

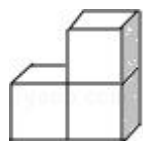
2017 年四川省达州市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (3 分) -2 的倒数是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. (3 分) 如图，几何体是由 3 个完全一样的正方体组成，它的左视图是 ()

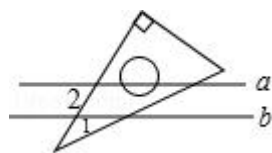


- A. B. C. D.

3. (3 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $2a+3b=5ab$ B. $\sqrt{36}=\pm 6$ C. $a^3b \div 2ab = \frac{1}{2}a^2$ D. $(2ab^2)^3=6a^3b^5$

4. (3 分) 已知直线 $a \parallel b$ ，一块含 30° 角的直角三角尺如图放置. 若 $\angle 1=25^\circ$ ，则 $\angle 2$ 等于 ()



- A. 50° B. 55° C. 60° D. 65°

5. (3 分) 某市从今年 1 月 1 日起调整居民用水价格，每立方米水费上涨 $\frac{1}{3}$. 小丽家去年 12 月份的水费是 15 元，而今年 5 月的水费则是 30 元. 已知小丽家今年 5 月的用水量比去年 12 月的用水量多 5cm^3 . 求该市今年居民用水的价格. 设去年居民用水价格为 x 元/ cm^3 ，根据题意列方程，正确的是 ()

- A. $\frac{30}{(1+\frac{1}{3})x} - \frac{15}{x} = 5$ B. $\frac{30}{(1-\frac{1}{3})x} - \frac{15}{x} = 5$

C. $\frac{30}{x} - \frac{15}{(1+\frac{1}{3})x} = 5$ D. $\frac{30}{x} - \frac{15}{(1-\frac{1}{3})x} = 5$

6. (3分) 下列命题是真命题的是 ()

A. 若一组数据是 1, 2, 3, 4, 5, 则它的方差是 3

B. 若分式方程 $\frac{4}{(x+1)(x-1)} - \frac{m}{x-1} = 1$ 有增根, 则它的增根是 1

C. 对角线互相垂直的四边形, 顺次连接它的四边中点所得四边形是菱形

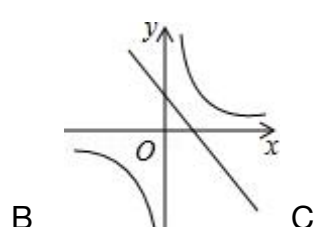
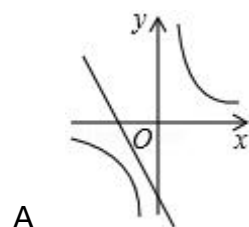
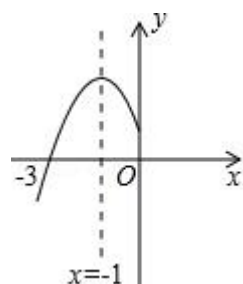
D. 若一个角的两边分别与另一个角的两边平行, 则这两个角相等

7. (3分) 以半径为 2 的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形, 则该三角形的面积是 ()

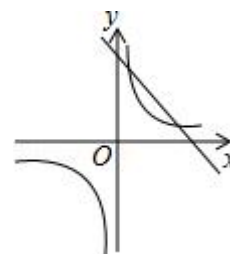
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

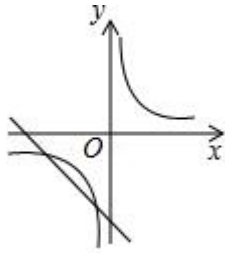
8. (3分) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如下, 则一次函数 $y=ax-2b$ 与反

比例函数 $y=\frac{c}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的图象大致是 ()



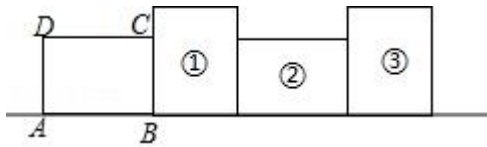
C





D.

9. (3分) 如图, 将矩形 $ABCD$ 绕其右下角的顶点按顺时针方向旋转 90° 至图①位置, 继续绕右下角的顶点按顺时针方向旋转 90° 至图②位置, 以此类推, 这样连续旋转 2017 次. 若 $AB=4$, $AD=3$, 则顶点 A 在整个旋转过程中所经过的路径总长为 ()



A. 2017π B. 2034π C. 3024π D. 3026π

10. (3分) 已知函数 $y = \begin{cases} -\frac{12}{x} & (x > 0) \\ \frac{3}{x} & (x < 0) \end{cases}$ 的图象如图所示, 点 P 是 y 轴负半轴上一

动点, 过点 P 作 y 轴的垂线交图象于 A , B 两点, 连接 OA 、 OB . 下列结论:

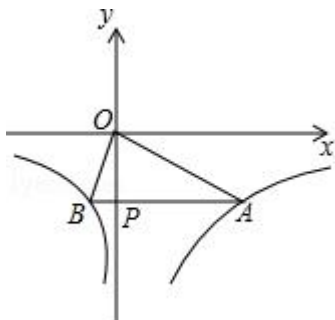
①若点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 在图象上, 且 $x_1 < x_2 < 0$, 则 $y_1 < y_2$;

②当点 P 坐标为 $(0, -3)$ 时, $\triangle AOB$ 是等腰三角形;

③无论点 P 在什么位置, 始终有 $S_{\triangle AOB} = 7.5$, $AP = 4BP$;

④当点 P 移动到使 $\angle AOB = 90^\circ$ 时, 点 A 的坐标为 $(2\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

其中正确的结论个数为 ()



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题（每题 3 分，满分 18 分，将答案填在答题纸上）

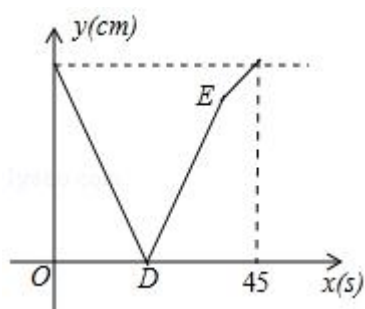
11. (3 分) 达州市莲花湖湿地公园占地面积用科学记数法表示为 7.92×10^6 平方米. 则原数为_____平方米.

12. (3 分) 因式分解: $2a^3 - 8ab^2 =$ _____.

13. (3 分) 从 $-1, 2, 3, -6$ 这四个数中任选两数, 分别记作 m, n , 那么点 (m, n) 在函数 $y = \frac{6}{x}$ 图象上的概率是_____.

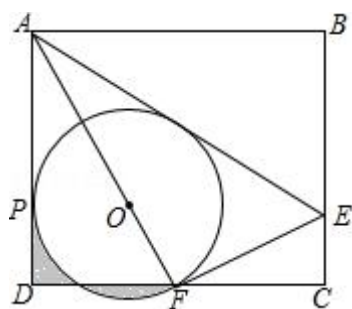
14. (3 分) $\triangle ABC$ 中, $AB=5, AC=3$, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 设 AD 长为 m , 则 m 的取值范围是_____.

15. (3 分) 甲、乙两动点分别从线段 AB 的两端点同时出发, 甲从点 A 出发, 向终点 B 运动, 乙从点 B 出发, 向终点 A 运动. 已知线段 AB 长为 90cm , 甲的速度为 2.5cm/s . 设运动时间为 x (s), 甲、乙两点之间的距离为 y (cm), y 与 x 的函数图象如图所示, 则图中线段 DE 所表示的函数关系式为_____. (并写出自变量取值范围)



16. (3 分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, E 是 BC 上一点, 连接 AE , 将矩形沿 AE 翻折, 使点 B 落在 CD 边 F 处, 连接 AF , 在 AF 上取点 O , 以 O 为圆心, OF 长为半径作 $\odot O$ 与 AD 相切于点 P . 若 $AB=6, BC=3\sqrt{3}$, 则下列结论: ① F 是 CD 的中点; ② $\odot O$ 的半径是 2; ③ $AE = \frac{9}{2}CE$; ④ $S_{\text{阴影}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 其中正确结论的序号

是_____.



三、解答题（本大题共 9 小题，共 72 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

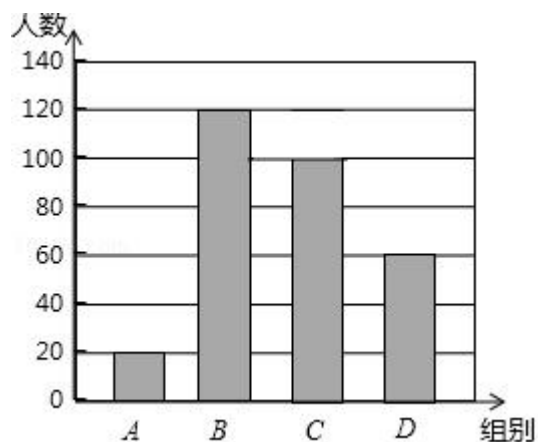
17. (6 分) 计算: $2017^0 - |1 - \sqrt{2}| + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 2\cos 45^\circ$.

18. (6 分) 国家规定，中、小学生每天在校体育活动时间不低于 1h. 为此，某区就“你每天在校体育活动时间是多少”的问题随机调查了辖区内 300 名初中学生. 根据调查结果绘制成的统计图如图所示，其中 A 组为 $t < 0.5h$ ，B 组为 $0.5h \leq t < 1h$ ，C 组为 $1h \leq t < 1.5h$ ，D 组为 $t \geq 1.5h$.

请根据上述信息解答下列问题：

(1) 本次调查数据的众数落在_____组内，中位数落在_____组内；

(2) 该辖区约有 18000 名初中学生，请你估计其中达到国家规定体育活动时间的人数.

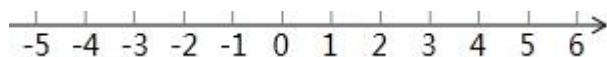


19. (7 分) 设 $A = \frac{a-2}{1+2a+a^2} \div \left(a - \frac{3a}{a+1}\right)$.

(1) 化简 A;

(2) 当 $a=3$ 时，记此时 A 的值为 $f(3)$ ；当 $a=4$ 时，记此时 A 的值为 $f(4)$ ；...

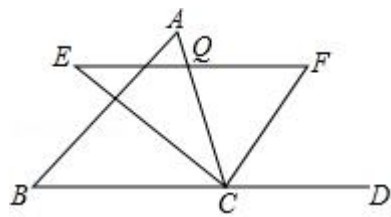
解关于 x 的不等式： $\frac{x-2}{2} - \frac{7-x}{4} \leq f(3) + f(4) + \dots + f(11)$ ，并将解集在数轴上表示出来.



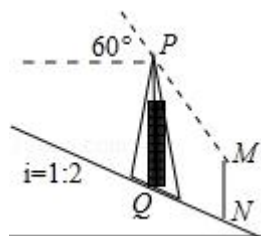
20. (7 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 O 是边 AC 上一个动点，过点 O 作直线 $EF \parallel BC$ 分别交 $\angle ACB$ 、外角 $\angle ACD$ 的平分线于点 E、F.

(1) 若 $CE=8$ ， $CF=6$ ，求 OC 的长；

(2) 连接 AE 、 AF ．问：当点 O 在边 AC 上运动到什么位置时，四边形 $AECF$ 是矩形？并说明理由．



21. (7 分) 如图，信号塔 PQ 座落在坡度 $i=1:2$ 的山坡上，其正前方直立着一警示牌．当太阳光线与水平线成 60° 角时，测得信号塔 PQ 落在斜坡上的影子 QN 长为 $2\sqrt{5}$ 米，落在警示牌上的影子 MN 长为 3 米，求信号塔 PQ 的高．(结果不取近似值)

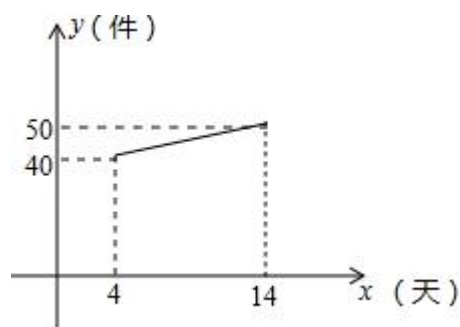


22. (8 分) 宏兴企业接到一批产品的生产任务，按要求必须在 14 天内完成．已知每件产品的出厂价为 60 元．工人甲第 x 天生产的产品数量为 y 件， y 与 x 满

足如下关系: $y = \begin{cases} 7.5x & (0 \leq x \leq 4) \\ 5x + 10 & (4 < x \leq 14) \end{cases}$

(1) 工人甲第几天生产的产品数量为 70 件?

(2) 设第 x 天生产的产品成本为 P 元/件, P 与 x 的函数图象如图. 工人甲第 x 天创造的利润为 W 元, 求 W 与 x 的函数关系式, 并求出第几天时, 利润最大, 最大利润是多少?



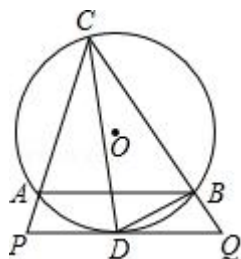
23. (8 分) 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, CD 平分 $\angle ACB$ 交 $\odot O$ 于 D , 过点 D 作 $PQ \parallel AB$ 分别交 CA 、 CB 延长线于 P 、 Q , 连接 BD .

(1) 求证: PQ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 求证: $BD^2 = AC \cdot BQ$;

(3) 若 AC 、 BQ 的长是关于 x 的方程 $x + \frac{4}{x} = m$ 的两实根, 且 $\tan \angle PCD = \frac{1}{3}$, 求

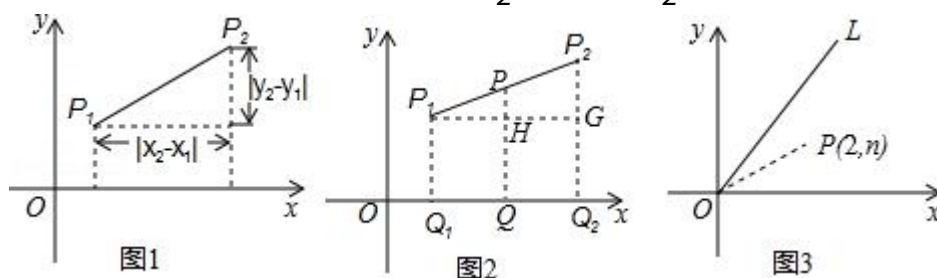
$\odot O$ 的半径.



24. (11 分) 探究：小明在求同一坐标轴上两点间的距离时发现，对于平面直角坐标系内任意两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ，可通过构造直角三角形利用图 1

得到结论： $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 他还利用图 2 证明了线段 P_1P_2 的中

点 $P(x, y)$ P 的坐标公式： $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.



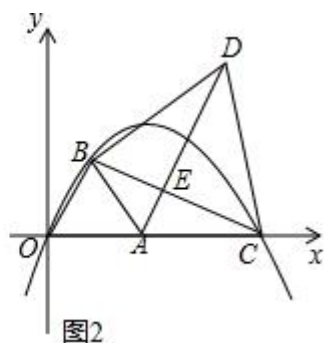
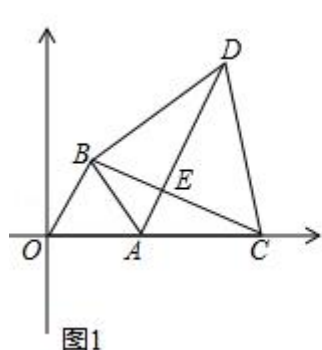
(1) 请你帮小明写出中点坐标公式的证明过程；

运用：(2) ①已知点 $M(2, -1)$, $N(-3, 5)$ ，则线段 MN 长度为_____；

②直接写出以点 $A(2, 2)$, $B(-2, 0)$, $C(3, -1)$, D 为顶点的平行四边形顶点 D 的坐标：_____；

拓展：(3) 如图 3，点 $P(2, n)$ 在函数 $y = \frac{4}{3}x$ ($x \geq 0$) 的图象 OL 与 x 轴正半轴夹角的平分线上，请在 OL 、 x 轴上分别找出点 E 、 F ，使 $\triangle PEF$ 的周长最小，简要叙述作图方法，并求出周长的最小值.

25. (12 分) 如图 1, 点 A 坐标为 (2, 0), 以 OA 为边在第一象限内作等边 $\triangle OAB$, 点 C 为 x 轴上一动点, 且在点 A 右侧, 连接 BC, 以 BC 为边在第一象限内作等边 $\triangle BCD$, 连接 AD 交 BC 于 E.



- (1) ①直接回答: $\triangle OBC$ 与 $\triangle ABD$ 全等吗?
- ②试说明: 无论点 C 如何移动, AD 始终与 OB 平行;
- (2) 当点 C 运动到使 $AC^2 = AE \cdot AD$ 时, 如图 2, 经过 O、B、C 三点的抛物线为 y_1 . 试问: y_1 上是否存在动点 P, 使 $\triangle BEP$ 为直角三角形且 BE 为直角边? 若存在, 求出点 P 坐标; 若不存在, 说明理由;
- (3) 在 (2) 的条件下, 将 y_1 沿 x 轴翻折得 y_2 , 设 y_1 与 y_2 组成的图形为 M, 函数 $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}m$ 的图象 l 与 M 有公共点. 试写出: l 与 M 的公共点为 3 个时, m 的取值.

2017 年四川省达州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (3 分) (2017•达州) -2 的倒数是 ()

A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【考点】17：倒数.

【分析】根据倒数的定义，若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数.

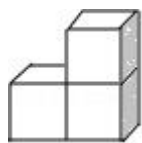
【解答】解： $\because -2 \times (-\frac{1}{2}) = 1$,

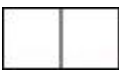
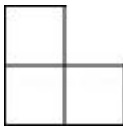
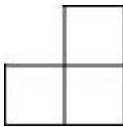
$\therefore -2$ 的倒数是 $-\frac{1}{2}$.

故选 D.

【点评】主要考查倒数的概念及性质. 倒数的定义：若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数，属于基础题.

2. (3 分) (2017•达州) 如图，几何体是由 3 个完全一样的正方体组成，它的左视图是 ()



A.  B.  C.  D. 

【考点】U2：简单组合体的三视图.

【分析】根据从左边看得到的图形是左视图，可得答案.

【解答】解：从左边看第一层是一个小正方形，第二层是一个小正方形，

故选：B.

【点评】本题考查了简单组合体的三视图，从左边看得到的图形是左视图.

3. (3分) (2017•达州) 下列计算正确的是 ()

A. $2a+3b=5ab$ B. $\sqrt{36}=\pm 6$ C. $a^3b\div 2ab=\frac{1}{2}a^2$ D. $(2ab^2)^3=6a^3b^5$

【考点】 4H: 整式的除法; 22: 算术平方根; 35: 合并同类项; 47: 幂的乘方与积的乘方.

【分析】 根据整式的运算法则以及二次根式的性质即可求出答案.

【解答】 解: (A) $2a$ 与 $3b$ 不是同类项, 故 A 不正确;

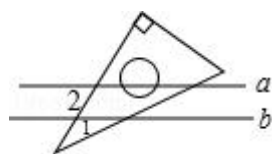
(B) 原式=6, 故 B 不正确;

(D) 原式= $8a^3b^6$, 故 D 不正确;

故选 (C)

【点评】 本题考查学生的运算能力, 解题的关键是熟练运用运算法则, 本题属于基础题型.

4. (3分) (2017•达州) 已知直线 $a\parallel b$, 一块含 30° 角的直角三角尺如图放置. 若 $\angle 1=25^\circ$, 则 $\angle 2$ 等于 ()



A. 50° B. 55° C. 60° D. 65°

【考点】 JA: 平行线的性质.

【分析】 由三角形的外角性质求出 $\angle 3=55^\circ$, 再由平行线的性质即可得出 $\angle 2$ 的度数.

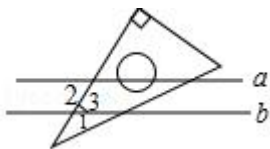
【解答】 解: 如图所示:

由三角形的外角性质得: $\angle 3=\angle 1+30^\circ=55^\circ$,

$\therefore a\parallel b$,

$\therefore \angle 2=\angle 3=55^\circ$;

故选: B.



【点评】该题主要考查了平行线的性质、三角形的外角性质；牢固掌握平行线的性质是解决问题的关键.

5. (3分) (2017•达州) 某市从今年1月1日起调整居民用水价格, 每立方米水费上涨 $\frac{1}{3}$. 小丽家去年12月份的水费是15元, 而今年5月的水费则是30元. 已知小丽家今年5月的用水量比去年12月的用水量多 5cm^3 . 求该市今年居民用水的价格. 设去年居民用水价格为 x 元/ cm^3 , 根据题意列方程, 正确的是 ()

- A. $\frac{30}{(1+\frac{1}{3})x} - \frac{15}{x} = 5$ B. $\frac{30}{(1-\frac{1}{3})x} - \frac{15}{x} = 5$
 C. $\frac{30}{x} - \frac{15}{(1+\frac{1}{3})x} = 5$ D. $\frac{30}{x} - \frac{15}{(1-\frac{1}{3})x} = 5$

【考点】B6: 由实际问题抽象出分式方程.

【分析】利用总水费 $\div$ 单价=用水量, 结合小丽家今年5月的用水量比去年12月的用水量多 5cm^3 , 进而得出等式即可.

【解答】解: 设去年居民用水价格为 x 元/ cm^3 , 根据题意列方程:

$$\frac{30}{(1+\frac{1}{3})x} - \frac{15}{x} = 5,$$

故选: A.

【点评】此题主要考查了由实际问题抽象出分式方程, 正确表示出用水量是解题关键.

6. (3分) (2017•达州) 下列命题是真命题的是 ()

A. 若一组数据是1, 2, 3, 4, 5, 则它的方差是3

B. 若分式方程 $\frac{4}{(x+1)(x-1)} - \frac{m}{x-1} = 1$ 有增根, 则它的增根是1

C. 对角线互相垂直的四边形，顺次连接它的四边中点所得四边形是菱形

D. 若一个角的两边分别与另一个角的两边平行，则这两个角相等

【考点】O1: 命题与定理.

【分析】利用方差的定义、分式方程的增根、菱形的判定及平行的性质分别判断后即可确定正确的选项.

【解答】解：A、若一组数据是 1, 2, 3, 4, 5, 则它的中位数是 3, 故错误, 是假命题;

B、若分式方程 $\frac{4}{(x+1)(x-1)} - \frac{m}{x-1} = 1$ 有增根, 则它的增根是 1 或 -1, 故错误, 是假命题;

C、对角线互相垂直的四边形, 顺次连接它的四边中点所得四边形是菱形, 正确, 是真命题;

D、若一个角的两边分别与另一个角的两边平行, 则这两个角相等或互补, 故错误, 是假命题,

故选 C.

【点评】本题考查了命题与定理的知识, 解题的关键是了解方差的定义、分式方程的增根、菱形的判定及平行的性质等知识, 难度不大.

7. (3 分) (2017•达州) 以半径为 2 的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形, 则该三角形的面积是 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

【考点】MM: 正多边形和圆.

【分析】由于内接正三角形、正方形、正六边形是特殊内角的多边形, 可构造直角三角形分别求出边心距的长, 由勾股定理逆定理可得该三角形是直角三角形, 进而可得其面积.

【解答】解: 如图 1,

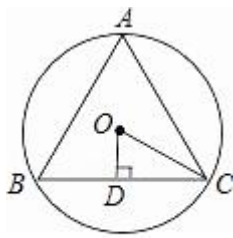


图 1

$$\therefore OC=2,$$

$$\therefore OD=2 \times \sin 30^{\circ}=1;$$

如图 2,

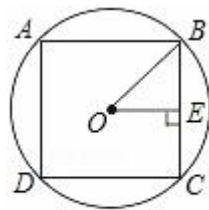


图 2

$$\therefore OB=2,$$

$$\therefore OE=2 \times \sin 45^{\circ}=\sqrt{2};$$

如图 3,

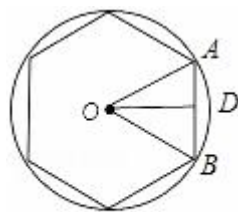


图 3

$$\therefore OA=2,$$

$$\therefore OD=2 \times \cos 30^{\circ}=\sqrt{3},$$

则该三角形的三边分别为: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$,

$$\therefore (1)^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2,$$

$\therefore$ 该三角形是直角三角形,

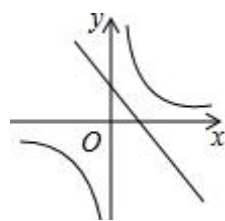
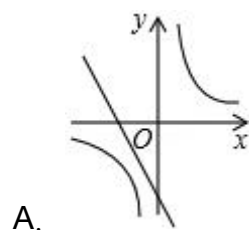
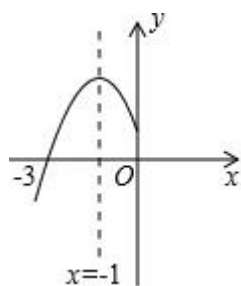
$$\therefore \text{该三角形的面积是: } \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：A.

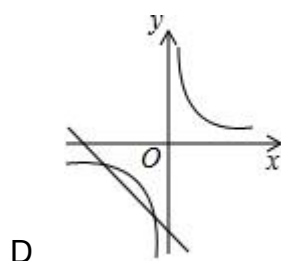
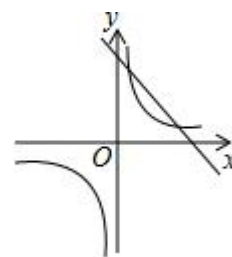
【点评】 本题主要考查多边形与圆，解答此题要明确：多边形的半径、边心距、中心角等概念，根据解直角三角形的知识解答是解题的关键.

8. (3 分) (2017•达州) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如下，则一次函数 $y=ax$

$-2b$ 与反比例函数 $y=\frac{c}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的图象大致是 ()



C



【考点】 G2：反比例函数的图象；F3：一次函数的图象；H2：二次函数的图象.

【分析】 先根据二次函数的图象开口向下可知 $a < 0$ ，再由函数图象经过 y 轴正半可知 $c > 0$ ，利用排除法即可得出正确答案.

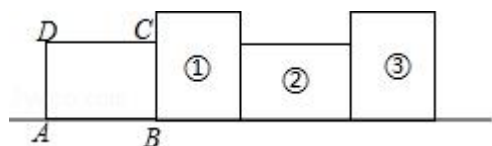
【解答】 解：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下可知 $a < 0$ ，对称轴位于 y 轴左侧， a 、 b 异号，即 $b > 0$. 图象经过 y 轴正半可知 $c > 0$ ，由 $a < 0$ ， $b > 0$ 可知，直线 $y=ax - 2b$ 经过一、二、四象限，

由 $c > 0$ 可知，反比例函数 $y = \frac{c}{x}$ 的图象经过第一、三象限，

故选：C.

【点评】 本题考查的是二次函数的图象与系数的关系，反比例函数及一次函数的性质，熟知以上知识是解答此题的关键.

9. (3 分) (2017•达州) 如图，将矩形 ABCD 绕其右下角的顶点按顺时针方向旋转 90° 至图①位置，继续绕右下角的顶点按顺时针方向旋转 90° 至图②位置，以此类推，这样连续旋转 2017 次. 若 $AB=4$ ， $AD=3$ ，则顶点 A 在整个旋转过程中所经过的路径总长为 ()



A. 2017π B. 2034π C. 3024π D. 3026π

【考点】 O4: 轨迹; LB: 矩形的性质; R2: 旋转的性质.

【分析】 首先求得每一次转动的路线的长，发现每 4 次循环，找到规律然后计算即可.

【解答】 解: $\because AB=4$ ， $BC=3$ ，

$\therefore AC=BD=5$ ，

转动一次 A 的路线长是: $\frac{90\pi \times 4}{180} = 2\pi$ ，

转动第二次的路线长是: $\frac{90\pi \times 5}{180} = \frac{5}{2}\pi$ ，

转动第三次的路线长是: $\frac{90\pi \times 3}{180} = \frac{3}{2}\pi$ ，

转动第四次的路线长是: 0，

以此类推，每四次循环，

故顶点 A 转动四次经过的路线长为: $\frac{5}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi + 2\pi = 6\pi$ ，

$\therefore 2017 \div 4 = 504 \dots 1$,

$\therefore$ 顶点 A 转动四次经过的路线长为: $6\pi \times 504 + 2\pi = 3026\pi$,

故选 D.

【点评】 本题主要考查了探索规律问题和弧长公式的运用, 掌握旋转变换的性质、灵活运用弧长的计算公式、发现规律是解决问题的关键.

10. (3 分) (2017•达州) 已知函数 $y = \begin{cases} -\frac{12}{x} & (x > 0) \\ \frac{3}{x} & (x < 0) \end{cases}$ 的图象如图所示, 点 P 是 y

轴负半轴上一动点, 过点 P 作 y 轴的垂线交图象于 A, B 两点, 连接 OA、OB. 下列结论:

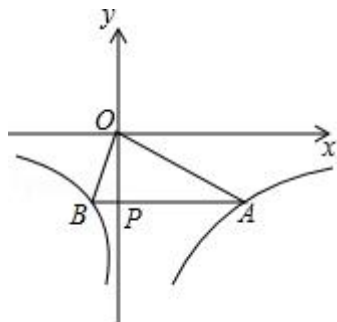
①若点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 在图象上, 且 $x_1 < x_2 < 0$, 则 $y_1 < y_2$;

②当点 P 坐标为 $(0, -3)$ 时, $\triangle AOB$ 是等腰三角形;

③无论点 P 在什么位置, 始终有 $S_{\triangle AOB} = 7.5$, $AP = 4BP$;

④当点 P 移动到使 $\angle AOB = 90^\circ$ 时, 点 A 的坐标为 $(2\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

其中正确的结论个数为 ()



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【考点】 GB: 反比例函数综合题.

【分析】 ①错误. 因为 $x_1 < x_2 < 0$, 函数 y 随 x 是增大而减小, 所以 $y_1 > y_2$;

②正确. 求出 A、B 两点坐标即可解决问题;

③正确. 设 P $(0, m)$, 则 B $(\frac{3}{m}, m)$, A $(-\frac{12}{m}, m)$, 可得 $PB = -\frac{3}{m}$, $PA =$

$$-\frac{12}{m}, \text{ 推出 } PA=4PB, S_{AOB}=S_{\triangle OPB}+S_{\triangle OPA}=\frac{3}{2}+\frac{12}{2}=7.5;$$

④正确. 设 $P(0, m)$, 则 $B(\frac{3}{m}, m)$, $A(-\frac{12}{m}, m)$, 推出 $PB=-\frac{3}{m}$, $PA=-\frac{12}{m}$, $OP=-m$, 由 $\triangle OPB \sim \triangle APO$, 可得 $OP^2=PB \cdot PA$, 列出方程即可解决问题;

【解答】解: ①错误. $\because x_1 < x_2 < 0$, 函数 y 随 x 是增大而减小,

$\therefore y_1 > y_2$, 故①错误.

②正确. $\because P(0, -3)$,

$\therefore B(-1, -3)$, $A(4, -3)$,

$\therefore AB=5$, $OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\therefore AB=AO$,

$\therefore \triangle AOB$ 是等腰三角形, 故②正确.

③正确. 设 $P(0, m)$, 则 $B(\frac{3}{m}, m)$, $A(-\frac{12}{m}, m)$,

$\therefore PB=-\frac{3}{m}$, $PA=-\frac{12}{m}$,

$\therefore PA=4PB$,

$\therefore S_{AOB}=S_{\triangle OPB}+S_{\triangle OPA}=\frac{3}{2}+\frac{12}{2}=7.5$, 故③正确.

④正确. 设 $P(0, m)$, 则 $B(\frac{3}{m}, m)$, $A(-\frac{12}{m}, m)$,

$\therefore PB=-\frac{3}{m}$, $PA=-\frac{12}{m}$, $OP=-m$,

$\therefore \angle AOB=90^\circ$, $\angle OPB=\angle OPA=90^\circ$,

$\therefore \angle BOP+\angle AOP=90^\circ$, $\angle AOP+\angle OPA=90^\circ$,

$\therefore \angle BOP=\angle OAP$,

$\therefore \triangle OPB \sim \triangle APO$,

$$\therefore \frac{OP}{AP} = \frac{PB}{OP},$$

$$\therefore OP^2 = PB \cdot PA,$$

$$\therefore m^2 = -\frac{3}{m} \cdot \left(-\frac{12}{m}\right),$$

$$\therefore m^4 = 36,$$

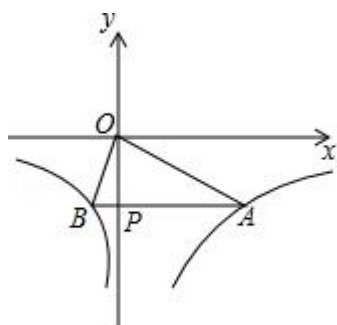
$$\therefore m < 0,$$

$$\therefore m = -\sqrt{6},$$

$$\therefore A(2\sqrt{6}, -\sqrt{6}), \text{ 故④正确.}$$

$$\therefore \text{②③④正确,}$$

故选 C.



【点评】 本题考查反比例函数综合题、等腰三角形的判定、两点间距离公式、相似三角形的判定和性质、待定系数法等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会利用参数，构建方程解决问题，属于中考选择题中的压轴题.

二、填空题（每题 3 分，满分 18 分，将答案填在答题纸上）

11. (3 分) (2017•达州) 达州市莲花湖湿地公园占地面积用科学记数法表示为

7.92×10^6 平方米. 则原数为 7920000 平方米.

【考点】 1K: 科学记数法—原数.

【分析】 根据科学记数法，可得答案.

【解答】 解: 7.92×10^6 平方米. 则原数为 7920000 平方米,

故答案为: 7920000.

【点评】 本题考查了科学记数法，n 是几小数点向右移动几位.

12. (3 分) (2017•达州) 因式分解: $2a^3 - 8ab^2 =$ $2a(a+2b)(a-2b)$.

【考点】55：提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】此多项式有公因式，应先提取公因式，再对余下的多项式进行观察，有3项，可采用平方差公式继续分解.

【解答】解： $2a^3 - 8ab^2$

$$= 2a (a^2 - 4b^2)$$

$$= 2a (a+2b) (a-2b).$$

故答案为： $2a (a+2b) (a-2b)$.

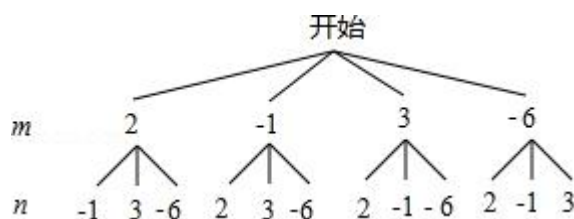
【点评】本题考查了提公因式法与公式法分解因式，要求灵活使用各种方法对多项式进行因式分解，一般来说，如果可以先提取公因式的要先提取公因式，再考虑运用公式法分解.

13. (3分) (2017•达州) 从 $-1, 2, 3, -6$ 这四个数中任选两数，分别记作 m, n ，那么点 (m, n) 在函数 $y = \frac{6}{x}$ 图象上的概率是 $\frac{1}{3}$.

【考点】G6：反比例函数图象上点的坐标特征；X6：列表法与树状图法.

【分析】首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与点 (m, n) 恰好在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 图象上的情况，再利用概率公式即可求得答案.

【解答】解：画树状图得：



$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果，点 (m, n) 恰好在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 图象上的有： $(2, 3), (-1, -6), (3, 2), (-6, -1)$,

$\therefore$ 点 (m, n) 在函数 $y = \frac{6}{x}$ 图象上的概率是： $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点评】此题考查了列表法或树状图法求概率. 用到的知识点为： 概率=所求情

况数与总情况数之比.

14. (3分) (2017•达州) $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $AC=3$, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 设 AD 长为 m , 则 m 的取值范围是 $1 < m < 4$.

【考点】 KD: 全等三角形的判定与性质; K6: 三角形三边关系.

【分析】 作辅助线, 构建 $\triangle AEC$, 根据三角形三边关系得: $EC - AC < AE < AC + EC$, 即 $5 - 3 < 2m < 5 + 3$, 所以 $1 < m < 4$.

【解答】 解: 延长 AD 至 E , 使 $AD=DE$, 连接 CE , 则 $AE=2m$,

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore BD=CD$,

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle EDC$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AD = DE \\ \angle ADB = \angle EDC, \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle EDC$,

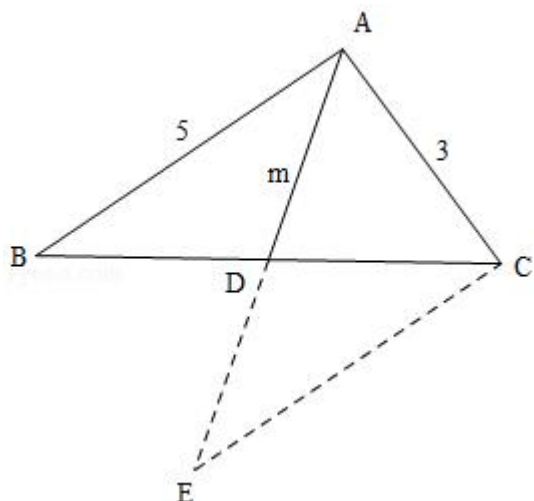
$\therefore EC=AB=5$,

在 $\triangle AEC$ 中, $EC - AC < AE < AC + EC$,

即 $5 - 3 < 2m < 5 + 3$,

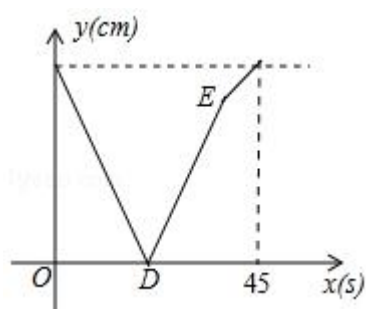
$\therefore 1 < m < 4$,

故答案为: $1 < m < 4$.



【点评】 本题考查了三角形三边关系、三角形全等的性质和判定，属于基础题，辅助线的作法是关键.

15. (3 分) (2017•达州) 甲、乙两动点分别从线段 AB 的两端点同时出发，甲从点 A 出发，向终点 B 运动，乙从点 B 出发，向终点 A 运动. 已知线段 AB 长为 90cm ，甲的速度为 2.5cm/s . 设运动时间为 x (s)，甲、乙两点之间的距离为 y (cm)， y 与 x 的函数图象如图所示，则图中线段 DE 所表示的函数关系式为 $y=4.5x-90$ ($20\leq x\leq 36$). (并写出自变量取值范围)



【考点】 FH: 一次函数的应用.

【分析】 图中线段 DE 所表示的函数关系式，实际上表示甲乙两人相遇后的路程之和与时间的关系.

【解答】 解：观察图象可知，乙的速度 $= \frac{90}{45} = 2\text{cm/s}$,

相遇时间 $= \frac{90}{2.5+2} = 20$,

$\therefore$ 图中线段 DE 所表示的函数关系式: $y = (2.5+2)(x-20) = 4.5x - 90$ ($20 \leq x$

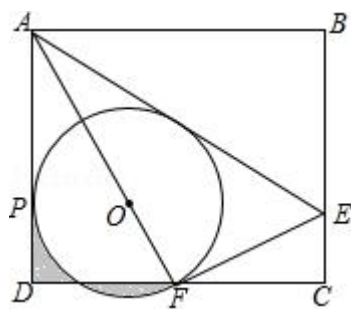
≤ 36).

故答案为 $y=4.5x-90$ ($20 \leq x \leq 36$).

【点评】 本题考查一次函数的应用、路程、速度、时间的关系等知识，解题的关键是读懂图象信息，灵活运用所学知识解决问题，属于中考填空题中的压轴题.

16. (3分) (2017•达州) 如图，矩形 $ABCD$ 中， E 是 BC 上一点，连接 AE ，将矩形沿 AE 翻折，使点 B 落在 CD 边 F 处，连接 AF ，在 AF 上取点 O ，以 O 为圆心， OF 长为半径作 $\odot O$ 与 AD 相切于点 P . 若 $AB=6$, $BC=3\sqrt{3}$, 则下列结论:

① F 是 CD 的中点; ② $\odot O$ 的半径是 2; ③ $AE=\frac{9}{2}CE$; ④ $S_{\text{阴影}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 其中正确结论的序号是 ①②④.



【考点】 MC: 切线的性质; LB: 矩形的性质; MO: 扇形面积的计算; PB: 翻折变换 (折叠问题).

【分析】 ①易求得 DF 长度，即可判定;

②连接 OP ，易证 $OP \parallel CD$ ，根据平行线性质的性质即可判定;

③易证 $AE=2EF$ ， $EF=2EC$ 即可判定;

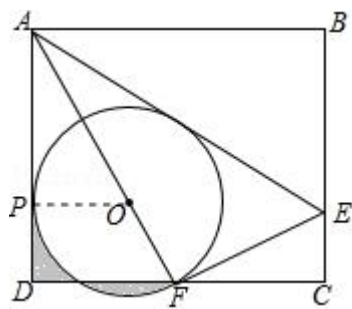
④连接 OG ，作 $OH \perp FG$ ，易证 $\triangle OFG$ 为等边 $\triangle$ ，即可求得 $S_{\text{阴影}}$ 即可解题;

【解答】 解: ① $\because AF$ 是 AB 翻折而来, $\therefore AF=AB=6$,

$$\because AD=BC=3\sqrt{3}, \therefore DF=\sqrt{AF^2-AD^2}=3,$$

$\therefore F$ 是 CD 中点; $\therefore$ ①正确;

②连接 OP ,



$\because \odot O$ 与 AD 相切于点 P , $\therefore OP \perp AD$,

$\because AD \perp DC$, $\therefore OP \parallel CD$,

$$\therefore \frac{AO}{AF} = \frac{OP}{DF},$$

设 $OP=OF=x$, 则 $\frac{x}{3} = \frac{6-x}{6}$, 解得: $x=2$, $\therefore$ ②正确;

③ $\because$ 在 $\text{RT}\triangle ADF$ 中, $AF=6$, $DF=3$,

$\therefore \angle DAF=30^\circ$, $\angle AFD=60^\circ$,

$\therefore \angle EAF=\angle EAB=30^\circ$,

$\therefore AE=2EF$;

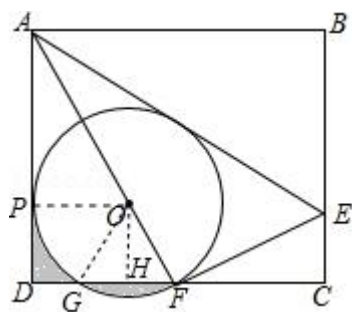
$\therefore \angle AFE=90^\circ$,

$\therefore \angle EFC=90^\circ - \angle AFD=30^\circ$,

$\therefore EF=2EC$,

$\therefore AE=4CE$, $\therefore$ ③错误;

④连接 OG , 作 $OH \perp FG$,



$\therefore \angle AFD=60^\circ$, $OF=OG$, $\therefore \triangle OFG$ 为等边 $\triangle$; 同理 $\triangle OPG$ 为等边 $\triangle$;

$\therefore \angle POG=\angle FOG=60^\circ$, $OH=\frac{\sqrt{3}}{2}OG=\sqrt{3}$, $S_{\text{扇形}OPG}=S_{\text{扇形}OGF}$,

$\therefore S_{\text{阴影}}=(S_{\text{矩形}OPDH}-S_{\text{扇形}OPG}-S_{\triangle OGH})+(S_{\text{扇形}OGF}-S_{\triangle OFG})$

$=S_{\text{矩形}OPDH}-\frac{3}{2}S_{\triangle OFG}=2\times\sqrt{3}-\frac{3}{2}(\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore$ ④正确;

故答案为①②④.

【点评】本题考查了矩形面积的计算, 正三角形的性质, 平行线平分线段的性质, 勾股定理的运用, 本题中熟练运用上述考点是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 9 小题, 共 72 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (6 分) (2017•达州) 计算: $2017^0-|1-\sqrt{2}|+(\frac{1}{3})^{-1}+2\cos 45^\circ$.

【考点】2C: 实数的运算; 6E: 零指数幂; 6F: 负整数指数幂; T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】11 : 计算题.

【分析】首先计算乘方、乘法, 然后从左向右依次计算, 求出算式的值是多少即可.

【解答】解: $2017^0-|1-\sqrt{2}|+(\frac{1}{3})^{-1}+2\cos 45^\circ$
 $=1-\sqrt{2}+1+3+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $=5-\sqrt{2}+\sqrt{2}$
 $=5$

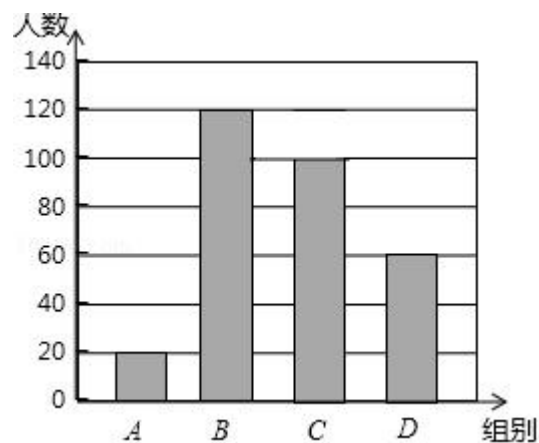
【点评】此题主要考查了实数的运算, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: 在进行实数运算时, 和有理数运算一样, 要从高级到低级, 即先算乘方、开方, 再算乘除, 最后算加减, 有括号的要先算括号里面的, 同级运算要按照从左到右的顺序进行. 另外, 有理数的运算律在实数范围内仍然适用.

18. (6 分) (2017•达州) 国家规定, 中、小学生每天在校体育活动时间不低于 1h. 为此, 某区就“你每天在校体育活动时间是多少”的问题随机调查了辖区内 300 名初中学生. 根据调查结果绘制成的统计图如图所示, 其中 A 组为 $t < 0.5h$, B 组为 $0.5h \leq t < 1h$, C 组为 $1h \leq t < 1.5h$, D 组为 $t \geq 1.5h$.

请根据上述信息解答下列问题:

(1) 本次调查数据的众数落在 B 组内, 中位数落在 C 组内;

(2) 该辖区约有 18000 名初中学生, 请你估计其中达到国家规定体育活动时间的人数.



【考点】V8: 频数 (率) 分布直方图; V5: 用样本估计总体; W4: 中位数;

W5: 众数.

【分析】(1) 根据中位数的概念, 中位数应是第 150、151 人时间的平均数, 分析可得答案;

(2) 首先计算样本中达到国家规定体育活动时间的频率, 再进一步估计总体达到国家规定体育活动时间的人数.

【解答】解: (1) 众数在 B 组.

根据中位数的概念, 中位数应是第 150、151 人时间的平均数, 分析可得其均在 C 组, 故本次调查数据的中位数落在 C 组.

故答案是: B, C;

(2) 达国家规定体育活动时间的人数约 $1800 \times \frac{100+60}{300} = 960$ (人).

答: 达国家规定体育活动时间的人约有 960 人.

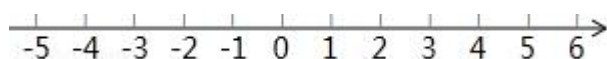
【点评】本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力; 利用统计图获取信息时, 必须认真观察、分析、研究统计图, 才能作出正确的判断和解决问题.

19. (7分) (2017•达州) 设 $A = \frac{a-2}{1+2a+a^2} \div (a - \frac{3a}{a+1})$.

(1) 化简 A;

(2) 当 $a=3$ 时, 记此时 A 的值为 $f(3)$; 当 $a=4$ 时, 记此时 A 的值为 $f(4)$; ...

解关于 x 的不等式: $\frac{x-2}{2} - \frac{7-x}{4} \leq f(3) + f(4) + \dots + f(11)$, 并将解集在数轴上表示出来.



【考点】 6C: 分式的混合运算; C4: 在数轴上表示不等式的解集; C6: 解一元一次不等式.

【分析】 (1) 根据分式的除法和减法可以解答本题;

(2) 根据 (1) 中的结果可以解答题目中的不等式并在数轴上表示出不等式的解集.

【解答】 解: (1) $A = \frac{a-2}{1+2a+a^2} \div (a - \frac{3a}{a+1})$

$$= \frac{a-2}{(a+1)^2} \div \frac{a(a+1)-3a}{a+1}$$

$$= \frac{a-2}{(a+1)^2} \cdot \frac{a+1}{a^2-2a}$$

$$= \frac{a-2}{(a+1)^2} \cdot \frac{a+1}{a(a-2)}$$

$$= \frac{1}{a(a+1)}$$

$$= \frac{1}{a^2+a};$$

$$(2) \because a=3 \text{ 时, } f(3) = \frac{1}{3^2+3} = \frac{1}{12},$$

$$a=4 \text{ 时, } f(4) = \frac{1}{4^2+4} = \frac{1}{20},$$

$$a=5 \text{ 时, } f(5) = \frac{1}{5^2+5} = \frac{1}{30},$$

...

$$\therefore \frac{x-2}{2} - \frac{7-x}{4} \leq f(3) + f(4) + \dots + f(11),$$

$$\text{即 } \frac{x-2}{2} - \frac{7-x}{4} \leq \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{11 \times 12}$$

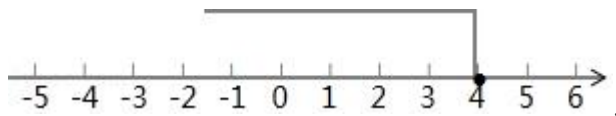
$$\therefore \frac{x-2}{2} - \frac{7-x}{4} \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{11} - \frac{1}{12},$$

$$\therefore \frac{x-2}{2} - \frac{7-x}{4} \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{12},$$

$$\therefore \frac{x-2}{2} - \frac{7-x}{4} \leq \frac{1}{4},$$

解得, $x \leq 4$,

$\therefore$ 原不等式的解集是 $x \leq 4$, 在数轴上表示如下所示,

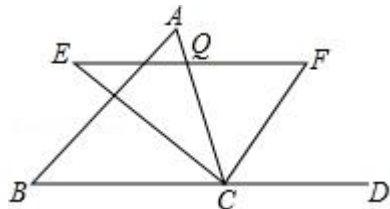


【点评】 本题考查分式的混合运算、在数轴表示不等式的解集、解一元一次不等式, 解答本题的关键是明确分式的混合运算的计算方法和解不等式的方法.

20. (7 分) (2017•达州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是边 AC 上一个动点, 过点 O 作直线 $EF \parallel BC$ 分别交 $\angle ACB$ 、外角 $\angle ACD$ 的平分线于点 E 、 F .

(1) 若 $CE=8$, $CF=6$, 求 OC 的长;

(2) 连接 AE 、 AF . 问: 当点 O 在边 AC 上运动到什么位置时, 四边形 $AECF$ 是矩形? 并说明理由.



【考点】 LG: 矩形的判定; JA: 平行线的性质; KJ: 等腰三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 根据平行线的性质以及角平分线的性质得出 $\angle OEC = \angle OCE$, $\angle OFC = \angle OCF$, 证出 $OE = OC = OF$, $\angle ECF = 90^\circ$, 由勾股定理求出 EF , 即可得出

答案;

(2) 根据平行四边形的判定以及矩形的判定得出即可.

【解答】(1) 证明: $\because EF$ 交 $\angle ACB$ 的平分线于点 E , 交 $\angle ACB$ 的外角平分线于点 F ,

$$\therefore \angle OCE = \angle BCE, \quad \angle OCF = \angle DCF,$$

$$\because MN \parallel BC,$$

$$\therefore \angle OEC = \angle BCE, \quad \angle OFC = \angle DCF,$$

$$\therefore \angle OEC = \angle OCE, \quad \angle OFC = \angle OCF,$$

$$\therefore OE = OC, \quad OF = OC,$$

$$\therefore OE = OF;$$

$$\because \angle OCE + \angle BCE + \angle OCF + \angle DCF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle CEF$ 中, 由勾股定理得: $EF = \sqrt{CE^2 + CF^2} = 10$,

$$\therefore OC = OE = \frac{1}{2}EF = 5;$$

(2) 解: 当点 O 在边 AC 上运动到 AC 中点时, 四边形 $AECF$ 是矩形. 理由如下:

连接 AE 、 AF , 如图所示:

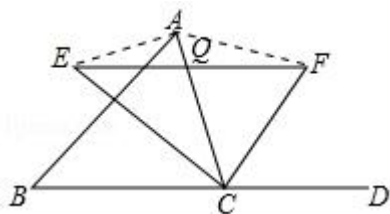
当 O 为 AC 的中点时, $AO = CO$,

$$\because EO = FO,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

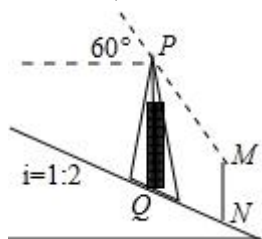
$$\because \angle ECF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 是矩形.



【点评】此题主要考查了矩形的判定、平行线的性质、等腰三角形的判定、勾股定理、平行四边形的判定和直角三角形的判定等知识，根据已知得出 $\angle ECF=90^\circ$ 是解题关键.

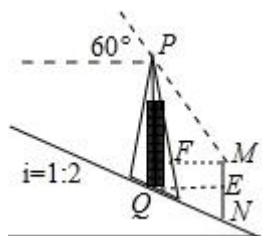
21. (7分) (2017•达州) 如图，信号塔 PQ 座落在坡度 $i=1:2$ 的山坡上，其正前方直立着一警示牌. 当太阳光线与水平线成 60° 角时，测得信号塔 PQ 落在斜坡上的影子 QN 长为 $2\sqrt{5}$ 米，落在警示牌上的影子 MN 长为 3 米，求信号塔 PQ 的高. (结果不取近似值)



【考点】 T9: 解直角三角形的应用 – 坡度坡角问题; U5: 平行投影.

【分析】如图作 $MF \perp PQ$ 于 F, $QE \perp MN$ 于 E, 则四边形 EMFQ 是矩形. 分别在 $Rt\triangle EQN$ 、 $Rt\triangle PFM$ 中解直角三角形即可解决问题.

【解答】解: 如图作 $MF \perp PQ$ 于 F, $QE \perp MN$ 于 E, 则四边形 EMFQ 是矩形.



在 $Rt\triangle QEN$ 中, 设 $EN=x$, 则 $EQ=2x$,

$$\therefore QN^2 = EN^2 + QE^2,$$

$$\therefore 20 = 5x^2,$$

$$\therefore x > 0,$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore EN = 2, EQ = MF = 4,$$

$$\therefore MN = 3,$$

$$\therefore FQ = EM = 1,$$

在 $Rt\triangle PFM$ 中, $PF = FM \cdot \tan 60^\circ = 4\sqrt{3}$,

$$\therefore PQ = PF + FQ = 4\sqrt{3} + 1.$$

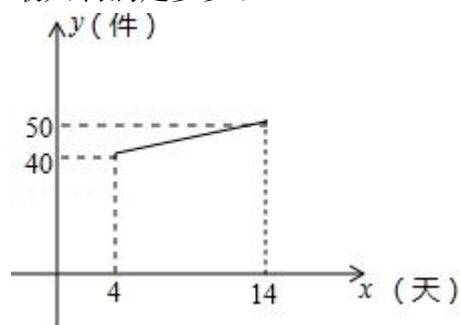
【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 坡度问题, 锐角三角函数等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造直角三角形解决问题, 属于中考常考题型.

22. (8 分) (2017•达州) 宏兴企业接到一批产品的生产任务, 按要求必须在 14 天内完成. 已知每件产品的出厂价为 60 元. 工人甲第 x 天生产的产品数量为 y

$$\text{件, } y \text{ 与 } x \text{ 满足如下关系: } y = \begin{cases} 7.5x & (0 \leq x \leq 4) \\ 5x + 10 & (4 < x \leq 14) \end{cases}.$$

(1) 工人甲第几天生产的产品数量为 70 件?

(2) 设第 x 天生产的产品成本为 P 元/件, P 与 x 的函数图象如图. 工人甲第 x 天创造的利润为 W 元, 求 W 与 x 的函数关系式, 并求出第几天时, 利润最大, 最大利润是多少?



【考点】 HE: 二次函数的应用.

【分析】 (1) 根据 $y=70$ 求得 x 即可;

(2) 先根据函数图象求得 P 关于 x 的函数解析式, 再结合 x 的范围分类讨论,

根据“总利润=单件利润×销售量”列出函数解析式，由二次函数的性质求得最值即可.

【解答】解：（1）根据题意，得：

∵若 $7.5x=70$ ，得： $x=\frac{28}{3}>4$ ，不符合题意；

∴ $5x+10=70$ ，

解得： $x=12$ ，

答：工人甲第 12 天生产的产品数量为 70 件；

（2）由函数图象知，当 $0\leq x\leq 4$ 时， $P=40$ ，

当 $4 < x\leq 14$ 时，设 $P=kx+b$ ，

将 $(4, 40)$ 、 $(14, 50)$ 代入，得：
$$\begin{cases} 4k + b = 40 \\ 14k + b = 50 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} k = 1 \\ b = 36 \end{cases}$$

∴ $P=x+36$ ；

①当 $0\leq x\leq 4$ 时， $W= (60 - 40) \cdot 7.5x=150x$ ，

∴ W 随 x 的增大而增大，

∴ 当 $x=4$ 时， $W_{\text{最大}}=600$ 元；

②当 $4 < x\leq 14$ 时， $W= (60 - x - 36) (5x+10) = -5x^2+110x+240 = -5(x-11)$

$^2+845$ ，

∴ 当 $x=11$ 时， $W_{\text{最大}}=845$ ，

∴ $845 > 600$ ，

∴ 当 $x=11$ 时， W 取得最大值，845 元，

答：第 11 天时，利润最大，最大利润是 845 元.

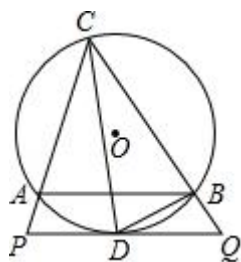
【点评】 本题考查一次函数的应用、二次函数的应用，解题的关键是理解题意，记住利润=出厂价－成本，学会利用函数的性质解决最值问题.

23. (8 分) (2017•达州) 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， CD 平分 $\angle ACB$ 交 $\odot O$ 于 D ，过点 D 作 $PQ \parallel AB$ 分别交 CA 、 CB 延长线于 P 、 Q ，连接 BD .

(1) 求证： PQ 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 求证： $BD^2=AC \cdot BQ$ ；

(3) 若 AC 、 BQ 的长是关于 x 的方程 $x + \frac{4}{x} = m$ 的两实根，且 $\tan \angle PCD = \frac{1}{3}$ ，求 $\odot O$ 的半径.



【考点】 S9：相似三角形的判定与性质； B2：分式方程的解； M5：圆周角定理； ME：切线的判定与性质； T7：解直角三角形.

【分析】 (1) 根据平行线的性质和圆周角定理得到 $\angle ABD = \angle BDQ = \angle ACD$ ，连接 OB ， OD ，交 AB 于 E ，根据圆周角定理得到 $\angle OBD = \angle ODB$ ， $\angle O = 2\angle DCB = 2\angle BDQ$ ，

根据三角形的内角和得到 $2\angle ODB + 2\angle O = 180^\circ$ ，于是得到 $\angle ODB + \angle O = 90^\circ$ ，根据切线的判定定理即可得到结论；

(2) 证明：连接 AD ，根据等腰三角形的判定得到 $AD = BD$ ，根据相似三角形的性质即可得到结论；

(3) 根据题意得到 $AC \cdot BQ = 4$ ，得到 $BD = 2$ ，由 (1) 知 PQ 是 $\odot O$ 的切线，由切线的性质得到 $OD \perp PQ$ ，根据平行线的性质得到 $OD \perp AB$ ，根据三角函数的

定义得到 $BE=3DE$ ，根据勾股定理得到 $BE=\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ，设 $OB=OD=R$ ，根据勾股定理即可得到结论.

【解答】(1) 证明: $\because PQ \parallel AB$,

$$\therefore \angle ABD = \angle BDQ = \angle ACD,$$

$$\because \angle ACD = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle BDQ = \angle ACD,$$

如图 1, 连接 OB , OD , 交 AB 于 E ,

则 $\angle OBD = \angle ODB$, $\angle O = 2\angle DCB = 2\angle BDQ$,

在 $\triangle OBD$ 中, $\angle OBD + \angle ODB + \angle O = 180^\circ$,

$$\therefore 2\angle ODB + 2\angle O = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ODB + \angle O = 90^\circ,$$

$\therefore PQ$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 证明: 如图 2, 连接 AD , 由 (1) 知 PQ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle BDQ = \angle DCB = \angle ACD = \angle BCD = \angle BAD,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\because \angle DBQ = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle BDQ \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{AD}{BQ} = \frac{AC}{BD},$$

$$\therefore BD^2 = AC \cdot BQ;$$

(3) 解: 方程 $x + \frac{4}{x} = m$ 可化为 $x^2 - mx + 4 = 0$,

$\therefore AC$ 、 BQ 的长是关于 x 的方程 $x + \frac{4}{x} = m$ 的两实根,

$$\therefore AC \cdot BQ = 4, \text{ 由 (2) 得 } BD^2 = AC \cdot BQ,$$

$$\therefore BD^2 = 4,$$

$$\therefore BD = 2,$$

由 (1) 知 PQ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore OD \perp PQ,$$

$$\therefore PQ \parallel AB,$$

$$\therefore OD \perp AB, \text{ 由 (1) 得 } \angle PCD = \angle ABD,$$

$$\therefore \tan \angle PCD = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan \angle ABD = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BE = 3DE,$$

$$\therefore DE^2 + (3DE)^2 = BD^2 = 4,$$

$$\therefore DE = \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore BE = \frac{6\sqrt{10}}{5},$$

设 $OB = OD = R$,

$$\therefore OE = R - \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore OB^2 = OE^2 + BE^2,$$

$$\therefore R^2 = \left(R - \frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{10}}{5}\right)^2,$$

解得: $R = 2\sqrt{10}$,

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 2\sqrt{10}.$$

简要叙述作图方法，并求出周长的最小值.

【考点】FI: 一次函数综合题.

【分析】(1) 用 P_1 、 P_2 的坐标分别表示出 OQ 和 PQ 的长即可证得结论;

(2) ①直接利用两点间距离公式可求得 MN 的长; ②分 AB 、 AC 、 BC 为对角线, 可求得其中心的坐标, 再利用中点坐标公式可求得 D 点坐标;

(3) 设 P 关于直线 OL 的对称点为 M , 关于 x 轴的对称点为 N , 连接 PM 交直线 OL 于点 R , 连接 PN 交 x 轴于点 S , 则可知 $OR=OS=2$, 利用两点间距离公式可求得 R 的坐标, 再由 $PR=PS=n$, 可求得 n 的值, 可求得 P 点坐标, 利用中点坐标公式可求得 M 点坐标, 由对称性可求得 N 点坐标, 连接 MN 交直线 OL 于点 E , 交 x 轴于点 S , 此时 $EP=EM$, $FP=FN$, 此时满足 $\triangle PEF$ 的周长最小, 利用两点间距离公式可求得其周长的最小值.

【解答】解:

$$(1) \because P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2),$$

$$\therefore Q_1Q_2=OQ_2-OQ_1=x_2-x_1,$$

$$\therefore Q_1Q=\frac{x_2-x_1}{2},$$

$$\therefore OQ=OQ_1+Q_1Q=x_1+\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{x_1+x_2}{2},$$

$\therefore PQ$ 为梯形 $P_1Q_1Q_2P_2$ 的中位线,

$$\therefore PQ=\frac{P_1Q_1+P_2Q_2}{2}=\frac{y_1+y_2}{2},$$

即线段 P_1P_2 的中点 $P(x, y)$ P 的坐标公式为 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$;

$$(2) \textcircled{1} \because M(2, -1), N(-3, 5),$$

$$\therefore MN=\sqrt{(2+3)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{61},$$

故答案为: $\sqrt{61}$;

$$\textcircled{2} \because A(2, 2), B(-2, 0), C(3, -1),$$

$\therefore$ 当 AB 为平行四边形的对角线时, 其对称中心坐标为 $(0, 1)$,

设 $D(x, y)$, 则 $x+3=0$, $y+(-1)=2$, 解得 $x=-3$, $y=3$,

$\therefore$ 此时 D 点坐标为 $(-3, 3)$,

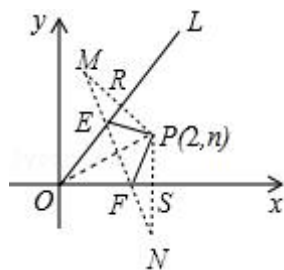
当 AC 为对角线时, 同理可求得 D 点坐标为 $(7, 1)$,

当 BC 为对角线时, 同理可求得 D 点坐标为 $(-1, -3)$,

综上所述 D 点坐标为 $(-3, 3)$ 或 $(7, 1)$ 或 $(-1, -3)$,

故答案为: $(-3, 3)$ 或 $(7, 1)$ 或 $(-1, -3)$;

(3) 如图, 设 P 关于直线 OL 的对称点为 M , 关于 x 轴的对称点为 N , 连接 PM 交直线 OL 于点 R , 连接 PN 交 x 轴于点 S , 连接 MN 交直线 OL 于点 E , 交 x 轴于点 F ,



又对称性可知 $EP=EM$, $FP=FN$,

$\therefore PE+PF+EF=ME+EF+NF=MN$,

$\therefore$ 此时 $\triangle PEF$ 的周长即为 MN 的长, 为最小,

设 $R(x, \frac{4}{3}x)$, 由题意可知 $OR=OS=2$, $PR=PS=n$,

$\therefore \sqrt{x^2 + (\frac{4}{3}x)^2} = 2$, 解得 $x = -\frac{6}{5}$ (舍去) 或 $x = \frac{6}{5}$

$\therefore R(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$,

$\therefore \sqrt{(2 - \frac{6}{5})^2 + (n - \frac{8}{5})^2} = n$, 解得 $n=1$,

$\therefore P(2, 1)$,

$\therefore N(2, -1)$,

设 $M(x, y)$, 则 $\frac{x+2}{2} = \frac{6}{5}$, $\frac{y+1}{2} = \frac{8}{5}$ 解得 $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{11}{5}$,

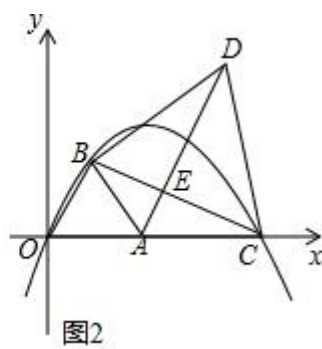
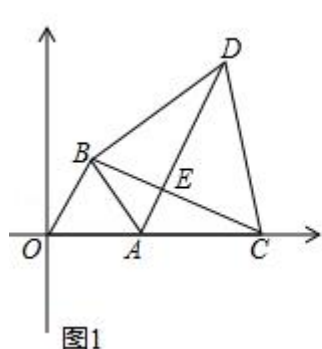
$$\therefore M\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right),$$

$$\therefore MN = \sqrt{\left(2 - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(-1 - \frac{11}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

即 $\triangle PEF$ 的周长的最小值为 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

【点评】 本题为一次函数的综合应用, 涉及中位线定理、中点坐标公式、两点间距离公式、轴对称的性质、角平分线的性质、平行四边形的性质等知识. 在 (1) 中求得 OQ 和 PQ 的长是解题的关键, 在 (2) 中注意中点坐标公式的应用, 在 (3) 中确定出 E 、 F 的位置, 求得 P 点的坐标是解题的关键. 本题考查知识点较多, 综合性较强, 计算量较大, 难度较大.

25. (12 分) (2017·达州) 如图 1, 点 A 坐标为 $(2, 0)$, 以 OA 为边在第一象限内作等边 $\triangle OAB$, 点 C 为 x 轴上一动点, 且在点 A 右侧, 连接 BC , 以 BC 为边在第一象限内作等边 $\triangle BCD$, 连接 AD 交 BC 于 E .



(1) ①直接回答: $\triangle OBC$ 与 $\triangle ABD$ 全等吗?

②试说明: 无论点 C 如何移动, AD 始终与 OB 平行;

(2) 当点 C 运动到使 $AC^2 = AE \cdot AD$ 时, 如图 2, 经过 O 、 B 、 C 三点的抛物线为 y_1 . 试问: y_1 上是否存在动点 P , 使 $\triangle BEP$ 为直角三角形且 BE 为直角边? 若存在, 求出点 P 坐标; 若不存在, 说明理由;

(3) 在 (2) 的条件下, 将 y_1 沿 x 轴翻折得 y_2 , 设 y_1 与 y_2 组成的图形为 M , 函

数 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}m$ 的图象 l 与 M 有公共点. 试写出: l 与 M 的公共点为 3 个时, m 的取值.

【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) ①利用等边三角形的性质证明 $\triangle OBC \cong \triangle ABD$;

②证明 $\angle OBA = \angle BAD = 60^\circ$, 可得 $OB \parallel AD$;

(2) 首先证明 $DE \perp BC$, 再求直线 AE 与抛物线的交点就是点 P , 所以分别求直线 AE 和抛物线 y_1 的解析式组成方程组, 求解即可;

(3) 先画出如图 3, 根据图形画出直线与图形 M 有个公共点时, 两个边界的直线, 上方到 $y=\sqrt{3}x$, 将 $y=\sqrt{3}x$ 向下平移即可满足 l 与图形 M 有 3 个公共点, 一直到直线 l 与 y_2 相切为止, 主要计算相切时, 列方程组, 确定 $\Delta \geq 0$ 时, m 的值即可.

【解答】 解: (1) ① $\triangle OBC$ 与 $\triangle ABD$ 全等,

理由是: 如图 1, $\because \triangle OAB$ 和 $\triangle BCD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle OBA = \angle CBD = 60^\circ,$$

$$OB = AB, \quad BC = BD,$$

$$\therefore \angle OBA + \angle ABC = \angle CBD + \angle ABC,$$

$$\text{即 } \angle OBC = \angle ABD,$$

$$\therefore \triangle OBC \cong \triangle ABD \quad (\text{SAS});$$

$$\textcircled{2} \because \triangle OBC \cong \triangle ABD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OBA = \angle BAD,$$

$$\therefore OB \parallel AD,$$

$\therefore$ 无论点 C 如何移动, AD 始终与 OB 平行;

(2) 如图 2, $\therefore AC^2 = AE \cdot AD$,

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore \angle EAC = \angle DAC,$$

$$\therefore \triangle AEC \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \angle ECA = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = \angle AEC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ADB,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC,$$

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore DE \perp BC,$$

Rt $\triangle ABE$ 中, $\angle BAE = 60^\circ$,

$$\therefore \angle ABE = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

Rt $\triangle AEC$ 中, $\angle EAC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle ECA = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = 2AE = 2,$$

$$\therefore C(4, 0),$$

等边 $\triangle OAB$ 中, 过 B 作 $BH \perp x$ 轴于 H,

$$\therefore BH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore B(1, \sqrt{3}),$$

设 y_1 的解析式为: $y = ax(x - 4)$,

把 $B(1, \sqrt{3})$ 代入得: $\sqrt{3} = a(1 - 4)$,

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{设 } y_1 \text{ 的解析式为: } y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x(x - 4) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}x,$$

过 E 作 $EG \perp x$ 轴于 G ,

$Rt\triangle AGE$ 中, $AE = 1$,

$$\therefore AG = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2},$$

$$EG = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore E\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

设直线 AE 的解析式为: $y = kx + b$,

$$\text{把 } A(2, 0) \text{ 和 } E\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 代入得: } \begin{cases} 2k + b = 0 \\ \frac{5}{2}k + b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \sqrt{3} \\ b = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AE 的解析式为: $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$,

$$\text{则 } \begin{cases} y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -4\sqrt{3} \end{cases}$$

$\therefore P(3, \sqrt{3})$ 或 $(-2, -4\sqrt{3})$;

(3) 如图 3,

$$y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

顶点 $(2, \frac{4\sqrt{3}}{3})$,

$\therefore$ 抛物线 y_2 的顶点为 $(2, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$,

$$\therefore y_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} (x-2)^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

当 $m=0$ 时, $y=\sqrt{3}x$ 与图形 M 两公共点,

当 y_2 与 l 相切时, 即有一个公共点, l 与图形 M 有 3 个公共点,

$$\text{则} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3} (x-2)^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}, \\ y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}m \end{cases}$$

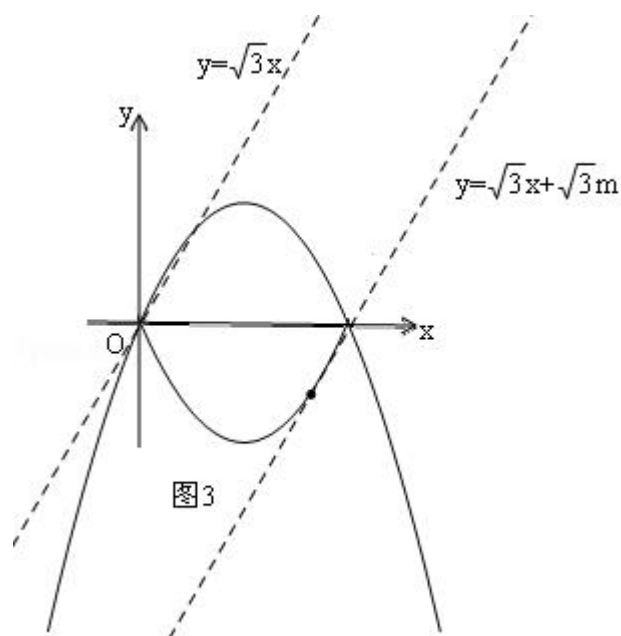
$$\sqrt{3}x + \sqrt{3}m = \frac{\sqrt{3}}{3} (x-2)^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

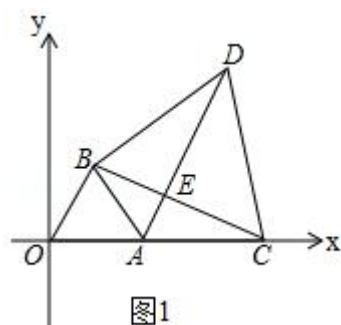
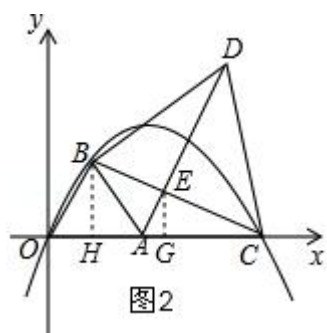
$$x^2 - 7x - 3m = 0,$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-3m) \geq 0,$$

$$m \geq -\frac{49}{12},$$

$\therefore$ 当 l 与 M 的公共点为 3 个时, m 的取值是: $-\frac{49}{12} \leq m < 0$.





【点评】 本题是二次函数与三角形的综合题，考查了等边三角形的性质、三角形全等和相似的性质和判定、平行线的判定、两函数的交点问题、翻折变换、利用待定系数法求函数的解析式等知识，比较复杂，计算量大，尤其是第三问，利用数形结合的思想有助于理解题意，解决问题.