

2017 年四川省内江市中考数学试卷

一、选择题 (共 12 小题, 每小题 3 分, 满分 36 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 下面四个数中比 -5 小的数是 ()

A. 1 B. 0 C. -4 D. -6

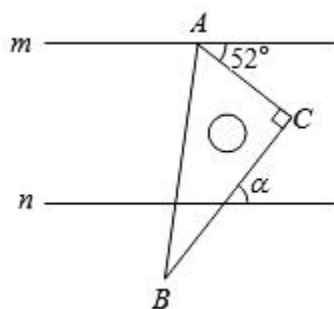
2. PM2.5 是指大气中直径小于或等于 $2.5\mu\text{m}$ ($1\mu\text{m}=0.000001\text{m}$) 的颗粒物, 也称为可入肺颗粒物, 它们还有一定量的有毒、有害物质, 对人体健康和大气环境质量有很大影响. $2.3\mu\text{m}$ 用科学记数法可表示为 ()

A. $23 \times 10^{-5}\text{m}$ B. $2.3 \times 10^{-5}\text{m}$ C. $2.3 \times 10^{-6}\text{m}$ D. $0.23 \times 10^{-7}\text{m}$

3. 为了解某市老人的身体健康状况, 需要抽取部分老人进行调查, 下列抽取老人的方法最合适的是 ()

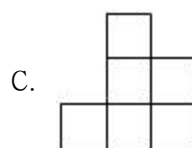
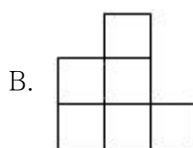
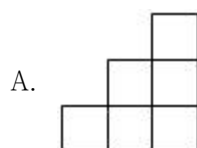
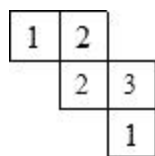
- A. 随机抽取 100 位女性老人
- B. 随机抽取 100 位男性老人
- C. 随机抽取公园内 100 位老人
- D. 在城市和乡镇各选 10 个点, 每个点任选 5 位老人

4. 如图, 直线 $m \parallel n$, 直角三角板 ABC 的顶点 A 在直线 m 上, 则 $\angle \alpha$ 的余角等于 ()



A. 19° B. 38° C. 42° D. 52°

5. 由一些大小相同的小正方体搭成的几何体的俯视图如图所示, 其中正方形中的数字表示该位置上的小正方体的个数, 那么该几何体的主视图是 ()



6. 下列图形: 平行四边形、矩形、菱形、圆、等腰三角形, 这些图形中只是轴对称图形的有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

7. 某中学对该校九年级 45 名女学生进行了一次立定跳远测试，成绩如表：

跳远成绩	160	170	180	190	200	210
人数	3	9	6	9	15	3

这些立定跳远成绩的中位数和众数分别是 ()

A. 9, 9 B. 15, 9 C. 190, 200 D. 185, 200

8. 下列计算正确的是 ()

A. $3x^2y+5xy=8x^3y^2$ B. $(x+y)^2=x^2+y^2$

C. $(-2x)^2 \div x=4x$ D. $\frac{y}{x-y} + \frac{x}{y-x}=1$

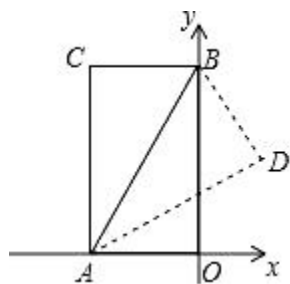
9. 端午节前夕，某超市用 1680 元购进 A、B 两种商品共 60 件，其中 A 型商品每件 24 元，B 型商品每件 36 元. 设购买 A 型商品 x 件、B 型商品 y 件，依题意列方程组正确的是 ()

A. $\begin{cases} x+y=60 \\ 36x+24y=1680 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y=60 \\ 24x+36y=1680 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 36x+24y=60 \\ x+y=1680 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 24x+36y=60 \\ x+y=1680 \end{cases}$

10. 不等式组 $\begin{cases} 3x+7 \geq 2 \\ 2x-9 < 1 \end{cases}$ 的非负整数解的个数是 ()

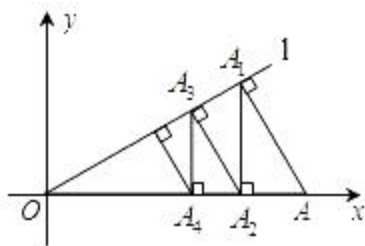
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

11. 如图，在矩形 AOBC 中，O 为坐标原点，OA、OB 分别在 x 轴、y 轴上，点 B 的坐标为 $(0, 3\sqrt{3})$ ， $\angle ABO=30^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 沿 AB 所在直线对折后，点 C 落在点 D 处，则点 D 的坐标为 ()



A. $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ B. $(2, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ C. $(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3})$

12. 如图，过点 $A_0(2, 0)$ 作直线 $l: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的垂线，垂足为点 A_1 ，过点 A_1 作 $A_1A_2 \perp x$ 轴，垂足为点 A_2 ，过点 A_2 作 $A_2A_3 \perp l$ ，垂足为点 A_3 ， $\dots$ ，这样依次下去，得到一组线段： A_0A_1 ， A_1A_2 ， A_2A_3 ， $\dots$ ，则线段 $A_{2016}A_{2107}$ 的长为 ()



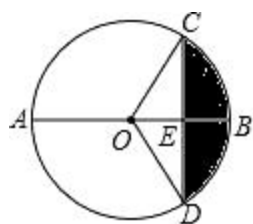
- A. $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2015}$ B. $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2016}$ C. $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2017}$ D. $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2018}$

二、填空题（共4小题，每小题5分，满分20分）

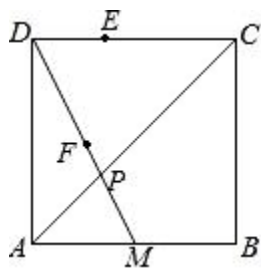
13. 分解因式： $3x^2 - 18x + 27 =$ _____.

14. 在函数 $y = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x-2}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____.

15. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E， $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{3}$ ，弦 CD 的长为 3cm，则图中阴影部分面积是_____.



16. 如图，正方形 ABCD 中，BC=2，点 M 是边 AB 的中点，连接 DM，DM 与 AC 交于点 P，点 E 在 DC 上，点 F 在 DP 上，且 $\angle DFE = 45^\circ$ 。若 $PF = \frac{\sqrt{5}}{6}$ ，则 CE = _____.

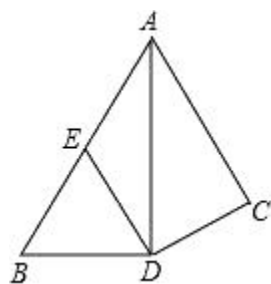


三、解答题（共5小题，满分44分）

17. 计算： $-1^{2017} - |1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \tan 60^\circ| + \sqrt{(-2)^2} \times (\frac{1}{2})^{-2+0}$.

18. 如图, AD 平分 $\angle BAC$, $AD \perp BD$, 垂足为点 D , $DE \parallel AC$.

求证: $\triangle BDE$ 是等腰三角形.



19. 小明随机调查了若干市民租用共享单车的骑车时间 t (单位: 分), 将获得的数据分成四组, 绘制了如下统计图 (A: $0 < t \leq 10$, B: $10 < t \leq 20$, C: $20 < t \leq 30$, D: $t > 30$), 根据图中信息, 解答下列问题:

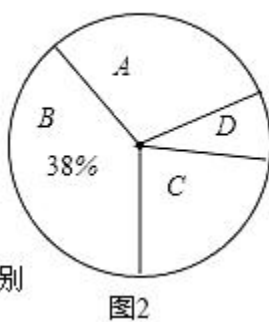
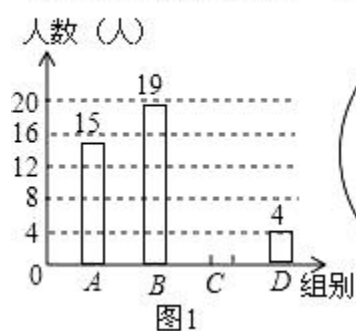
(1) 这项被调查的总人数是多少人?

(2) 试求表示 A 组的扇形统计图的圆心角的度数, 补全条形统计图;

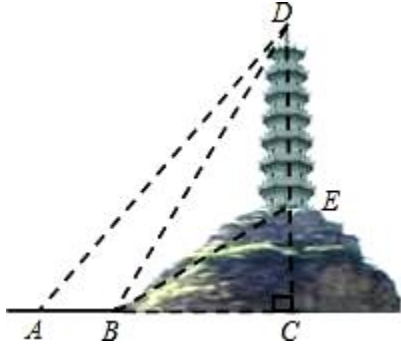
(3) 如果小明想从 D 组的甲、乙、丙、丁四人中随机选择两人了解平时租用共享单车情况, 请用列表或画树状图的方法求出恰好选中甲的概率.

各组人数的条形统计图

各组人数扇形统计图

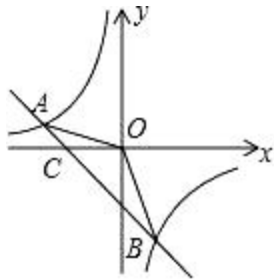


20. 如图，某人为了测量小山顶上的塔 ED 的高，他在山下的点 A 处测得塔尖点 D 的仰角为 45° ，再沿 AC 方向前进 60m 到达山脚点 B，测得塔尖点 D 的仰角为 60° ，塔底点 E 的仰角为 30° ，求塔 ED 的高度.（结果保留根号）



21. 已知 A $(-4, 2)$ 、B $(n, -4)$ 两点是一次函数 $y=kx+b$ 和反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 图象的两个交点.

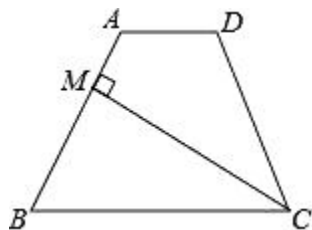
- (1) 求一次函数和反比例函数的解析式；
- (2) 求 $\triangle AOB$ 的面积；
- (3) 观察图象，直接写出不等式 $kx+b - \frac{m}{x} > 0$ 的解集.



四、填空题（共4小题，每小题6分，满分24分）

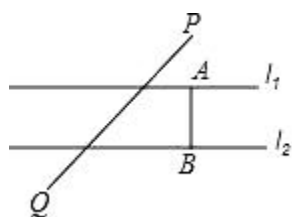
22. 若实数 x 满足 $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，则 $2x^3 - 7x^2 + 4x - 2017 =$ _____.

23. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， CM 是 $\angle BCD$ 的平分线，且 $CM \perp AB$ ， M 为垂足， $AM = \frac{1}{3}AB$. 若四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{15}{7}$ ，则四边形 $AMCD$ 的面积是_____.



24. 设 α 、 β 是方程 $(x+1)(x-4) = -5$ 的两实数根，则 $\frac{\beta^3}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta} =$ _____.

25. 如图，已知直线 $l_1 \parallel l_2$ ， l_1 、 l_2 之间的距离为 8，点 P 到直线 l_1 的距离为 6，点 Q 到直线 l_2 的距离为 4， $PQ = 4\sqrt{30}$ ，在直线 l_1 上有一动点 A ，直线 l_2 上有一动点 B ，满足 $AB \perp l_2$ ，且 $PA + AB + BQ$ 最小，此时 $PA + BQ =$ _____.



五、解答题（共3小题，满分36分）

26. 观察下列等式：

$$\text{第一个等式: } a_1 = \frac{2}{1+3 \times 2+2 \times 2^2} = \frac{1}{2+1} - \frac{1}{2^2+1}$$

$$\text{第二个等式: } a_2 = \frac{2^2}{1+3 \times 2^2+2 \times (2^2)^2} = \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{2^3+1}$$

$$\text{第三个等式: } a_3 = \frac{2^3}{1+3 \times 2^3+2 \times (2^3)^2} = \frac{1}{2^3+1} - \frac{1}{2^4+1}$$

$$\text{第四个等式: } a_4 = \frac{2^4}{1+3 \times 2^4+2 \times (2^4)^2} = \frac{1}{2^4+1} - \frac{1}{2^5+1}$$

按上述规律，回答下列问题：

(1) 请写出第六个等式： $a_6 =$ _____ $=$ _____；

(2) 用含 n 的代数式表示第 n 个等式： $a_n =$ _____ $=$ _____；

(3) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=$ _____ (得出最简结果) ;

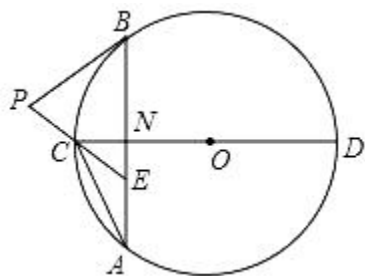
(4) 计算: $a_1+a_2+\cdots+a_n$.

27. 如图, 在 $\odot O$ 中, 直径 CD 垂直于不过圆心 O 的弦 AB , 垂足为点 N , 连接 AC , 点 E 在 AB 上, 且 $AE=CE$

(1) 求证: $AC^2=AE\cdot AB$;

(2) 过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 EC 的延长线于点 P , 试判断 PB 与 PE 是否相等, 并说明理由;

(3) 设 $\odot O$ 半径为 4, 点 N 为 OC 中点, 点 Q 在 $\odot O$ 上, 求线段 PQ 的最小值.



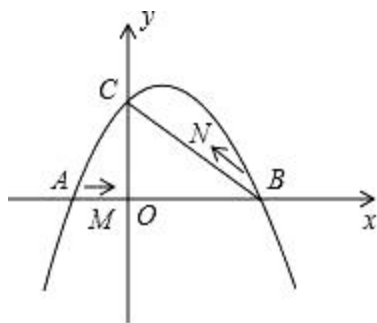
28. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 与 y 轴交与点 $C(0, 3)$, 与

x 轴交于 A、B 两点，点 B 坐标为 (4, 0)，抛物线的对称轴方程为 $x=1$.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 M 从 A 点出发，在线段 AB 上以每秒 3 个单位长度的速度向 B 点运动，同时点 N 从 B 点出发，在线段 BC 上以每秒 1 个单位长度的速度向 C 点运动，其中一个点到达终点时，另一个点也停止运动，设 $\triangle MBN$ 的面积为 S，点 M 运动时间为 t，试求 S 与 t 的函数关系，并求 S 的最大值；

(3) 在点 M 运动过程中，是否存在某一时刻 t，使 $\triangle MBN$ 为直角三角形？若存在，求出 t 值；若不存在，请说明理由.



2017 年四川省内江市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 下面四个数中比 -5 小的数是（ ）

A. 1 B. 0 C. -4 D. -6

【考点】18: 有理数大小比较.

【分析】有理数大小比较的法则：①正数都大于 0；②负数都小于 0；③正数大于一切负数；④两个负数，绝对值大的其值反而小，据此判断即可.

【解答】解：根据有理数比较大小的方法，可得

$$-5 < 1,$$

$$-5 < 0,$$

$$-5 < -4,$$

$$-5 > -6,$$

$\therefore$ 四个数中比 -5 小的数是 -6 .

故选：D.

2. PM2.5 是指大气中直径小于或等于 $2.5\mu\text{m}$ ($1\mu\text{m}=0.000001\text{m}$) 的颗粒物，也称为可入肺颗粒物，它们还有一定量的有毒、有害物质，对人体健康和大气环境质量有很大影响. $2.3\mu\text{m}$ 用科学记数法可表示为（ ）

A. $23 \times 10^{-5}\text{m}$ B. $2.3 \times 10^{-5}\text{m}$ C. $2.3 \times 10^{-6}\text{m}$ D. $0.23 \times 10^{-7}\text{m}$

【考点】1J: 科学记数法—表示较小的数.

【分析】绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【解答】解： $2.3\mu\text{m}=2.3 \times 0.000001\text{m}=2.3 \times 10^{-6}\text{m}$,

故选：C.

3. 为了解某市老人的身体健康状况，需要抽取部分老人进行调查，下列抽取老人的方法最合适的是（ ）

- A. 随机抽取 100 位女性老人
- B. 随机抽取 100 位男性老人
- C. 随机抽取公园内 100 位老人
- D. 在城市和乡镇各选 10 个点，每个点任选 5 位老人

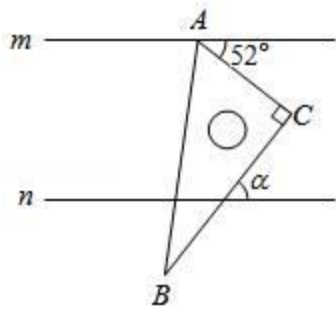
【考点】V4: 抽样调查的可靠性.

【分析】利用抽取的样本得当，能很好地反映总体的情况可对各选项进行判断.

【解答】解：为了解某市老人的身体健康状况，需要抽取部分老人进行调查，在城市和乡镇各选 10 个点，每个点任选 5 位老人，这种抽取老人的方法最合适.

故选 D.

4. 如图，直线 $m \parallel n$ ，直角三角板 ABC 的顶点 A 在直线 m 上，则 $\angle \alpha$ 的余角等于（ ）



- A. 19°
- B. 38°
- C. 42°
- D. 52°

【考点】JA: 平行线的性质; IL: 余角和补角.

【分析】过 C 作 $CD \parallel$ 直线 m，根据平行线性质得出 $\angle DCA = \angle FAC = 38^\circ$ ， $\angle \alpha = \angle DCB$ ，求出即可.

【解答】解：过 C 作 $CD \parallel$ 直线 m，

$$\because m \parallel n,$$

$$\therefore CD \parallel m \parallel n,$$

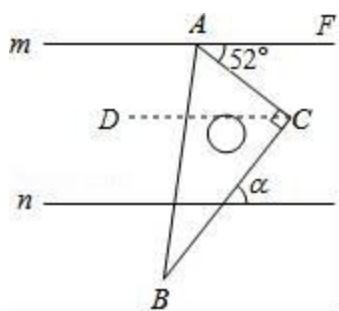
$$\therefore \angle DCA = \angle FAC = 52^\circ, \quad \angle \alpha = \angle DCB,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

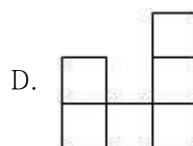
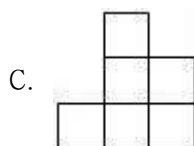
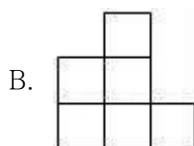
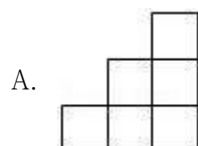
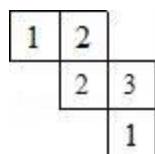
$$\therefore \angle \alpha = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ,$$

则 $\angle \alpha$ 的余角是 52° .

故选 D.



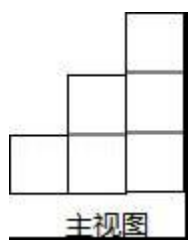
5. 由一些大小相同的小正方体搭成的几何体的俯视图如图所示，其中正方形中的数字表示该位置上的小正方体的个数，那么该几何体的主视图是（ ）



【考点】U3: 由三视图判断几何体；U2: 简单组合体的三视图.

【分析】由已知条件可知，主视图有 3 列，每列小正方形数目分别为 1，2，3；据此可画出图形.

【解答】解：如图所示：



故选 A.

6. 下列图形：平行四边形、矩形、菱形、圆、等腰三角形，这些图形中只是轴对称图形的有（ ）

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【考点】P3: 轴对称图形.

【分析】根据轴对称图形的概念对各图形分析判断即可得解.

【解答】解：平行四边形是中心对称图形，不是轴对称图形，
 矩形既是中心对称图形，也是轴对称图形，
 菱形既是中心对称图形，也是轴对称图形，
 圆既是中心对称图形，也是轴对称图形，
 等腰三角形不是中心对称图形，只是轴对称图形，
 所以，只是轴对称图形的有 1 个。
 故选 A.

7. 某中学对该校九年级 45 名女学生进行了一次立定跳远测试，成绩如表：

跳远成绩	160	170	180	190	200	210
人数	3	9	6	9	15	3

这些立定跳远成绩的中位数和众数分别是（ ）

A. 9, 9 B. 15, 9 C. 190, 200 D. 185, 200

【考点】W5：众数；W4：中位数.

【分析】根据中位数和众数的定义即可解决问题.

【解答】解：45 名女学生的立定跳远测试成绩的中位数是最中间第 23 个数据 190，众数是出现次数最多的数据 200；

故选：C.

8. 下列计算正确的是（ ）

A. $3x^2y+5xy=8x^3y^2$ B. $(x+y)^2=x^2+y^2$

C. $(-2x)^2 \div x = 4x$ D. $\frac{y}{x-y} + \frac{x}{y-x} = 1$

【考点】6B：分式的加减法；4I：整式的混合运算.

【分析】根据整式的运算法则即可求出答案.

【解答】解：（A） $3x^2y$ 与 $5xy$ 不是同类项，故 A 不正确；

（B）原式= $x^2+2xy+y^2$ ，故 B 不正确；

（C）原式= $4x^2 \div x = 4x$ ，故 C 正确；

（D）原式= $\frac{y}{x-y} - \frac{x}{x-y} = -1$ ，故 D 不正确；

故选（C）

9. 端午节前夕, 某超市用 1680 元购进 A、B 两种商品共 60 件, 其中 A 型商品每件 24 元, B 型商品每件 36 元. 设购买 A 型商品 x 件、B 型商品 y 件, 依题意列方程组正确的是 ()

A. $\begin{cases} x+y=60 \\ 36x+24y=1680 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y=60 \\ 24x+36y=1680 \end{cases}$
 C. $\begin{cases} 36x+24y=60 \\ x+y=1680 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 24x+36y=60 \\ x+y=1680 \end{cases}$

【考点】99: 由实际问题抽象出二元一次方程组.

【分析】根据 A、B 两种商品共 60 件以及用 1680 元购进 A、B 两种商品分别得出等式组成方程组即可.

【解答】解: 设购买 A 型商品 x 件、B 型商品 y 件, 依题意列方程组:

$$\begin{cases} x+y=60 \\ 24x+36y=1680 \end{cases}$$

故选: B.

10. 不等式组 $\begin{cases} 3x+7 \geq 2 \\ 2x-9 < 1 \end{cases}$ 的非负整数解的个数是 ()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【考点】CC: 一元一次不等式组的整数解.

【分析】先求出不等式组的解集, 再求出不等式组的非负整数解, 即可得出答案.

【解答】解: $\begin{cases} 3x+7 \geq 2 \text{ ①} \\ 2x-9 < 1 \text{ ②} \end{cases}$

$\therefore$ 解不等式①得: $x \geq -\frac{5}{3}$,

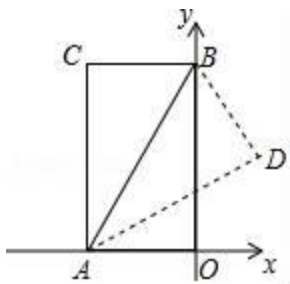
解不等式②得: $x < 5$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-\frac{5}{3} \leq x < 5$,

$\therefore$ 不等式组的非负整数解为 0, 1, 2, 3, 4, 共 5 个,

故选 B.

11. 如图, 在矩形 AOBC 中, O 为坐标原点, OA、OB 分别在 x 轴、 y 轴上, 点 B 的坐标为 $(0, 3\sqrt{3})$, $\angle ABO = 30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿 AB 所在直线对折后, 点 C 落在点 D 处, 则点 D 的坐标为 ()



- A. $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ B. $(2, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ C. $(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3})$

【考点】PB: 翻折变换（折叠问题）；D5: 坐标与图形性质；LB: 矩形的性质.

【分析】根据翻折变换的性质结合锐角三角函数关系得出对应线段长，进而得出 D 点坐标.

【解答】解：∵ 四边形 AOBC 是矩形， $\angle ABO = 30^\circ$ ，点 B 的坐标为 $(0, 3\sqrt{3})$ ，

$$\therefore AC = OB = 3\sqrt{3}, \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\therefore BC = AC \cdot \tan 30^\circ = 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3,$$

∵ 将 $\triangle ABC$ 沿 AB 所在直线对折后，点 C 落在点 D 处，

$$\therefore \angle BAD = 30^\circ, AD = 3\sqrt{3},$$

过点 D 作 $DM \perp x$ 轴于点 M，

$$\therefore \angle CAB = \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAM = 30^\circ,$$

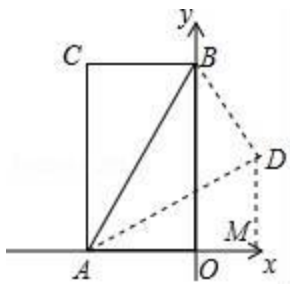
$$\therefore DM = \frac{1}{2}AD = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AM = 3\sqrt{3} \times \cos 30^\circ = \frac{9}{2},$$

$$\therefore MO = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2},$$

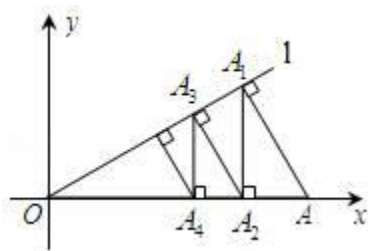
$$\therefore \text{点 D 的坐标为 } (\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}).$$

故选：A.



12. 如图，过点 $A_0(2, 0)$ 作直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的垂线，垂足为点 A_1 ，过点 A_1 作 $A_1A_2 \perp x$ 轴，

垂足为点 A_2 ，过点 A_2 作 $A_2A_3 \perp l$ ，垂足为点 A_3 ， $\cdots$ ，这样依次下去，得到一组线段： A_0A_1 ， A_1A_2 ， A_2A_3 ， $\cdots$ ，则线段 $A_{2016}A_{2107}$ 的长为（ ）



- A. $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2015}$ B. $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2016}$ C. $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2017}$ D. $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2018}$

【考点】 F8：一次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 根据含 30° 的直角三角形的性质结合图形即可得到规律 “ $OA_n = (\frac{\sqrt{3}}{2})^n OA = 2 (\frac{\sqrt{3}}{2})^n$ ”，依此规律即可解决问题.

【解答】 解：由 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，得

l 的倾斜角为 30° ，

点 A 坐标为 $(2, 0)$ ，

$\therefore OA = 2$ ，

$\therefore OA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \sqrt{3}$ ， $OA_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} OA_1 = \frac{3}{2}$ ， $OA_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} OA_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ， $OA_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} OA_3 = \frac{9}{8}$ ， $\cdots$ ，

$\therefore OA_n = (\frac{\sqrt{3}}{2})^n OA = 2 (\frac{\sqrt{3}}{2})^n$.

$\therefore OA_{2016} = 2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2016}$ ，

$A_{2016}A_{2107}$ 的长 $\frac{1}{2} \times 2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2016} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2016}$ ，

故选：B.

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13. 分解因式： $3x^2 - 18x + 27 = 3(x-3)^2$.

【考点】 55：提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】 先提取公因式 3，再根据完全平方公式进行二次分解.

【解答】 解： $3x^2 - 18x + 27$ ，

$= 3(x^2 - 6x + 9)$ ，

$= 3(x-3)^2$.

故答案为: $3(x-3)^2$.

14. 在函数 $y = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 $x \geq 2$ 且 $x \neq 3$.

【考点】E4: 函数自变量的取值范围.

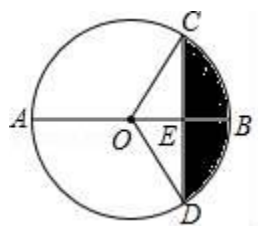
【分析】根据二次根式的性质和分式的意义, 被开方数大于或等于 0, 分母不等于 0, 可以求出 x 的范围.

【解答】解: 根据题意得: $x-2 \geq 0$ 且 $x-3 \neq 0$,

解得: $x \geq 2$ 且 $x \neq 3$.

故答案为 $x \geq 2$ 且 $x \neq 3$.

15. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$ 于点 E , $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{3}$, 弦 CD 的长为 3cm, 则图中阴影部分面积是 $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$.



【考点】MO: 扇形面积的计算; M2: 垂径定理; M5: 圆周角定理.

【分析】根据垂径定理得到 $CE = \frac{3}{2}$, 根据勾股定理得到 $OE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 利用扇形和三角形的面积公式, 求得阴影部分面积.

【解答】解: $\because$ 弦 $CD \perp AB$ 于点 E ,

$$\therefore CE = \frac{3}{2},$$

$$\because OC = \sqrt{3},$$

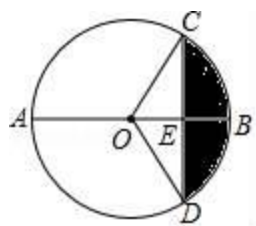
$$\therefore OE = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle OCE = 30^\circ,$$

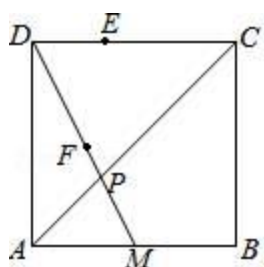
$$\therefore \angle COD = 120^\circ,$$

$$\therefore \text{图中阴影部分面积} = \frac{120 \cdot \pi \times (\sqrt{3})^2}{360} - \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

故答案为: $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$.



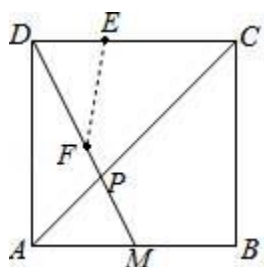
16. 如图, 正方形 ABCD 中, $BC=2$, 点 M 是边 AB 的中点, 连接 DM, DM 与 AC 交于点 P, 点 E 在 DC 上, 点 F 在 DP 上, 且 $\angle DFE=45^\circ$. 若 $PF=\frac{\sqrt{5}}{6}$, 则 $CE=\frac{7}{6}$.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质; LE: 正方形的性质.

【分析】 如图, 连接 EF. 首先求出 DM、DF 的长, 证明 $\triangle DEF \sim \triangle DPC$, 可得 $\frac{DF}{DC} = \frac{DE}{DP}$, 求出 DE 即可解决问题.

【解答】 解: 如图, 连接 EF.



$\because$ 四边形 ABCD 是正方形,

$\therefore AB=BC=CD=DA=2$, $\angle DAB=90^\circ$, $\angle DCP=45^\circ$,

$\therefore AM=BM=1$,

在 $Rt\triangle ADM$ 中, $DM=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$\because AM \parallel CD$,

$\therefore \frac{AM}{DC} = \frac{MP}{PD} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore DP = \frac{2\sqrt{5}}{3}, \quad \therefore PF = \frac{\sqrt{5}}{6},$$

$$\therefore DF = DP = PF = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \angle EDF = \angle PDC, \quad \angle DFE = \angle DCP,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DPC,$$

$$\therefore \frac{DF}{DC} = \frac{DE}{DP},$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{DE}{\frac{2\sqrt{5}}{3}},$$

$$\therefore DE = \frac{5}{6},$$

$$\therefore CE = CD - DE = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}.$$

故答案为 $\frac{7}{6}$.

三、解答题 (共 5 小题, 满分 44 分)

17. 计算: $-1^{2017} - |1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \tan 60^\circ| + \sqrt{(-2)^2} \times (\frac{1}{2})^{-2+0}.$

【考点】 79: 二次根式的混合运算; 6E: 零指数幂; 6F: 负整数指数幂; T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】 直接利用绝对值的性质以及负指数幂的性质以及零指数幂的性质分别化简求出答案.

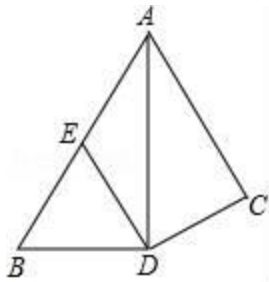
【解答】 解: 原式 $= -1 - |1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3}| + 2 \times 4 + 1$

$$= -1 - 0 + 8 + 1$$

$$= 8.$$

18. 如图, AD 平分 $\angle BAC$, $AD \perp BD$, 垂足为点 D, $DE \parallel AC$.

求证: $\triangle BDE$ 是等腰三角形.



【考点】KI：等腰三角形的判定；JA：平行线的性质.

【分析】直接利用平行线的性质得出 $\angle 1 = \angle 3$ ，进而利用角平分线的定义结合互余的性质得出 $\angle B = \angle BDE$ ，即可得出答案.

【解答】证明： $\because DE \parallel AC$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

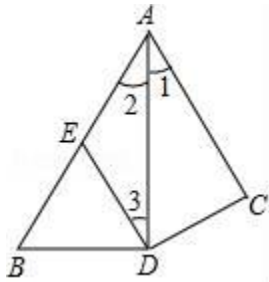
$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$\therefore AD \perp BD$,

$$\therefore \angle 2 + \angle B = 90^\circ, \quad \angle 3 + \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle BDE,$$

$\therefore \triangle BDE$ 是等腰三角形.

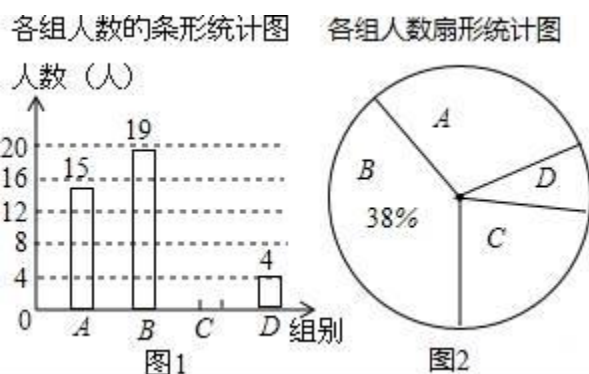


19. 小明随机调查了若干市民租用共享单车的骑车时间 t (单位: 分), 将获得的数据分成四组, 绘制了如下统计图 (A: $0 < t \leq 10$, B: $10 < t \leq 20$, C: $20 < t \leq 30$, D: $t > 30$), 根据图中信息, 解答下列问题:

(1) 这项被调查的总人数是多少人?

(2) 试求表示 A 组的扇形统计图的圆心角的度数, 补全条形统计图;

(3) 如果小明想从 D 组的甲、乙、丙、丁四人中随机选择两人了解平时租用共享单车情况, 请用列表或画树状图的方法求出恰好选中甲的概率.



【考点】X6: 列表法与树状图法；VB: 扇形统计图；VC: 条形统计图.

【分析】(1) 根据B组的人数和所占的百分比，即可求出这次被调查的总人数，从而补全统计图；

(2) 用360乘以A组所占的百分比，求出A组的扇形圆心角的度数，再用总人数减去A、B、D组的人数，求出C组的人数；

(3) 画出树状图，由概率公式即可得出答案.

【解答】解：(1) 调查的总人数是： $19 \div 38\% = 50$ （人）；

(2) A组所占圆心角的度数是： $360^\circ \times \frac{15}{50} = 108^\circ$ ；

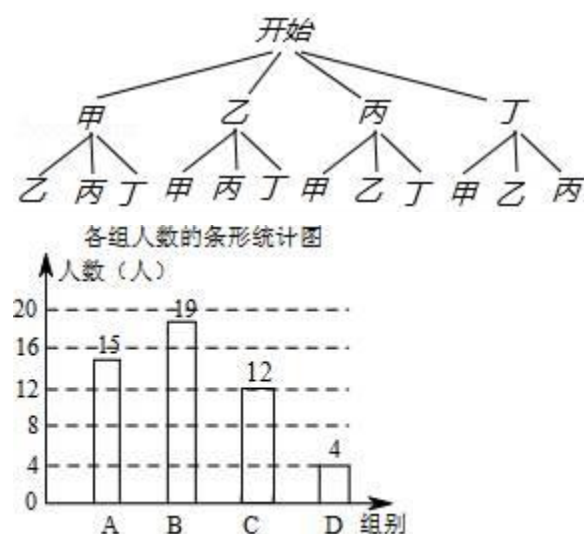
C组的人数有： $50 - 15 - 19 - 4 = 12$ （人），

补全条形图如图所示：

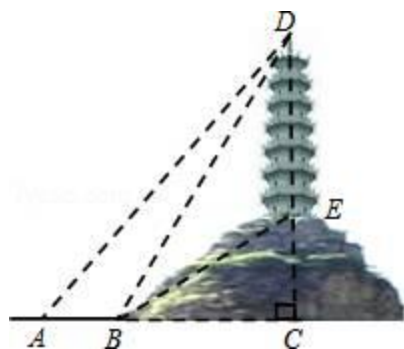
(3) 画树状图，共有12个可能的结果，

恰好选中甲的结果有6个，

$$\therefore P(\text{恰好选中甲}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$



20. 如图，某人为了测量小山顶上的塔 ED 的高，他在山下的点 A 处测得塔尖点 D 的仰角为 45° ，再沿 AC 方向前进 60m 到达山脚点 B，测得塔尖点 D 的仰角为 60° ，塔底点 E 的仰角为 30° ，求塔 ED 的高度。（结果保留根号）



【考点】TA：解直角三角形的应用－仰角俯角问题.

【分析】先求出 $\angle DBE=30^\circ$ ， $\angle BDE=30^\circ$ ，得出 $BE=DE$ ，然后设 $EC=x$ ，则 $BE=2x$ ， $DE=2x$ ， $DC=3x$ ， $BC=\sqrt{3}x$ ，然后根据 $\angle DAC=45^\circ$ ，可得 $AC=CD$ ，列出方程求出 x 的值，然后即可求出塔 DE 的高度.

【解答】解：由题知， $\angle DBC=60^\circ$ ， $\angle EBC=30^\circ$ ，

$$\therefore \angle DBE = \angle DBC - \angle EBC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ - \angle DBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle DBE = \angle BDE.$$

$$\therefore BE = DE.$$

设 $EC=x$ ，则 $DE=BE=2EC=2x$ ， $DC=EC+DE=x+2x=3x$ ，

$$BC = \sqrt{BE^2 - EC^2} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x,$$

由题知， $\angle DAC=45^\circ$ ， $\angle DCA=90^\circ$ ， $AB=20$ ，

$\therefore \triangle ACD$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore AC = DC.$$

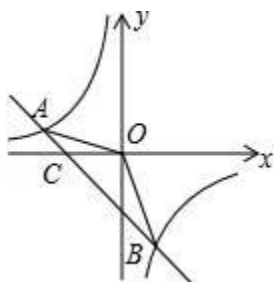
$$\therefore \sqrt{3}x + 60 = 3x,$$

解得： $x = 30 + 10\sqrt{3}$.

答：塔高约为 $30 + 10\sqrt{3}$ m.

21. 已知 A (-4, 2)、B (n, -4) 两点是一次函数 $y=kx+b$ 和反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 图象的两个交点.

- (1) 求一次函数和反比例函数的解析式;
- (2) 求 $\triangle AOB$ 的面积;
- (3) 观察图象, 直接写出不等式 $kx+b-\frac{m}{x}>0$ 的解集.



【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题; FA: 待定系数法求一次函数解析式.

【分析】 (1) 先把点 A 的坐标代入反比例函数解析式, 即可得到 $m=-8$, 再把点 B 的坐标代入反比例函数解析式, 即可求出 $n=2$, 然后利用待定系数法确定一次函数的解析式;

(2) 先求出直线 $y=-x-2$ 与 x 轴交点 C 的坐标, 然后利用 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$ 进行计算;

(3) 观察函数图象得到当 $x<-4$ 或 $0<x<2$ 时, 一次函数的图象在反比例函数图象上方, 据此可得不等式的解集.

【解答】 解: (1) 把 A (-4, 2) 代入 $y=\frac{m}{x}$, 得 $m=2 \times (-4) = -8$,

所以反比例函数解析式为 $y=-\frac{8}{x}$,

把 B (n, -4) 代入 $y=-\frac{8}{x}$, 得 $-4n=-8$,

解得 $n=2$,

把 A (-4, 2) 和 B (2, -4) 代入 $y=kx+b$, 得

$$\begin{cases} -4k+b=2 \\ 2k+b=-4 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k=-1 \\ b=-2 \end{cases}$,

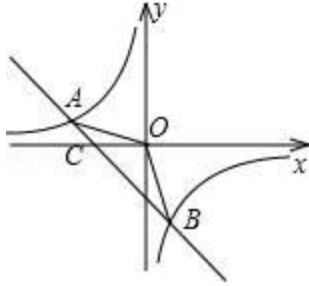
所以一次函数的解析式为 $y=-x-2$;

(2) $y=-x-2$ 中, 令 $y=0$, 则 $x=-2$,

即直线 $y = -x - 2$ 与 x 轴交于点 $C(-2, 0)$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 6;$$

(3) 由图可得, 不等式 $kx + b - \frac{m}{x} > 0$ 的解集为: $x < -4$ 或 $0 < x < 2$.



四、填空题 (共 4 小题, 每小题 6 分, 满分 24 分)

22. 若实数 x 满足 $x^2 - 2x - 1 = 0$, 则 $2x^3 - 7x^2 + 4x - 2017 = \underline{-2020}$.

【考点】59: 因式分解的应用.

【分析】把 $2x^2$ 分解成 x^2 与 x^2 相加, 然后把所求代数式整理成用 $x^2 - x$ 表示的形式, 然后代入数据计算求解即可.

【解答】解: $\because x^2 - 2x - 1 = 0$,

$$\therefore x^2 - 2x = 1,$$

$$2x^3 - 7x^2 + 4x - 2017$$

$$= 2x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 4x - 2017,$$

$$= 2x(x^2 - 2x) - 3x^2 + 4x - 2017,$$

$$= 6x - 3x^2 - 2017,$$

$$= -3(x^2 - 2x) - 2017$$

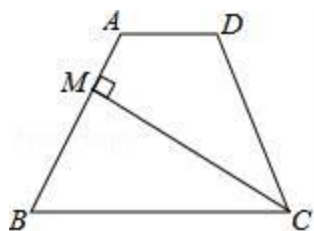
$$= -3 - 2017$$

$$= -2020,$$

故答案为: -2020 .

23. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, CM 是 $\angle BCD$ 的平分线, 且 $CM \perp AB$, M 为垂足,

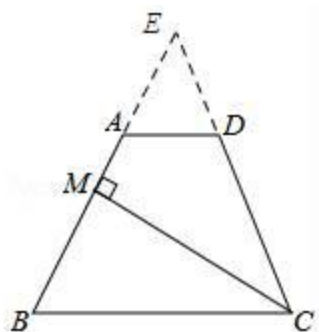
$AM = \frac{1}{3}AB$. 若四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{15}{7}$, 则四边形 $AMCD$ 的面积是 $\underline{1}$.



【考点】S9：相似三角形的判定与性质；KJ：等腰三角形的判定与性质.

【分析】延长 BA、CD，交点为 E. 依据题意可知 MB=ME. 然后证明 $\triangle EAD \sim \triangle EBC$. 依据相似三角形的性质可求得 $\triangle EAD$ 和 $\triangle EBC$ 的面积, 最后依据 $S_{\text{四边形 AMCD}} = \frac{1}{2}S_{\triangle EBC} - S_{\triangle EAD}$ 求解即可.

【解答】解：如图所示：延长 BA、CD，交点为 E.



$\because CM$ 平分 $\angle BCD$, $CM \perp AB$,

$\therefore MB=ME$.

又 $\because AM = \frac{1}{3}AB$,

$\therefore AE = \frac{1}{3}AB$.

$\therefore AE = \frac{1}{4}BE$.

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle EAD \sim \triangle EBC$.

$$\therefore \frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{1}{16}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形 ADBC}} = \frac{15}{16}S_{\triangle EBC} = \frac{15}{7}.$$

$$\therefore S_{\triangle EBC} = \frac{16}{7}.$$

$$\therefore S_{\triangle EAD} = \frac{16}{7} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{7}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形AMCD}} = \frac{1}{2}S_{\triangle EBC} - S_{\triangle EAD} = \frac{8}{7} - \frac{1}{7} = 1.$$

故答案为：1.

24. 设 α 、 β 是方程 $(x+1)(x-4) = -5$ 的两实数根，则 $\frac{\beta^3}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta} = 47$.

【考点】AB：根与系数的关系.

【分析】根据 α 、 β 是方程 $(x+1)(x-4) = -5$ 的两实数根，得到 $\alpha + \beta = 3$ ， $\alpha\beta = 1$ ，根据完全平方公式得到 $\alpha^4 + \beta^4 = 47$ ，于是得到结论.

【解答】解：方程 $(x+1)(x-4) = -5$ 可化为 $x^2 - 3x + 1 = 0$,

$\therefore \alpha$ 、 β 是方程 $(x+1)(x-4) = -5$ 的两实数根，

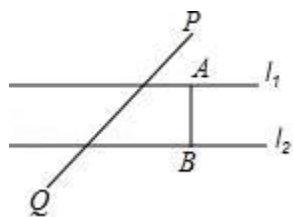
$$\therefore \alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1,$$

$$\therefore (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 7, (\alpha^2 + \beta^2)^2 = \alpha^4 + \beta^4 = 47,$$

$$\therefore \frac{\beta^3}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta} = \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} = 47,$$

故答案为：47.

25. 如图，已知直线 $l_1 \parallel l_2$ ， l_1 、 l_2 之间的距离为 8，点 P 到直线 l_1 的距离为 6，点 Q 到直线 l_2 的距离为 4， $PQ = 4\sqrt{30}$ ，在直线 l_1 上有一动点 A，直线 l_2 上有一动点 B，满足 $AB \perp l_2$ ，且 $PA + AB + BQ$ 最小，此时 $PA + BQ = 4\sqrt{286}$.



【考点】PA：轴对称 - 最短路线问题；JA：平行线的性质.

【分析】作 $PE \perp l_1$ 于 E 交 l_2 于 F，在 PF 上截取 $PC = 8$ ，连接 QC 交 l_2 于 B，作 $BA \perp l_1$ 于 A，此时 $PA + AB + BQ$ 最短. 作 $QD \perp PF$ 于 D. 首先证明四边形 ABCP 是平行四边形， $PA + BQ = CB + BQ = QC$ ，利用勾股定理即可解决问题.

【解答】解：作 $PE \perp l_1$ 于 E 交 l_2 于 F，在 PF 上截取 $PC = 8$ ，连接 QC 交 l_2 于 B，作 $BA \perp l_1$ 于 A，此时 $PA + AB + BQ$ 最短. 作 $QD \perp PF$ 于 D.

在 $Rt\triangle PQD$ 中， $\therefore \angle D = 90^\circ$ ， $PQ = 4\sqrt{30}$ ， $PD = 18$,

$$\therefore DQ = \sqrt{PQ^2 - PD^2} = \sqrt{4476},$$

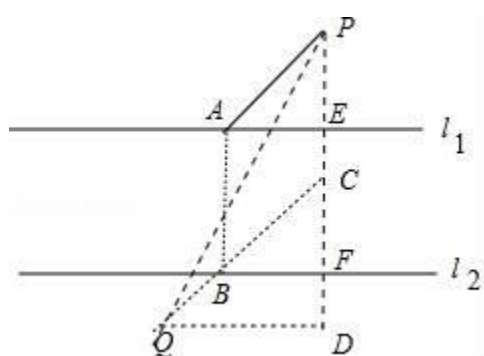
$$\therefore AB = PC = 8, AB \parallel PC,$$

$\therefore$ 四边形 ABCP 是平行四边形,

$$\therefore PA = BC,$$

$$\therefore PA + BQ = CB + BQ = QC = \sqrt{DQ^2 + CD^2} = \sqrt{4576} = 4\sqrt{286}.$$

故答案为 $4\sqrt{286}$



五、解答题 (共 3 小题, 满分 36 分)

26. 观察下列等式:

$$\text{第一个等式: } a_1 = \frac{2}{1+3 \times 2+2 \times 2^2} = \frac{1}{2+1} - \frac{1}{2^2+1}$$

$$\text{第二个等式: } a_2 = \frac{2^2}{1+3 \times 2^2+2 \times (2^2)^2} = \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{2^3+1}$$

$$\text{第三个等式: } a_3 = \frac{2^3}{1+3 \times 2^3+2 \times (2^3)^2} = \frac{1}{2^3+1} - \frac{1}{2^4+1}$$

$$\text{第四个等式: } a_4 = \frac{2^4}{1+3 \times 2^4+2 \times (2^4)^2} = \frac{1}{2^4+1} - \frac{1}{2^5+1}$$

按上述规律, 回答下列问题:

$$(1) \text{ 请写出第六个等式: } a_6 = \frac{2^6}{1+3 \times 2^6+2 \times (2^6)^2} = \frac{1}{2^6+1} - \frac{1}{2^7+1};$$

$$(2) \text{ 用含 } n \text{ 的代数式表示第 } n \text{ 个等式: } a_n = \frac{2^n}{1+3 \times 2^n+2 \times (2^n)^2} = \frac{1}{2^n+1} -$$

$$\frac{1}{2^{n+1}+1};$$

(3) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=\frac{14}{43}$ (得出最简结果) ;

(4) 计算: $a_1+a_2+\cdots+a_n$.

【考点】 37: 规律型: 数字的变化类.

【分析】 (1) 根据已知 4 个等式可得;

(2) 根据已知等式得出答案;

(3) 利用所得等式的规律列出算式, 然后两两相消, 计算化简后的算式即可得;

(4) 根据已知等式规律, 列项相消求解可得.

【解答】 解: (1) 由题意知, $a_6=\frac{2^6}{1+3\times 2^6+2\times (2^6)^2}=\frac{1}{2^6+1}-\frac{1}{2^7+1},$

故答案为: $\frac{2^6}{1+3\times 2^6+2\times (2^6)^2}, \frac{1}{2^6+1}-\frac{1}{2^7+1};$

(2) $a_n=\frac{2^n}{1+3\times 2^n+2\times (2^n)^2}=\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1},$

故答案为: $\frac{2^n}{1+3\times 2^n+2\times (2^n)^2}, \frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1};$

(3) 原式 $=\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{2^3+1}-\frac{1}{2^4+1}+\frac{1}{2^4+1}-\frac{1}{2^5+1}+\frac{1}{2^5+1}-$
 $\frac{1}{2^6+1}+\frac{1}{2^6+1}-\frac{1}{2^7+1}$
 $=\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^7+1}$
 $=\frac{14}{43},$

故答案为: $\frac{14}{43};$

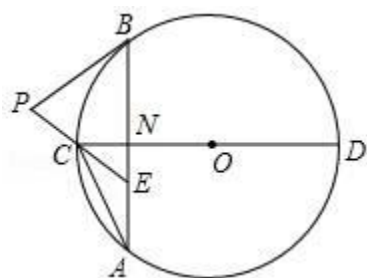
(4) 原式 $=\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$
 $=\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$
 $=\frac{2^{n+1}-2}{3(2^{n+1}+1)}.$

27. 如图，在 $\odot O$ 中，直径 CD 垂直于不过圆心 O 的弦 AB ，垂足为点 N ，连接 AC ，点 E 在 AB 上，且 $AE=CE$

(1) 求证： $AC^2=AE \cdot AB$ ；

(2) 过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 EC 的延长线于点 P ，试判断 PB 与 PE 是否相等，并说明理由；

(3) 设 $\odot O$ 半径为 4，点 N 为 OC 中点，点 Q 在 $\odot O$ 上，求线段 PQ 的最小值.



【考点】MR：圆的综合题.

【分析】(1) 证明 $\triangle AEC \sim \triangle ACB$ ，列比例式可得结论；

(2) 如图 2，证明 $\angle PEB = \angle COB = \angle PBN$ ，根据等角对等边可得： $PB=PE$ ；

(3) 如图 3，先确定线段 PQ 的最小值时 Q 的位置：因为 OQ 为半径，是定值 4，则 $PQ+OQ$ 的值最小时， PQ 最小，当 P 、 Q 、 O 三点共线时， PQ 最小，先求 AE 的长，从而得 PB 的长，最后利用勾股定理求 OP 的长，与半径的差就是 PQ 的最小值.

【解答】证明：(1) 如图 1，连接 BC ，

$\because CD$ 为 $\odot O$ 的直径， $AB \perp CD$ ，

$\therefore \widehat{BC} = \widehat{AC}$ ，

$\therefore \angle A = \angle ABC$ ，

$\because EC = AE$ ，

$\therefore \angle A = \angle ACE$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle ACE$ ，

$\because \angle A = \angle A$ ，

$\therefore \triangle AEC \sim \triangle ACB$ ，

$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ，

$\therefore AC^2 = AE \cdot AB$ ；

(2) $PB=PE$ ，理由是：

如图 2, 连接 OB,

$\because$ PB 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OB \perp PB$,

$\therefore \angle OBP = 90^\circ$,

$\therefore \angle PBN + \angle OBN = 90^\circ$,

$\because \angle OBN + \angle COB = 90^\circ$,

$\therefore \angle PBN = \angle COB$,

$\because \angle PEB = \angle A + \angle ACE = 2\angle A$,

$\angle COB = 2\angle A$,

$\therefore \angle PEB = \angle COB$,

$\therefore \angle PEB = \angle PBN$,

$\therefore PB = PE$;

(3) 如图 3, $\because$ N 为 OC 的中点,

$\therefore ON = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OB$,

Rt $\triangle OBN$ 中, $\angle OBN = 30^\circ$,

$\therefore \angle COB = 60^\circ$,

$\because OC = OB$,

$\therefore \triangle OCB$ 为等边三角形,

$\because$ Q 为 $\odot O$ 任意一点,

连接 PQ、OQ,

因为 OQ 为半径, 是定值 4,

则 PQ+OQ 的值最小时, PQ 最小,

当 P、Q、O 三点共线时, PQ 最小,

$\therefore$ Q 为 OP 与 $\odot O$ 的交点时, PQ 最小,

$\angle A = \frac{1}{2}\angle COB = 30^\circ$,

$\therefore \angle PEB = 2\angle A = 60^\circ$,

$\angle ABP = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \triangle PBE$ 是等边三角形,

Rt△OBN 中, $BN=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

$$\therefore AB=2BN=4\sqrt{3}.$$

设 $AE=x$, 则 $CE=x$, $EN=2\sqrt{3}-x$,

Rt△CNE 中, $x^2=2^2+(2\sqrt{3}-x)^2$,

$$x=\frac{4}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore BE=PB=4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}=\frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

Rt△OPB 中, $OP=\sqrt{PB^2+OB^2}=\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2+4^2}=\frac{4}{3}\sqrt{21}$.

$$\therefore PQ=\frac{4}{3}\sqrt{21}-4=\frac{4\sqrt{21}-12}{3}.$$

则线段 PQ 的最小值是 $\frac{4\sqrt{21}-12}{3}$.

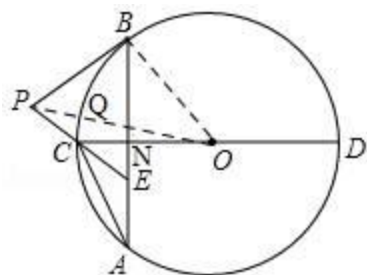


图3

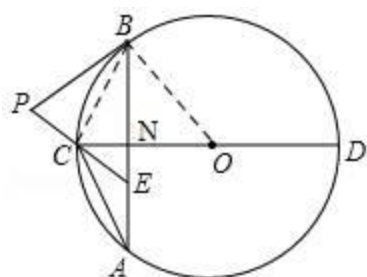


图2

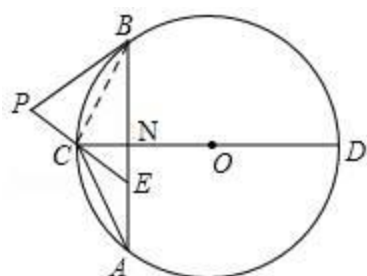


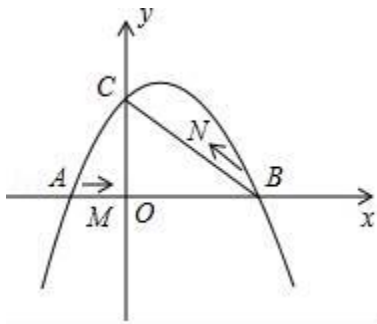
图1

28. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 y 轴交与点 $C(0, 3)$, 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 点 B 坐标为 $(4, 0)$, 抛物线的对称轴方程为 $x=1$.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 M 从 A 点出发，在线段 AB 上以每秒 3 个单位长度的速度向 B 点运动，同时点 N 从 B 点出发，在线段 BC 上以每秒 1 个单位长度的速度向 C 点运动，其中一个点到达终点时，另一个点也停止运动，设 $\triangle MBN$ 的面积为 S，点 M 运动时间为 t，试求 S 与 t 的函数关系，并求 S 的最大值；

(3) 在点 M 运动过程中，是否存在某一时刻 t，使 $\triangle MBN$ 为直角三角形？若存在，求出 t 值；若不存在，请说明理由。



【考点】HF：二次函数综合题.

【分析】(1) 把点 A、B、C 的坐标分别代入抛物线解析式，列出关于系数 a、b、c 的解析式，通过解方程组求得它们的值；

(2) 设运动时间为 t 秒. 利用三角形的面积公式列出 $S_{\triangle MBN}$ 与 t 的函数关系式 $S_{\triangle MBN} = -\frac{9}{10}(t-1)^2 + \frac{9}{10}$ ，利用二次函数的图象性质进行解答；

(3) 根据余弦函数，可得关于 t 的方程，解方程，可得答案.

【解答】解：(1) $\because$ 点 B 坐标为 (4, 0)，抛物线的对称轴方程为 $x=1$.

$\therefore A(-2, 0)$,

把点 A(-2, 0)、B(4, 0)、点 C(0, 3)，分别代入 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)，得

$$\begin{cases} 4a-2b+3=0 \\ 16a+4b+3=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=-\frac{3}{8} \\ b=\frac{3}{4} \\ c=3 \end{cases}$,

所以该抛物线的解析式为： $y=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x+3$ ；

(2) 设运动时间为 t 秒，则 $AM=3t$ ， $BN=t$.

$$\therefore MB=6-3t.$$

由题意得，点C的坐标为(0, 3)。

$$\text{在 Rt}\triangle BOC \text{ 中, } BC=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

如图1, 过点N作NH⊥AB于点H.

$$\therefore NH\parallel CO,$$

$$\therefore \triangle BHN \sim \triangle BOC,$$

$$\therefore \frac{HN}{OC} = \frac{BN}{BC}, \text{ 即 } \frac{HN}{3} = \frac{t}{5},$$

$$\therefore HN = \frac{3}{5}t.$$

$$\therefore S_{\triangle MBN} = \frac{1}{2}MB \cdot HN = \frac{1}{2}(6-3t) \cdot \frac{3}{5}t = -\frac{9}{10}t^2 + \frac{9}{5}t = -\frac{9}{10}(t-1)^2 + \frac{9}{10},$$

当△PBQ存在时, 0<t<2,

$\therefore$ 当t=1时,

$$S_{\triangle PBQ \text{ 最大}} = \frac{9}{10}.$$

答: 运动1秒使△PBQ的面积最大, 最大面积是 $\frac{9}{10}$;

(3) 如图2,

$$\text{在 Rt}\triangle OBC \text{ 中, } \cos \angle B = \frac{OB}{BC} = \frac{4}{5}.$$

设运动时间为t秒, 则AM=3t, BN=t.

$$\therefore MB=6-3t.$$

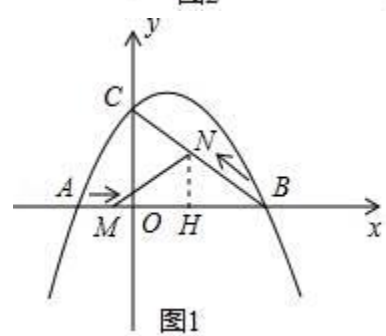
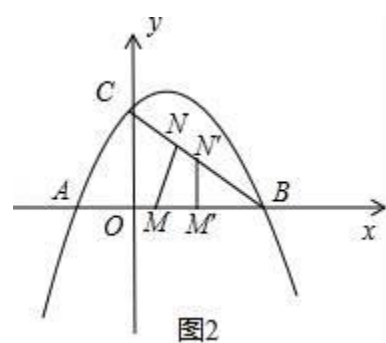
$$\text{当 } \angle MNB=90^\circ \text{ 时, } \cos \angle B = \frac{BN}{MB} = \frac{4}{5}, \text{ 即 } \frac{t}{6-3t} = \frac{4}{5},$$

$$\text{化简, 得 } 17t=24, \text{ 解得 } t=\frac{24}{17},$$

$$\text{当 } \angle BMN=90^\circ \text{ 时, } \cos \angle B = \frac{6-3t}{t} = \frac{4}{5},$$

$$\text{化简, 得 } 19t=30, \text{ 解得 } t=\frac{30}{19},$$

综上所述: $t=\frac{24}{17}$ 或 $t=\frac{30}{19}$ 时, △MBN为直角三角形.



2017 年 7 月 9 日