OB \text{ 平分 } \angle BOC,$$

$$\therefore \angle DOC = \frac{1}{2} \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle DOC$ 中, $OC=6$,

$$\therefore OD=3,$$

$$\therefore DC=3\sqrt{3},$$

$$\therefore BC=2DC=6\sqrt{3},$$

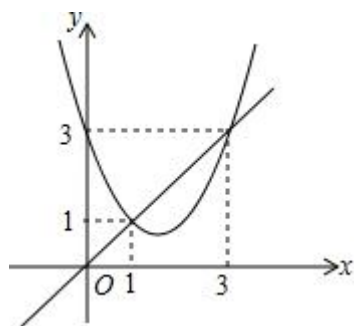
故选: C.

【点评】 本题考查三角形的外接圆与外心、锐角三角函数、垂径定理等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 还在直角三角形解决问题, 属于中考常考题型.

10. (4 分) (2017•遂宁) 函数 $y=x^2+bx+c$ 与函数 $y=x$ 的图象如图所示, 有以下

结论: ① $b^2-4c>0$; ② $b+c=0$; ③ $b<0$; ④ 方程组 $\begin{cases} y = x^2 + bx + c \\ y = x \end{cases}$ 的解为

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 3 \end{cases}$; ⑤ 当 $1 < x < 3$ 时, $x^2 + (b-1)x + c > 0$. 其中正确的是 ()



A. ①②③ B. ②③④ C. ③④⑤ D. ②③⑤

【考点】 HC: 二次函数与不等式 (组); F6: 正比例函数的性质; H4: 二次函数图象与系数的关系.

【分析】 由函数 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴无交点, 可得 $b^2-4c<0$; 当 $x=1$ 时, $y=1+b+c=1$;

当 $x=3$ 时, $y=9+3b+c=3$; 当 $1 < x < 3$ 时, 二次函数值小于一次函数值, 可得

$x^2+bx+c < x$, 继而可求得答案.

【解答】解: $\because$ 函数 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴无交点,

$$\therefore b^2 - 4ac < 0;$$

故①错误;

当 $x=1$ 时, $y=1+b+c=1$, 则 $b+c=0$,

故②正确;

对称轴在 y 轴的右侧, a 、 b 异号, 则 $b < 0$,

故③正确;

根据抛物线与直线 $y=x$ 的交点知: 方程组 $\begin{cases} y = x^2 + bx + c \\ y = x \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$,

$$\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 3 \end{cases}.$$

故④正确;

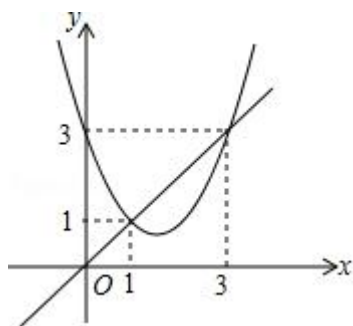
$\therefore$ 当 $1 < x < 3$ 时, 二次函数值小于一次函数值,

$$\therefore x^2+bx+c < x,$$

$$\therefore x^2 + (b-1)x + c < 0.$$

故⑤错误.

故选: B.



【点评】 主要考查图象与二次函数系数之间的关系. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

二、填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

11. (4 分) (2017•遂宁) 函数 $y = \frac{2}{x-1}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 $x \neq 1$.

【考点】 E4: 函数自变量的取值范围; 62: 分式有意义的条件.

【分析】 根据分式有意义的条件是分母不为 0; 分析原函数式可得关系式 $x - 1 \neq 0$, 解可得答案.

【解答】 解: 根据题意可得 $x - 1 \neq 0$;

解得 $x \neq 1$;

故答案为: $x \neq 1$.

【点评】 本题主要考查函数自变量的取值范围, 当函数表达式是分式时, 要注意考虑分式的分母不能为 0.

12. (4 分) (2017•遂宁) 在一个不透明的盒子中装有 5 个红球, 2 个黄球, 3 个绿球, 这些球除颜色外没有任何其他区别, 现从这个盒子中随机摸出一个球, 摸到红球的概率为 $\frac{1}{2}$.

【考点】 X4: 概率公式.

【分析】 用红球的个数除以总球的个数, 即可得出答案.

【解答】 解: $\because$ 有 5 个红球, 2 个黄球, 3 个绿球, 共 10 个,

∴摸到红球的概率为 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$;

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】此题考查概率的求法: 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

13. (4分) (2017•遂宁) 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根, 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$ -3.

【考点】AB: 根与系数的关系.

【分析】根据根与系数的关系可得出 $x_1 + x_2 = 3$ 、 $x_1 \cdot x_2 = -1$, 将其代入

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$ 中即可求出结论.

【解答】解: ∵ x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根,

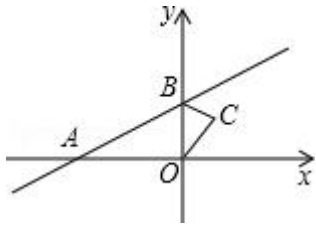
∴ $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 \cdot x_2 = -1$,

∴ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{-1} = -3$.

故答案为: -3.

【点评】本题考查了根与系数的关系, 牢记“两根之和等于 $-\frac{b}{a}$ 、两根之积等于 $\frac{c}{a}$ ”是解题的关键.

14. (4分) (2017•遂宁) 如图, 直线 $y = \frac{1}{3}x + 1$ 与 x 轴, y 轴分别交于 A 、 B 两点, $\triangle BOC$ 与 $\triangle B'O'C'$ 是以点 A 为位似中心的位似图形, 且相似比为 1: 2, 则点 B' 的坐标为 (3, 2) 或 (-9, -2).



【考点】 SC：位似变换； F8：一次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 首先根据直线 $y = \frac{1}{3}x + 1$ 与 x 轴， y 轴分别交于 A 、 B 两点，解得点 A 和点 B 的坐标，再利用位似图形的性质可得点 B' 的坐标.

【解答】 解： $\because y = \frac{1}{3}x + 1$ 与 x 轴， y 轴分别交于 A 、 B 两点，
令 $x=0$ 可得 $y=1$ ；令 $y=0$ 可得 $x=-3$ ，

$\therefore$ 点 A 和点 B 的坐标分别为 $(-3, 0)$ ； $(0, 1)$ ，

$\because \triangle BOC$ 与 $\triangle B'O'C'$ 是以点 A 为位似中心的位似图形，且相似比为 $1:2$ ，

$$\therefore \frac{OB}{O'B'} = \frac{AO}{AO'} = \frac{1}{2}$$

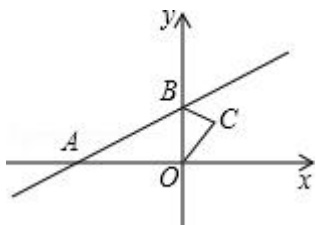
$\therefore O'B'=2$ ， $AO'=6$ ，

$\therefore$ 当点 B' 在第一象限时， B' 的坐标为 $(3, 2)$ ；

当点 B' 在第三象限时， B' 的坐标为 $(-9, -2)$.

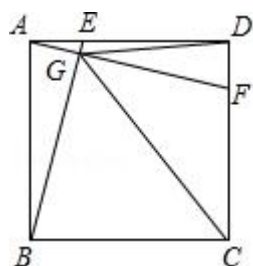
$\therefore B'$ 的坐标为 $(-9, -2)$ 或 $(3, 2)$.

故答案为： $(-9, -2)$ 或 $(3, 2)$.



【点评】 本题主要考查了一次函数的图象与性质，位似图形的性质的运用，掌握位似的概念是解决问题的关键.

15. (4 分) (2017•遂宁) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 点 E 、 F 分别从点 A 、点 D 以相同速度同时出发, 点 E 从点 A 向点 D 运动, 点 F 从点 D 向点 C 运动, 点 E 运动到 D 点时, E 、 F 停止运动. 连接 BE 、 AF 相交于点 G , 连接 CG . 有下列结论: ① $AF \perp BE$; ② 点 G 随着点 E 、 F 的运动而运动, 且点 G 的运动路径的长度为 π ; ③ 线段 DG 的最小值为 $2\sqrt{5}-2$; ④ 当线段 DG 最小时, $\triangle BCG$ 的面积 $S=8+\frac{8}{5}\sqrt{5}$. 其中正确的命题有 ①②③. (填序号)



【考点】LO: 四边形综合题.

【分析】判断出 $\triangle BAE \cong \triangle ADF$ 即可判断出①正确; 进而判断出 $\angle AGB=90^\circ$, 从而得到点 G 是以 AB 为直径的圆弧上一点, 再判断出此圆弧所对的圆心角, 即可判断出②正确, 再用圆外一点到圆上的最小距离的确定方法判断出此圆弧上一点到点 D 的距离最小, 再用勾股定理即可判断出③正确, 再判断出 $\triangle DMG \sim \triangle DAP$ 求出 GM , 进而求出 $\triangle BCG$ 的高 GN , 利用三角形的面积公式得出 $\triangle BCG$ 的面积, 进而判断出④错误.

【解答】解: $\because$ 点 E 、 F 分别同时从 A 、 D 出发以相同的速度运动,

$$\therefore AE=DF,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB=DA, \angle BAE=\angle D=90^\circ,$$

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AE = DE \\ \angle BAE = \angle ADF = 90^\circ, \\ AB = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle ADF$ (SAS),

$\therefore \angle ABE = \angle DAF$,

$\because \angle DAF + \angle BAG = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABE + \angle BAG = 90^\circ$, 即 $\angle AGB = 90^\circ$,

$\therefore AF \perp BE$. 故①正确;

$\because \angle AGB = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 G 的运动路径是以 AB 为直径的圆所在的圆弧的一部分,

由运动知, 点 E 运动到点 D 时停止, 同时点 F 运动到点 C,

$\therefore$ 点 G 的运动路径是以 AB 为直径的圆所在的圆弧所对的圆心角为 90° ,

$\therefore$ 长度为 $\frac{90\pi \times 2}{180} = \pi$, 故命题②正确;

如图, 设 AB 的中点为点 P, 连接 PD,

$\because$ 点 G 是以点 P 为圆心 AB 为直径的圆弧上一点,

$\therefore$ 当点 G 在 PD 上时, DG 有最小值,

在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中, $AP = \frac{1}{2}AB = 2$, $AD = 4$, 根据勾股定理得, $PD = 2\sqrt{5}$,

$\therefore$ DG 的最小值为 $2\sqrt{5} - 2$, 故③正确;

过点 G 作 BC 的垂线与 AD 相交于点 M, 与 BC 相交于 N,

$\therefore GM \parallel PA$,

$$\therefore \triangle DMG \sim \triangle DAP,$$

$$\therefore \frac{GM}{AP} = \frac{DG}{DP},$$

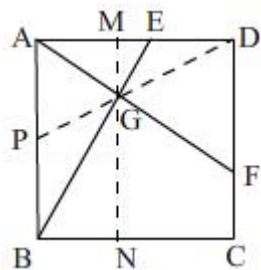
$$\therefore GM = \frac{10-2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \triangle BCG \text{ 的高 } GN = 4 - GM = \frac{10+2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle BCG} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{10+2\sqrt{5}}{5} = 4 + \frac{4\sqrt{5}}{5}, \text{ 故④错误,}$$

$\therefore$ 正确的有①②③,

故答案为: ①②③



【点评】此题是四边形综合题，主要考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，三角形的面积公式，圆的性质，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

三、计算题 (每题 7 分，共 21 分)

16. (7 分) (2017•遂宁) 计算: $\sqrt[3]{8} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2\cos 60^\circ - (\pi - 2017)^0 + 1 - \sqrt{4}.$

【考点】2C: 实数的运算; 6E: 零指数幂; 6F: 负整数指数幂; T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】直接利用立方根的定义以及负指数幂的性质和零指数幂的性质、绝对值的性质分别化简得出答案.

【解答】解: 原式 $= 2 - 2 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 + 2 - 1$
 $= -1.$

【点评】 此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

17. (7 分) (2017•遂宁) 有这样一道题“求 $\frac{a^2+a}{a^2-1} - \frac{a+1}{a^2+2a+1} \div \frac{a-1}{a+1}$ 的值，其中 $a=2017$ ”，“小马虎”不小心把 $a=2017$ 错抄成 $a=2007$ ，但他的计算结果却是正确的，请说明原因.

【考点】 6D: 分式的化简求值.

【分析】 首先化简 $\frac{a^2+a}{a^2-1} - \frac{a+1}{a^2+2a+1} \div \frac{a-1}{a+1}$ 的，然后判断出算式的值与 a 无关即可.

【解答】 解: $\frac{a^2+a}{a^2-1} - \frac{a+1}{a^2+2a+1} \div \frac{a-1}{a+1}$

$$= \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1}$$
$$= 1$$

$\therefore$ 算式的值与 a 无关即可,

$\therefore$ “小马虎”不小心把 $a=2017$ 错抄成 $a=2007$ ，但他的计算结果却是正确的.

【点评】 此题主要考查了分式的化简求值问题，要熟练掌握，注意先把分式化简后，再把分式中未知数对应的值代入求出分式的值.

18. (7 分) (2017•遂宁) 解方程: $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{1-x}{2-x}$.

【考点】 B3: 解分式方程.

【分析】 去分母化为整式方程即可解决问题.

【解答】 解: 两边乘 $x-2$ 得到, $1+3(x-2) = x-1$,

$$1+3x-6=x-1,$$

$$x=2,$$

$\therefore x=2$ 时, $x-2=0$,

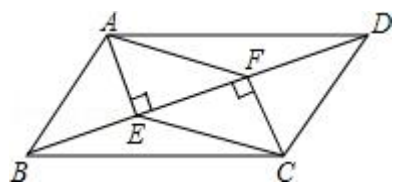
$\therefore x=2$ 是分式方程分增根, 原方程无解.

【点评】 本题考查分式方程的解, 解题的关键是掌握解分式方程的步骤, 注意解分式方程必须检验.

四、解答题 (共 69 分)

19. (9 分) (2017•遂宁) 如图, 在平行四边形 ABCD 中, BD 为对角线, $AE \perp BD$, $CF \perp BD$, 垂足分别为 E、F, 连接 AF、CE.

求证: $AF=CE$.



【考点】 L5: 平行四边形的性质; KD: 全等三角形的判定与性质.

【分析】 首先证明 $AE \parallel CF$, $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 再根据全等三角形的性质可得 $AE=CF$, 然后再根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形可得四边形 AECF 是平行四边形, 根据平行四边形的性质可得 $AF=CE$.

【解答】 证明: $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore AB=CD$, $AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABE = \angle CDF$.

又 $\because AE \perp BD$, $CF \perp BD$,

$\therefore \angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$, $AE \parallel CF$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle CDF \\ \angle AEB = \angle CFD, \\ AB = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ (AAS).

$\therefore AE = CF$,

$\therefore AE \parallel CF$,

$\therefore$ 四边形 AECF 是平行四边形,

$\therefore AF = CE$.

【点评】此题主要考查了平行四边形的性质和判定，关键是掌握平行四边形对边平行且相等.

20. (9 分) (2017•遂宁) 在一次社会调查活动中，小李收集到某“健步走运动”团队 20 名成员一天行走的步数，记录如下：

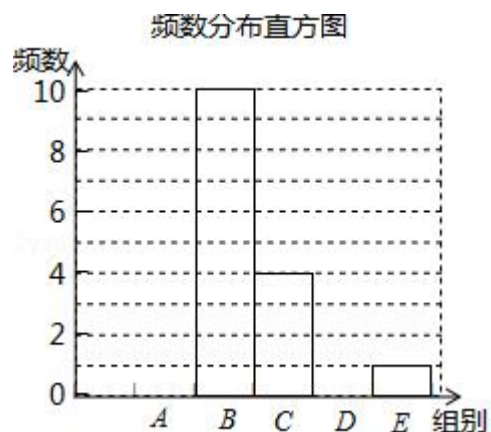
5640	6430	6520	6798	7325
8430	8215	7453	7446	6754
7638	6834	7326	6830	8648
8753	9450	9865	7290	7850

对这 20 个数据按组距 1000 进行分组，并统计整理，绘制了如下不完整的统计图表，步数分布统计图.

组别	步数分组	频数
A	$5500 \leq x < 6500$	m
B	$6500 \leq x < 7500$	10
C	$7500 \leq x < 8500$	4
D	$8500 \leq x < 9500$	n
E	$9500 \leq x < 10500$	1

根据以上信息解答下列问题:

- (1) 填空: $m=$ 2, $n=$ 3;
- (2) 请补全条形统计图;
- (3) 这 20 名“健步走运动”团队成员一天行走的步数的中位数落在 B 组;
- (4) 若该团队共有 200 人, 请估计其中一天行走步数少于 8500 步的人数.



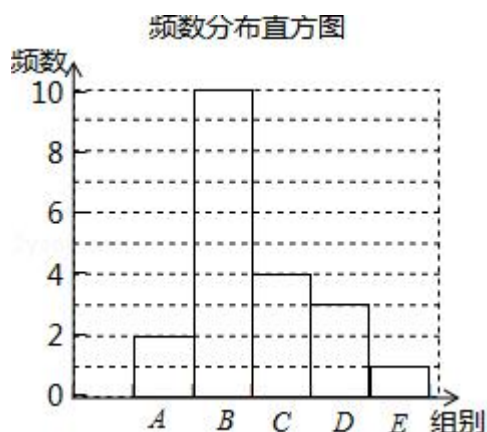
【考点】 VC: 条形统计图; V5: 用样本估计总体; V7: 频数 (率) 分布表; W4: 中位数.

- 【分析】** (1) 根据表格确定出 m 与 n 的值即可;
- (2) 补全条形统计图即可;
- (3) 确定出 20 名“健步走运动”团队成员一天行走的步数的中位数的范围即可;
- (4) 根据样本中的步数少于 8500 步的百分比, 乘以 200 即可得到结果.

【解答】 解: (1) 根据表格得: $5500 \leq x < 6500$ 的有: 5640 与 6430, 即 $m=2$, $8500 \leq x < 9500$ 的有: 8648, 8753, 9450, 即 $n=3$;

故答案为: 2; 3;

- (2) 补全条形统计图, 如图所示:



(3) 这 20 名“健步走运动”团队成员一天行走的步数的中位数落在 B 组；

故答案为：B；

(4) 根据题意得： $200 \times \frac{2+10+4}{20} = 160$ (人)，

则估计一天行走的步数少于 8500 步的人数约为 160 人.

【点评】 此题考查了条形统计图，用样本估计总体，以及用样本估计总体，弄清题意是解本题的关键.

21. (9 分) (2017•遂宁) 2017 年遂宁市吹响了全国文明城市创建决胜“集结号”. 为了加快创建步伐，某运输公司承担了某标段的土方运输任务，公司已派出大小两种型号的渣土运输车运输土方. 已知一辆大型渣土运输车和一辆小型渣土运输车每次共运 15 吨；3 辆大型渣土运输车和 8 辆小型渣土运输车每次共运 70 吨.

(1) 一辆大型渣土运输车和一辆小型渣土运输车每次各运土方多少吨？

(2) 该渣土运输公司决定派出大小两种型号渣土运输车共 20 辆参与运输土方，若每次运输土方总量不小于 148 吨，且小型渣土运输车至少派出 7 辆，问该渣土运输公司有几种派出方案？

(3) 在 (2) 的条件下，已知一辆大型渣土运输车运输话费 500 元/次，一辆小型渣土运输车运输花费 300 元/次，为了节约开支，该公司应选择哪种方案划算？

【考点】 FH：一次函数的应用；9A：二元一次方程组的应用；CE：一元一次不

等式组的应用.

【分析】(1) 设一辆大型渣土运输车每次运土方 x 吨, 一辆小型渣土运输车每次运土方 y 吨, 根据“一辆大型渣土运输车和一辆小型渣土运输车每次共运 15 吨; 3 辆大型渣土运输车和 8 辆小型渣土运输车每次共运 70 吨”, 列方程组求解可得;

(2) 设派出大型渣土运输车 a 辆, 则派出小型运输车 $(20 - a)$ 辆, 根据“每次运输土方总量不小于 148 吨, 且小型渣土运输车至少派出 7 辆”列不等式组求解可得;

(3) 设运输总花费为 W , 根据“总费用=大渣土车总费用+小渣土车总费用”列出 W 关于 a 的函数解析式, 根据一次函数性质结合 a 的范围求解可得.

【解答】解: (1) 设一辆大型渣土运输车每次运土方 x 吨, 一辆小型渣土运输车每次运土方 y 吨,

根据题意, 可得:
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 3x + 8y = 70 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$

答: 一辆大型渣土运输车每次运土方 10 吨, 一辆小型渣土运输车每次运土方 5 吨;

(2) 设派出大型渣土运输车 a 辆, 则派出小型运输车 $(20 - a)$ 辆,

根据题意, 可得:
$$\begin{cases} 10a + 5(20 - a) \geq 148 \\ 20 - a \geq 7 \end{cases},$$

解得: $9.6 \leq a \leq 13$,

$\therefore a$ 为整数,

$\therefore a = 10, 11, 12, 13$,

则渣土运输公司有 4 种派出方案, 如下:

方案一：派出大型渣土运输车 10 辆、小型渣土运输车 10 辆；

方案二：派出大型渣土运输车 11 辆、小型渣土运输车 9 辆；

方案三：派出大型渣土运输车 12 辆、小型渣土运输车 8 辆；

方案四：派出大型渣土运输车 13 辆、小型渣土运输车 7 辆；

(3) 设运输总花费为 W ,

则 $W=500a+300(20-a)=200a+6000$,

$\because 200 > 0$,

$\therefore W$ 随 a 的增大而增大,

$\because 9.6 \leq a \leq 13$, 且 a 为整数,

$\therefore$ 当 $a=10$ 时, W 取得最小值, 最小值 $W=200 \times 10+6000=8000$,

故该公司选择方案一最省钱.

【点评】 本题主要考查二元一次方程组、一元一次不等式组及一次函数的应用, 解题的关键是理解题意找到题目中蕴含的相等关系或不等式关系列出方程组、不等式组及一次函数解析式是解题的关键.

22. (10 分) (2017•遂宁) 关于三角函数有如下公式: $\sin(\alpha+\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ ($1-\tan\alpha\tan\beta \neq 0$)

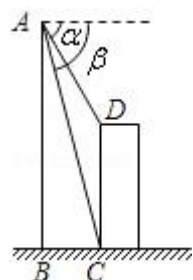
$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ ($1+\tan\alpha\tan\beta \neq 0$)

利用这些公式可以将一些不是特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数来求值.

$$\text{如: } \tan 105^\circ = \tan (45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

根据上面的知识，你可以选择适当的公式解决下面问题：

如图，两座建筑物 AB 和 DC 的水平距离 BC 为 24 米，从点 A 测得点 D 的俯角 $\alpha = 15^\circ$ ，测得点 C 的俯角 $\beta = 75^\circ$ ，求建筑物 CD 的高度。



【考点】TA：解直角三角形的应用－仰角俯角问题。

【分析】根据题意得到 $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ ， $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ ，如图，延长 CD 交 BC 的延长线 AE 于 E，解直角三角形即可得到结论。

$$\text{【解答】解: } \because \tan 75^\circ = \tan (30^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\tan 15^\circ = \tan (30^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 30^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 30^\circ \tan 45^\circ} = 2 - \sqrt{3},$$

如图，延长 CD 交 BC 的延长线 AE 于 E，

在 Rt△AEC 中，AE = BC = 24cm， $\angle CAE = 75^\circ$ ，

$$\therefore \tan 75^\circ = \frac{CE}{AE},$$

$$\therefore CE = AE \cdot \tan 75^\circ = (48 + 24\sqrt{3}) \text{ cm},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AED \text{ 中, } \tan \angle DAE = \tan 15^\circ = \frac{DE}{AE},$$

$$\therefore DE = AE \cdot \tan 15^\circ = 48 - 24\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = CE - DE = 48\sqrt{3} \text{ cm}.$$

答：建筑物 CD 的高度是 $48\sqrt{3}\text{cm}$.

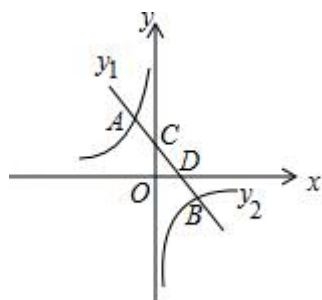
【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键.

23. (10 分) (2017•遂宁) 如图，直线 $y_1=mx+n$ ($m \neq 0$) 与双曲线 $y_2=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)

相交于 A (-1, 2) 和 B (2, b) 两点，与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于点 D.

(1) 求 m, n 的值;

(2) 在 y 轴上是否存在一点 P，使 $\triangle BCP$ 与 $\triangle OCD$ 相似？若存在求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



【考点】 GB: 反比例函数综合题.

【分析】 (1) 把点 A、B 的坐标分别代入反比例函数解析式求得 k、b 的值，然后将点 A、B 的坐标分别代入一次函数解析式，利用方程组求得它们的值;

(2) 需要分类讨论: $\triangle PCB \sim \triangle OCD$, $\triangle BCP' \sim \triangle OCD$, 由坐标与图形的性质以及等腰直角三角形的性质进行解答.

【解答】 解: (1) $\because$ A (-1, 2) 和 B (2, b) 在双曲线 $y_2=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 上,

$$\therefore k = -1 \times 2 = 2b,$$

解得 $b = -1$.

$$\therefore B(2, -1).$$

∵ A (-1, 2) 和 B (2, -1) 在直线 $y_1=mx+n$ ($m \neq 0$) 上,

$$\therefore \begin{cases} -m + n = 2 \\ 2m + n = -1 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases},$$

∴ m, n 的值分别是 -1、1;

(2) 在 y 轴上存在这样的点 P, 理由如下:

①如图, 过点 B 作 $BP \parallel x$ 交 y 轴于点 P,

$$\therefore \triangle PCB \sim \triangle OCD,$$

$$\therefore B (2, -1),$$

$$\therefore P (0, -1),$$

②过点 B 作 $BP' \perp AB$ 交 y 轴于点 P,

$$\therefore \triangle BCP' \sim \triangle OCD,$$

由 (1) 知, $y_1 = -x+1$,

$$\therefore C (0, 1), D (1, 0),$$

$$\therefore OC=OD,$$

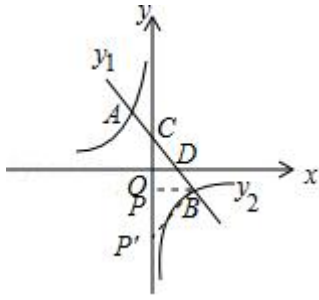
∴ $\triangle OCD$ 是等腰直角三角形,

∴ $\triangle BCP'$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CP'=BP'=2,$$

$$\therefore P' (0, -3),$$

∴ 这样的点 P 有 2 个. 即 (0, -1) 和 (0, -3).

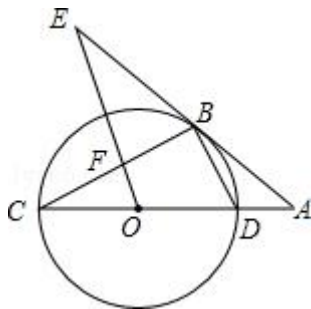


【点评】本题考查了反比例函数综合题. 需要掌握一次函数图象上点的坐标特征, 反比例函数图象上点的坐标特征, 相似三角形的判定与性质, 等腰直角三角形的判定与性质. 难度不大, 但是综合性比较强, 解题时, 需要分类讨论, 以防漏解.

24. (10 分) (2017•遂宁) 如图, CD 是 $\odot O$ 的直径, 点 B 在 $\odot O$ 上, 连接 BC 、 BD , 直线 AB 与 CD 的延长线相交于点 A , $AB^2 = AD \cdot AC$, $OE \parallel BD$ 交直线 AB 于点 E , OE 与 BC 相交于点 F .

(1) 求证: 直线 AE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 3, $\cos A = \frac{4}{5}$, 求 OF 的长.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质; ME: 切线的判定与性质; T7: 解直角三角形.

【分析】 (1) 连接 OB 根据已知条件得到 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$, 根据相似三角形的性质得到 $\angle ABD = \angle ACB$, 由等腰三角形的性质得到 $\angle OBC = \angle ACB$, 等量代换得到 $\angle OBC = \angle ABD$, 于是得到结论;

(2) 设 $AB = 4x$, $OA = 5x$, 根据勾股定理得到 $AB = 4$, $OA = 5$, 求得 $AD = 2$, 根据

平行线分相等成比例定理得到 $BE=6$, 由勾股定理得到 $OE=\sqrt{BE^2+OB^2}=3\sqrt{5}$,

根据三角形的面积公式得到 $BF=\frac{6\sqrt{5}}{5}$, 根据三角函数的定义即可得到结论.

【解答】 解: (1) 连接 OB , $\because AB^2=AD\cdot AC$,

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB},$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB, \therefore \angle ABD = \angle ACB,$$

$$\because OB=OC,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle ABD,$$

$$\because CD \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OBD = 90^\circ, \angle OBD + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle OBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{直线 } AE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

$$(2) \because OB=3, \cos A = \frac{4}{5}$$

$$\text{设 } AB=4x, OA=5x,$$

$$\because OA^2 = AB^2 + OB^2,$$

$$\therefore (5x)^2 = (4x)^2 + 3^2,$$

$$\therefore x=1,$$

$$\therefore AB=4, OA=5,$$

$$\therefore AD=2,$$

$$\therefore OE \parallel BD,$$

$$\therefore \frac{AD}{OD} = \frac{AB}{BE},$$

$$\therefore BE=6,$$

$$\therefore OE=\sqrt{BE^2+OB^2}=3\sqrt{5},$$

$$\therefore \angle CBD=90^\circ, BD \parallel OE,$$

$$\therefore \angle EFB=90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle OBE}=\frac{1}{2}OB \cdot BE=\frac{1}{2}OE \cdot BF,$$

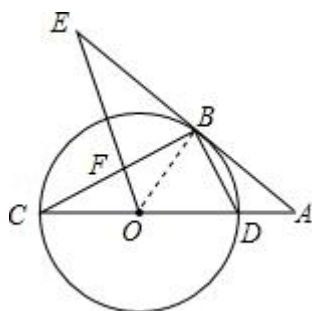
$$\therefore OB \cdot BE=OE \cdot BF,$$

$$\therefore BF=\frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \tan \angle E=\frac{OB}{BE}=\frac{BF}{EF},$$

$$\therefore EF=\frac{12\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore OF=OE-EF=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，解直角三角形，切线的判定，三角形的面积公式，正确的作出辅助线是解题的关键.

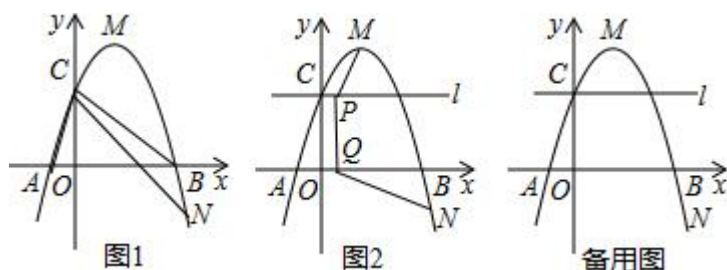
25. (12 分) (2017•遂宁) 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)，经过点 A (-1, 0)，B (3, 0)，C (0, 3) 三点.

(1) 求抛物线的解析式及顶点 M 的坐标;

(2) 连接 AC、BC，N 为抛物线上的点且在第四象限，当 $S_{\triangle NBC}=S_{\triangle ABC}$ 时，求

N 点的坐标;

(3) 在 (2) 问的条件下, 过点 C 作直线 $l \parallel x$ 轴, 动点 P (m , 3) 在直线 l 上, 动点 Q (m , 0) 在 x 轴上, 连接 PM、PQ、NQ, 当 m 为何值时, $PM+PQ+QN$ 的和最小, 并求出 $PM+PQ+QN$ 和的最小值.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 将点 A、B、C 坐标代入解析式, 解关于 a 、 b 、 c 的方程组可得函数解析式, 配方成顶点式即可得点 M 坐标;

(2) 设 N (t , $-t^2+2t+3$) ($t > 0$), 根据点 N、C 坐标用含 t 的代数式表示出直线 CN 解析式, 求得 CN 与 x 轴的交点 D 坐标, 即可表示 BD 的长, 根据 $S_{\triangle NBC} = S_{\triangle ABC}$, 即 $S_{\triangle CDB} + S_{\triangle BDN} = \frac{1}{2}AB \cdot OC$ 建立关于 t 的方程, 解之可得;

(3) 将顶点 M (1, 4) 向下平移 3 个单位得到点 M' (1, 1), 连接 M'N 交 x 轴于点 Q, 连接 PQ, 此时 M'、Q、N 三点共线时, $PM+PQ+QN = M'Q+PQ+QN$ 取最小值, 由点 M'、N 坐标求得直线 M'N 的解析式, 即可求得点 Q 的坐标, 据此知 m 的值, 过点 N 作 $NE \parallel x$ 轴交 MM' 延长线于点 E, 可得 $M'E=6$ 、 $NE=3$ 、 $M'N = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$, 即 $M'Q+QN = 3\sqrt{5}$, 据此知 $m = \frac{3}{2}$ 时, $PM+PQ+QN$ 的最小值为 $3\sqrt{5}+3$.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 A (-1, 0), B (3, 0), C (0, 3),

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

则抛物线的顶点 M 坐标为 (1, 4);

(2) $\because$ N 是抛物线上第四象限的点,

$$\therefore \text{设 } N(t, -t^2 + 2t + 3) \quad (t > 0),$$

又点 C (0, 3),

设直线 NC 的解析式为 $y = k_1x + b_1$,

$$\text{则} \begin{cases} k_1t + b_1 = -t^2 + 2t + 3 \\ b_1 = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = -t + 2 \\ b_1 = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 NC 的解析式为 } y = (-t+2)x + 3,$$

设直线 CN 与 x 轴交于点 D,

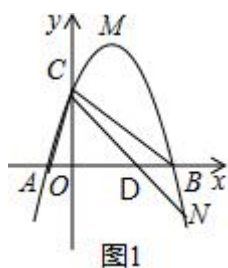


图1

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } x = \frac{3}{t-2},$$

$$\therefore D\left(\frac{3}{t-2}, 0\right), \quad BD = 3 - \frac{3}{t-2},$$

$$\therefore S_{\triangle NBC} = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle CDB} + S_{\triangle BDN} = \frac{1}{2} AB \cdot OC, \text{ 即 } \frac{1}{2} BD \cdot |y_C - y_N| = \frac{1}{2} [3 - (-1)] \times 3,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times \left(3 - \frac{3}{t-2}\right) [3 - (-t^2 + 2t + 3)] = 6,$$

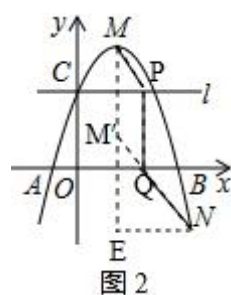
整理, 得: $t^2 - 3t - 4 = 0$,

解得: $t_1 = 4, t_2 = -1$ (舍去),

当 $t = 4$ 时, $-t^2 + 2t + 3 = -5$,

$\therefore N(4, -5)$;

(3) 将顶点 $M(1, 4)$ 向下平移 3 个单位得到点 $M'(1, 1)$, 连接 $M'N$ 交 x 轴于点 Q , 连接 PQ ,



则 $MM' = 3$,

$\therefore P(m, 3), Q(m, 0)$,

$\therefore PQ \perp x$ 轴, 且 $PQ = OC = 3$,

$\therefore PQ \parallel MM'$, 且 $PQ = MM'$,

$\therefore$ 四边形 $MM'QP$ 是平行四边形,

$\therefore PM = QM'$,

由作图知当 M', Q, N 三点共线时, $PM + PQ + QN = M'Q + PQ + QN$ 取最小值,

设直线 $M'N$ 的解析式为 $y = k_2x + b_2$ ($k_2 \neq 0$),

将点 $M'(1, 1), N(4, -5)$ 代入, 得:
$$\begin{cases} k_2 + b_2 = 1 \\ 4k_2 + b_2 = -5 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} k_2 = -2 \\ b_2 = 3 \end{cases}$,

∴ 直线 M'N 的解析式为 $y = -2x + 3$,

当 $y=0$ 时, $x=\frac{3}{2}$,

∴ Q $(\frac{3}{2}, 0)$, 即 $m=\frac{3}{2}$,

此时过点 N 作 $NE \parallel x$ 轴交 MM' 延长线于点 E,

在 $Rt\triangle M'EN$ 中, $\therefore M'E = 1 - (-5) = 6$, $NE = 4 - 1 = 3$,

$$\therefore M'N = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore M'Q + QN = 3\sqrt{5},$$

∴ 当 $m=\frac{3}{2}$ 时, $PM + PQ + QN$ 的最小值为 $3\sqrt{5} + 3$.

【点评】 本题主要考查二次函数的综合问题, 解题的关键是熟练掌握待定系数法求函数解析式、平行四边形的判定与性质、勾股定理及根据两点间线段最短得到点 P、Q 的位置.