

四川省内江市 2015 年中考数学试卷

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. (3 分) (2015•内江) 9 的算术平方根是 ()

- A -3 B ± 3 C 3 D $\sqrt{3}$

考点: 算术平方根.

分析: 算术平方根的概念: 一般地, 如果一个正数 x 的平方等于 a , 即 $x^2=a$, 那么这个正数 x 叫做 a 的算术平方根 $\sqrt{a}$. 依此即可求解.

解答: 解: 9 的算术平方根是 3.

故选: C.

点评: 此题主要考查了算术平方根的定义, 算术平方根的概念易与平方根的概念混淆而导致错误.

2. (3 分) (2015•内江) 用科学记数法表示 0.0000061, 结果是 ()

- A 6.1×10^{-5} B 6.1×10^{-6} C 0.61×10^{-5} D 61×10^{-7}

考点: 科学记数法—表示较小的数.

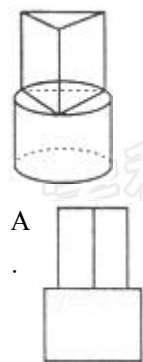
分析: 绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂, 指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

解答: 解: 用科学记数法表示 0.0000061, 结果是 6.1×10^{-6} .

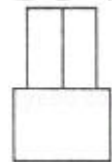
故选: B.

点评: 本题考查用科学记数法表示较小的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

3. (3 分) (2015•内江) 如图, 几何体上半部为正三棱柱, 下半部为圆柱, 其俯视图是 ()



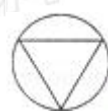
A



B



C



D



考点: 简单组合体的三视图.

分析: 找到从上面看所得到的图形即可, 注意所有的看到的棱都应表现在俯视图中.

解答:



解: 从上面看得俯视图为

故选 C.

点评: 本题考查了三视图的知识, 俯视图是从物体的上面看得到的视图.

4. (3 分) (2015•内江) 有一组数据如下: 3, a, 4, 6, 7, 它们的平均数是 5, 那么这组数据的方差是 ()

A 10

B $\sqrt{10}$

C $\sqrt{2}$

D 2

考点: 方差; 算术平均数.

分析: 首先根据算术平均数的概念求出 a 的值, 然后把数据代入方差公式求出数值.

解答: 解: $\because 3, a, 4, 6, 7$, 它们的平均数是 5,

$$\therefore \frac{3+a+4+6+7}{5}=5,$$

$$\therefore a=5,$$

$$\therefore s^2 = \frac{1}{5}[(5-3)^2 + (5-5)^2 + (5-4)^2 + (5-6)^2 + (5-7)^2] = 2.$$

故选 D.

点评: 本题主要考查了方差以及算术平均数的知识, 解答本题的关键是根据算术平均数的概念求出 a 的值, 此题难度不大.

5. (3 分) (2015•内江) 函数 $y = \sqrt{2-x} + \frac{1}{x-1}$ 中自变量 x 的取值范围是 ()

A $x \leq 2$

B $x \leq 2$ 且 $x \neq 1$

C $x < 2$ 且 $x \neq 1$

D $x \neq 1$

考点: 函数自变量的取值范围.

分析: 根据二次根式的性质和分式的意义, 被开方数大于等于 0, 分母不等于 0, 就可以求解.

解答: 解: 根据二次根式有意义, 分式有意义得: $2-x \geq 0$ 且 $x-1 \neq 0$,

$$\text{解得: } x \leq 2 \text{ 且 } x \neq 1.$$

故选: B.

点评: 本题考查函数自变量的取值范围, 涉及的知识点为: 分式有意义, 分母不为 0; 二次根式的被开方数是非负数.

6. (3 分) (2015•内江) 某十字路口的交通信号灯每分钟红灯亮 30 秒, 绿灯亮 25 秒, 黄灯亮 5 秒, 当你抬头看信号灯时, 是黄灯的概率为 ()

A $\frac{1}{12}$

B $\frac{5}{12}$

C $\frac{1}{6}$

D $\frac{1}{2}$

考点: 概率公式.

分析: 随机事件 A 的概率 $P(A) = \text{事件 A 可能出现的结果数} \div \text{所有可能出现的结果数}$, 据此

用黄灯亮的时间除以三种灯亮的总时间, 求出抬头看信号灯时, 是黄灯的概率为多少即可.

解答: 解: 抬头看信号灯时, 是黄灯的概率为:

$$5 \div (30+25+5)$$

$$=5 \div 60$$

$$=\frac{1}{12}$$

故选: A.

点评: 此题主要考查了概率公式的应用, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: (1) 随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 A 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$. (2) $P(\text{必然事件}) = 1$. (3) $P(\text{不可能事件}) = 0$.

7. (3 分) (2015•内江) 下列运算中, 正确的是 ()

A $a^2 + a^3 = a^5$

B $a^3 \cdot a^4 = a^{12}$

C $a^6 \div a^3 = a^2$

D $4a - a = 3a$

考点: 同底数幂的除法; 合并同类项; 同底数幂的乘法.

分析: 根据同类项的定义及合并同类项法则; 同底数幂相乘, 底数不变指数相加; 同底数幂相除, 底数不变指数相减, 对各选项分析判断后利用排除法求解.

解答: 解: A、 a^2 与 a^3 不是同类项, 不能合并, 故本选项错误;

B、应为 $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$, 故本选项错误;

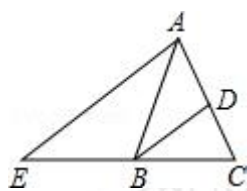
C、应为 $a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$, 故本选项错误;

D、 $4a - a = (4 - 1)a = 3a$, 正确.

故选 D.

点评: 本题主要考查了合并同类项及同底数幂的乘法、除法, 熟练掌握运算性质和法则是解题的关键.

8. (3 分) (2015•内江) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D , $AE \parallel BD$ 交 CB 的延长线于点 E . 若 $\angle E = 35^\circ$, 则 $\angle BAC$ 的度数为 ()



A 40°

B 45°

C 60°

D 70°

考点: 等腰三角形的性质; 平行线的性质.

分析: 根据平行线的性质可得 $\angle CBD$ 的度数, 根据角平分线的性质可得 $\angle CBA$ 的度数, 根据等腰三角形的性质可得 $\angle C$ 的度数, 根据三角形内角和定理可得 $\angle BAC$ 的度数.

解答: 解: $\because AE \parallel BD$,

$$\therefore \angle CBD = \angle E = 35^\circ,$$

$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle CBA = 70^\circ,$$

$$\begin{aligned}\therefore AB &= AC, \\ \therefore \angle C &= \angle CBA = 70^\circ, \\ \therefore \angle BAC &= 180^\circ - 70^\circ \times 2 = 40^\circ.\end{aligned}$$

故选: A.

点评: 考查了平行线的性质, 角平分线的性质, 等腰三角形的性质和三角形内角和定理. 关键是得到 $\angle C = \angle CBA = 70^\circ$.

9. (3 分) (2015•内江) 植树节这天有 20 名同学共种了 52 棵树苗, 其中男生每人种树 3 棵, 女生每人种树 2 棵. 设男生有 x 人, 女生有 y 人, 根据题意, 下列方程组正确的是 ()

$$\begin{aligned}A \begin{cases} x+y=52 \\ 3x+2y=20 \end{cases} & B \begin{cases} x+y=52 \\ 2x+3y=20 \end{cases} \\ C \begin{cases} x+y=20 \\ 2x+3y=52 \end{cases} & D \begin{cases} x+y=20 \\ 3x+2y=52 \end{cases}\end{aligned}$$

考点: 由实际问题抽象出二元一次方程组.

分析: 设男生有 x 人, 女生有 y 人, 根据男女生人数为 20, 共种了 52 棵树苗, 列出方程组成方程组即可.

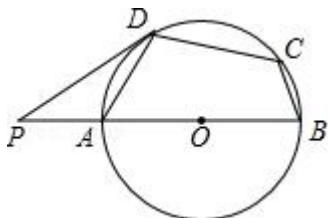
解答: 解: 设男生有 x 人, 女生有 y 人,

$$\text{根据题意可得: } \begin{cases} x+y=20 \\ 3x+2y=52 \end{cases},$$

故选 D.

点评: 此题考查二元一次方程组的实际运用, 找出题目蕴含的数量关系是解决问题的关键.

10. (3 分) (2015•内江) 如图, 在 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 中, AB 是直径, $\angle BCD = 120^\circ$, 过 D 点的切线 PD 与直线 AB 交于点 P , 则 $\angle ADP$ 的度数为 ()



- A 40° B 35° C 30° D 45°

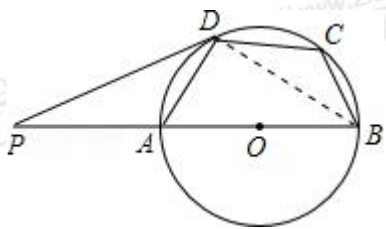
考点: 切线的性质.

分析: 连接 DB , 即 $\angle ADB = 90^\circ$, 又 $\angle BCD = 120^\circ$, 故 $\angle DAB = 60^\circ$, 所以 $\angle DBA = 30^\circ$; 又因为 PD 为切线, 利用切线与圆的关系即可得出结果.

解答: 解: 连接 BD ,

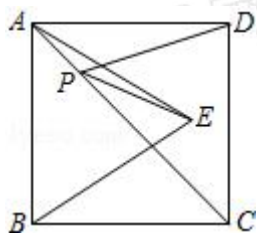
$$\begin{aligned}\therefore \angle DAB &= 180^\circ - \angle C = 60^\circ, \\ \therefore AB &\text{ 是直径,} \\ \therefore \angle ADB &= 90^\circ, \\ \therefore \angle ABD &= 90^\circ - \angle DAB = 30^\circ, \\ \therefore PD &\text{ 是切线,} \\ \therefore \angle ADP &= \angle ABD = 30^\circ,\end{aligned}$$

故选: C.



点评: 本题考查了圆内接四边形的性质, 直径对圆周角等于直角, 弦切角定理, 弦切角等于它所夹的弧对的圆周角求解.

11. (3 分) (2015•内江) 如图, 正方形 ABCD 的面积为 12, $\triangle ABE$ 是等边三角形, 点 E 在正方形 ABCD 内, 在对角线 AC 上有一点 P, 使 PD+PE 最小, 则这个最小值为 ()



- A $\sqrt{3}$ B $2\sqrt{3}$ C $2\sqrt{6}$ D $\sqrt{6}$

考点: 轴对称-最短路线问题; 正方形的性质.

分析: 由于点 B 与 D 关于 AC 对称, 所以 BE 与 AC 的交点即为 P 点. 此时 PD+PE=BE 最小, 而 BE 是等边 $\triangle ABE$ 的边, $BE=AB$, 由正方形 ABCD 的面积为 12, 可求出 AB 的长, 从而得出结果.

解答: 解: 由题意, 可得 BE 与 AC 交于点 P.

$\because$ 点 B 与 D 关于 AC 对称,

$\therefore PD=PB$,

$\therefore PD+PE=PB+PE=BE$ 最小.

$\because$ 正方形 ABCD 的面积为 12,

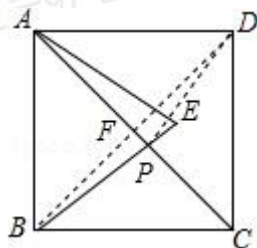
$\therefore AB=2\sqrt{3}$.

又 $\because \triangle ABE$ 是等边三角形,

$\therefore BE=AB=2\sqrt{3}$.

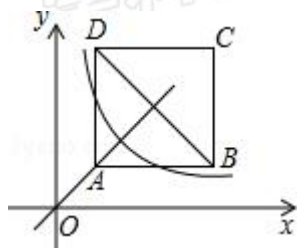
故所求最小值为 $2\sqrt{3}$.

故选 B.



点评: 此题考查了轴对称--最短路线问题, 正方形的性质, 等边三角形的性质, 找到点 P 的位置是解决问题的关键.

12. (3分) (2015•内江) 如图, 正方形 ABCD 位于第一象限, 边长为 3, 点 A 在直线 $y=x$ 上, 点 A 的横坐标为 1, 正方形 ABCD 的边分别平行于 x 轴、y 轴. 若双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 与正方形 ABCD 有公共点, 则 k 的取值范围为 ()



A $1 < k < 9$

B $2 \leq k \leq 34$

C $1 \leq k \leq 16$

D $4 \leq k < 16$

考点: 反比例函数与一次函数的交点问题.

分析: 先根据题意求出 A 点的坐标, 再根据 $AB=BC=3$, AB、BC 分别平行于 x 轴、y 轴求

出 B、C 两点的坐标, 再根据双曲线 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 分别经过 A、C 两点时 k 的取值范围即可.

解答: 解: 点 A 在直线 $y=x$ 上, 其中 A 点的横坐标为 1, 则把 $x=1$ 代入 $y=x$ 解得 $y=1$, 则 A 的坐标是 (1, 1),

$\therefore AB=BC=3$,

$\therefore$ C 点的坐标是 (4, 4),

$\therefore$ 当双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 经过点 (1, 1) 时, $k=1$;

当双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 经过点 (4, 4) 时, $k=16$,

因而 $1 \leq k \leq 16$.

故选: C.

点评: 本题主要考查了反比例函数, 用待定系数法求一次函数的解析式, 解此题的关键是理解题意进而求出 k 的值.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. (5分) (2015•内江) 分解因式: $2x^2y - 8y = \underline{2y(x+2)(x-2)}$.

考点: 提公因式法与公式法的综合运用.

专题: 常规题型.

分析: 先提取公因式 2y, 再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

解答: 解: $2x^2y - 8y$,

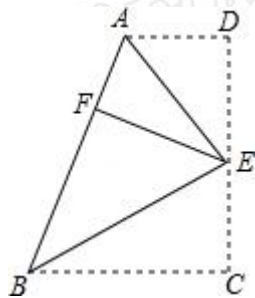
$=2y(x^2 - 4)$,

$=2y(x+2)(x-2)$.

故答案为: $2y(x+2)(x-2)$.

点评: 本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解, 一个多项式有公因式首先提取公因式, 然后再用其他方法进行因式分解, 同时因式分解要彻底, 直到不能分解为止.

14. (5分) (2015•内江) 如图, 在四边形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $\angle C=90^\circ$, E 为 CD 上一点, 分别以 EA, EB 为折痕将两个角 ($\angle D$, $\angle C$) 向内折叠, 点 C, D 恰好落在 AB 边的点 F 处. 若 $AD=2$, $BC=3$, 则 EF 的长为 $\sqrt{6}$.



考点: 翻折变换 (折叠问题).

分析: 先根据折叠的性质得 $DE=EF$, $CE=EF$, $AF=AD=2$, $BF=CB=3$, 则 $DC=2EF$, $AB=5$, 再作 $AH \perp BC$ 于 H, 由于 $AD \parallel BC$, $\angle B=90^\circ$, 则可判断四边形 ADCH 为矩形, 所以 $AH=DC=2EF$, $HB=BC-CH=BC-AD=1$, 然后在 $Rt\triangle ABH$ 中, 利用勾股定理计算出 $AH=2\sqrt{6}$, 所以 $EF=\sqrt{6}$.

解答: 解: 分别以 AE, BE 为折痕将两个角 ($\angle D$, $\angle C$) 向内折叠, 点 C, D 恰好落在 AB 边的点 F 处,

$$\therefore DE=EF, CE=EF, AF=AD=2, BF=CB=3,$$

$$\therefore DC=2EF, AB=5,$$

作 $AH \perp BC$ 于 H,

$$\because AD \parallel BC, \angle B=90^\circ,$$

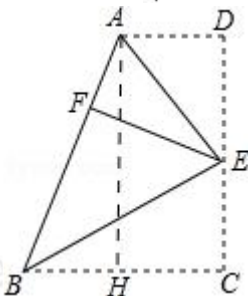
$\therefore$ 四边形 ADCH 为矩形,

$$\therefore AH=DC=2EF, HB=BC-CH=BC-AD=1,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABH \text{ 中, } AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=2\sqrt{6},$$

$$\therefore EF=\sqrt{6}.$$

故答案为: $\sqrt{6}$.



点评: 本题考查了折叠的性质: 折叠是一种对称变换, 它属于轴对称, 折叠前后图形的形状和大小不变, 位置变化, 对应边和对应角相等. 也考查了勾股定理.

15. (5分) (2015•内江) 已知关于 x 的方程 $x^2-6x+k=0$ 的两根分别是 x_1, x_2 , 且满足 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$, 则 k 的值是 2 .

考点: 根与系数的关系.

分析: 找出一元二次方程的系数 a, b 及 c 的值, 利用根与系数的关系求出两根之和与两根

之积, 然后利用完全平方公式变形后, 将求出的两根之和与两根之积代入, 即可求出所求式子的值.

解答: 解: $\because 3x^2+2x-11=0$ 的两个解分别为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1+x_2=6, x_1x_2=k,$$

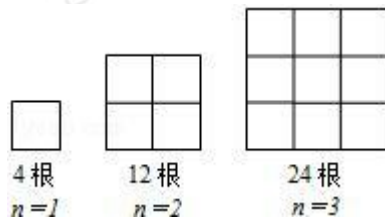
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{6}{k} = 3,$$

解得: $k=2$,

故答案为: 2.

点评: 此题考查了一元二次方程根与系数的关系, 对所求的代数式进行正确的变形是解决本题的关键.

16. (5分) (2015•内江) 如图是由火柴棒搭成的几何图案, 则第 n 个图案中有 $2n(n+1)$ 根火柴棒. (用含 n 的代数式表示)



考点: 规律型: 图形的变化类.

专题: 压轴题.

分析: 本题可分别写出 $n=1, 2, 3, \dots$, 所对应的火柴棒的根数, 然后进行归纳即可得出最终答案.

解答: 解: 依题意得: $n=1$, 根数为: $4=2 \times 1 \times (1+1)$;

$n=2$, 根数为: $12=2 \times 2 \times (2+1)$;

$n=3$, 根数为: $24=2 \times 3 \times (3+1)$;

...

$n=n$ 时, 根数为: $2n(n+1)$.

点评: 本题是一道找规律的题目, 这类题型在中考中经常出现. 对于找规律的题目首先应找出哪些部分发生了变化, 是按照什么规律变化的.

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 44 分, 解答应写出必要的文字说明或推算步骤)

17. (7分) (2015•内江) 计算: $|-2| - (\pi - 2015)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 2\sin 60^\circ + \sqrt{12}$.

考点: 实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂; 特殊角的三角函数值.

分析: 本题涉及绝对值、零指数幂、负整数指数幂、特殊角的三角函数值、二次根式化简四个考点. 针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果.

解答: 解: $|-2| - (\pi - 2015)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 2\sin 60^\circ + \sqrt{12}$

$$= 2 - 1 + 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

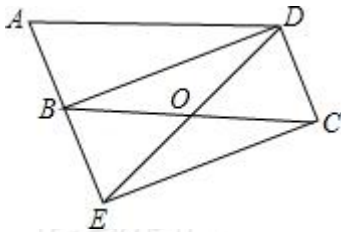
$$= 3 + \sqrt{3}.$$

点评: 本题考查实数的综合运算能力, 是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值, 熟练掌握绝对值、零指数幂、负整数指数幂、二次根式化简等考点的运算.

18. (9分) (2015•内江) 如图, 将 $\square ABCD$ 的边 AB 延长至点 E , 使 $AB=BE$, 连接 DE , EC , DE 交 BC 于点 O .

(1) 求证: $\triangle ABD \cong \triangle BEC$;

(2) 连接 BD , 若 $\angle BOD = 2\angle A$, 求证: 四边形 $BECD$ 是矩形.



考点: 矩形的判定; 全等三角形的判定与性质; 平行四边形的性质.

专题: 证明题.

分析: (1) 根据平行四边形的判定与性质得到四边形 $BECD$ 为平行四边形, 然后由 SSS 推出两三角形全等即可;

(2) 欲证明四边形 $BECD$ 是矩形, 只需推知 $BC=ED$.

解答: 证明: (1) 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=BC$, $AB=CD$, $AB \parallel CD$, 则 $BE \parallel CD$.

又 $\because AB=BE$,

$\therefore BE=DC$,

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 为平行四边形,

$\therefore BD=EC$.

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BEC$ 中,

$$\begin{cases} AB=BE \\ BD=EC, \\ AD=BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BEC$ (SSS);

(2) 由(1)知, 四边形 $BECD$ 为平行四边形, 则 $OD=OE$, $OC=OB$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore \angle A = \angle BCD$, 即 $\angle A = \angle OCD$.

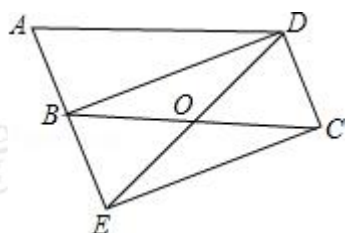
又 $\because \angle BOD = 2\angle A$, $\angle BOD = \angle OCD + \angle ODC$,

$\therefore \angle OCD = \angle ODC$,

$\therefore OC=OD$,

$\therefore OC+OB=OD+OE$, 即 $BC=ED$,

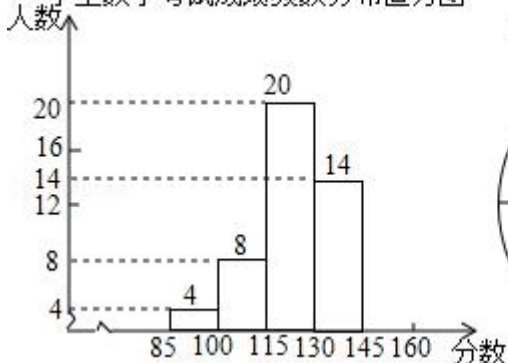
$\therefore$ 平行四边形 $BECD$ 为矩形.



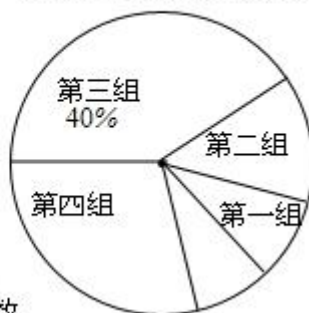
点评: 本题考查了平行四边形的性质和判定, 矩形的判定, 平行线的性质, 全等三角形的性质和判定, 三角形的外角性质等知识点的综合运用, 难度较大.

19. (9分) (2015•内江) 为了掌握我市中考模拟数学试题的命题质量与难度系数, 命题教师赴我市某地选取一个水平相当的初三年级进行调研, 命题教师将随机抽取的部分学生成绩 (得分为整数, 满分为 160 分) 分为 5 组: 第一组 85~100; 第二组 100~115; 第三组 115~130; 第四组 130~145; 第五组 145~160, 统计后得到如图所示的频数分布直方图 (每组含最小值不含最大值) 和扇形统计图, 观察图形的信息, 回答下列问题:

学生数学考试成绩频数分布直方图



各组学生人数所占百分比



- (1) 本次调查共随机抽取了该年级多少名学生? 并将频数分布直方图补充完整;
- (2) 若将得分转化为等级, 规定: 得分低于 100 分评为“D”, 100~130 分评为“C”, 130~145 分评为“B”, 145~160 分评为“A”, 那么该年级 1500 名考生中, 考试成绩评为“B”的学生大约有多少名?
- (3) 如果第一组只有一名是女生, 第五组只有一名是男生, 针对考试成绩情况, 命题教师决定从第一组、第五组分别随机选出一名同学谈谈做题的感想, 请你用列表或画树状图的方法求出所选两名学生刚好是一名女生和一名男生的概率.

考点: 列表法与树状图法; 用样本估计总体; 频数 (率) 分布直方图; 扇形统计图.

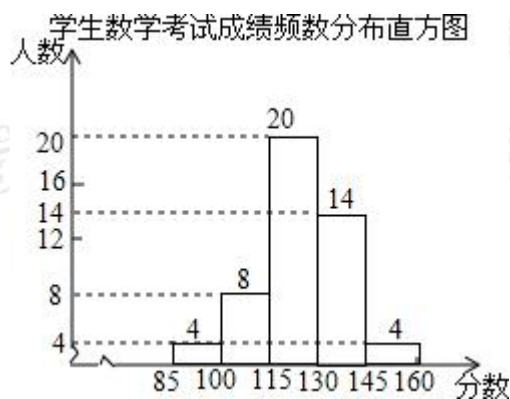
分析: (1) 首先根据题意得: 本次调查共随机抽取了该年级学生数为: $20 \div 40\% = 50$ (名); 则可求得第五组人数为: $50 - 4 - 8 - 20 - 14 = 4$ (名); 即可补全统计图;

(2) 由题意可求得: 考试成绩评为“B”的学生大约有: $\frac{14}{50} \times 1500 = 420$ (名);

(3) 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与所选两名学生刚好是一名女生和一名男生的情况, 再利用概率公式求解即可求得答案.

解答: 解: (1) 根据题意得: 本次调查共随机抽取了该年级学生数为: $20 \div 40\% = 50$ (名); 则第五组人数为: $50 - 4 - 8 - 20 - 14 = 4$ (名);

如图:



(2) 根据题意得: 考试成绩评为“B”的学生大约有: $\frac{14}{50} \times 1500 = 420$ (名);

(3) 画树状图得:

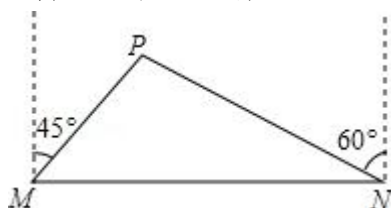


∴ 共有 16 种等可能的结果, 所选两名学生刚好是一名女生和一名男生的有 10 种情况,

∴ 所选两名学生刚好是一名女生和一名男生的概率为: $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

点评: 此题考查了树状图法与列表法求概率的知识以及直方图与扇形统计图的知识. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

20. (9 分) (2015•内江) 我市准备在相距 2 千米的 M, N 两工厂间修一条笔直的公路, 但在 M 地北偏东 45° 方向、N 地北偏西 60° 方向的 P 处, 有一个半径为 0.6 千米的住宅小区 (如图), 问修筑公路时, 这个小区是否有居民需要搬迁? (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



考点: 解直角三角形的应用-方向角问题.

分析: 根据题意, 在 $\triangle MNP$ 中, $\angle MNP = 30^\circ$, $\angle PMN = 45^\circ$, $MN = 2$ 千米, 是否搬迁看 P 点到 MN 的距离与 0.6 的大小关系, 若距离大于 0.6 千米则不需搬迁, 反之则需搬迁, 因此求 P 点到 MN 的距离, 作 $PD \perp MN$ 于 D 点.

解答: 解: 过点 P 作 $PD \perp MN$ 于 D

$$\therefore MD = PD \cdot \cot 45^\circ = PD,$$

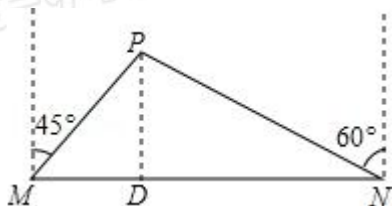
$$ND = PD \cdot \cot 30^\circ = \sqrt{3}PD,$$

$$\therefore MD + ND = MN = 2,$$

即 $\sqrt{3}PD + PD = 2$,

$$\therefore PD = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1 \approx 1.73 - 1 = 0.73 > 0.6.$$

答: 修的公路不会穿越住宅小区, 故该小区居民不需搬迁.



点评: 考查了解直角三角形的应用-方向角问题, “化斜为直”是解三角形的基本思路, 常需作垂线(高), 原则上不破坏特殊角(30° 、 45° 、 60°).

21. (10分) (2015·内江) 某家电销售商城电冰箱的销售价为每台 2100 元, 空调的销售价为每台 1750 元, 每台电冰箱的进价比每台空调的进价多 400 元, 商城用 80000 元购进电冰箱的数量与用 64000 元购进空调的数量相等.

(1) 求每台电冰箱与空调的进价分别是多少?

(2) 现在商城准备一次购进这两种家电共 100 台, 设购进电冰箱 x 台, 这 100 台家电的销售总利润为 y 元, 要求购进空调数量不超过电冰箱数量的 2 倍, 总利润不低于 13000 元, 请分析合理的方案共有多少种? 并确定获利最大的方案以及最大利润;

(3) 实际进货时, 厂家对电冰箱出厂价下调 k ($0 < k < 100$) 元, 若商店保持这两种家电的售价不变, 请你根据以上信息及 (2) 问中条件, 设计出使这 100 台家电销售总利润最大的进货方案.

考点: 一次函数的应用; 分式方程的应用; 一元一次不等式组的应用.

分析: (1) 设每台空调的进价为 x 元, 则每台电冰箱的进价为 $(x+400)$ 元, 根据“商城用 80000 元购进电冰箱的数量与用 64000 元购进空调的数量相等”, 列出方程, 即可解答;

(2) 设购进电冰箱 x 台, 这 100 台家电的销售总利润为 y 元, 则 $y = (2100 - 2000)x + (1750 - 1600)(100 - x) = -50x + 15000$, 根据题意得:

$$\begin{cases} 100 - x \leq 2x \\ -50x + 15000 \geq 13000 \end{cases}$$

得到 $33\frac{1}{3} \leq x \leq 40$, 根据 x 为正整数, 所以 $x = 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40$, 即合理的方案共有 7 种, 利用一次函数的性质, 确定获利最大的方案以及最大利润;

(3) 当电冰箱出厂价下调 k ($0 < k < 100$) 元时, 则利润 $y = (k - 50)x + 15000$, 分两种情况讨论: 当 $k - 50 > 0$; 当 $k - 50 < 0$; 利用一次函数的性质, 即可解答.

解答: 解: (1) 设每台空调的进价为 x 元, 则每台电冰箱的进价为 $(x+400)$ 元,

$$\text{根据题意得: } \frac{80000}{x+400} = \frac{64000}{x},$$

解得: $x = 1600$,

经检验, $x = 1600$ 是原方程的解,

$$x + 400 = 1600 + 400 = 2000,$$

答: 每台空调的进价为 1600 元, 则每台电冰箱的进价为 2000 元.

(2) 设购进电冰箱 x 台, 这 100 台家电的销售总利润为 y 元,

$$\text{则 } y = (2100 - 2000)x + (1750 - 1600)(100 - x) = -50x + 15000,$$

根据题意得:
$$\begin{cases} 100 - x \leq 2x \\ -50x + 15000 \leq 13000 \end{cases}$$

解得: $33\frac{1}{3} \leq x \leq 40$,

$\therefore x$ 为正整数,

$\therefore x=34, 35, 36, 37, 38, 39, 40$,

$\therefore$ 合理的方案共有 7 种,

即①电冰箱 34 台, 空调 66 台; ②电冰箱 35 台, 空调 65 台; ③电冰箱 36 台, 空调 64 台; ④电冰箱 37 台, 空调 63 台; ⑤电冰箱 38 台, 空调 62 台; ⑥电冰箱 39 台, 空调 61 台; ⑦电冰箱 40 台, 空调 60 台;

$\therefore y = -50x + 15000$, $k = -50 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x=34$ 时, y 有最大值, 最大值为: $-50 \times 34 + 15000 = 13300$ (元),

答: 当购进电冰箱 34 台, 空调 66 台获利最大, 最大利润为 13300 元.

(3) 当厂家对电冰箱出厂价下调 k ($0 < k < 100$) 元, 若商店保持这两种家电的售价不变,

则利润 $y = (2100 - 2000 + k)x + (1750 - 1600)(100 - x) = (k - 50)x + 15000$,

当 $k - 50 > 0$, 即 $50 < k < 100$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore 33\frac{1}{3} \leq x \leq 40$,

$\therefore$ 当 $x=40$ 时, 这 100 台家电销售总利润最大, 即购进电冰箱 40 台, 空调 60 台;

当 $k - 50 < 0$, 即 $0 < k < 50$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore 33\frac{1}{3} \leq x \leq 40$,

$\therefore$ 当 $x=34$ 时, 这 100 台家电销售总利润最大, 即购进电冰箱 34 台, 空调 66 台;

答: 当 $50 < k < 100$ 时, 购进电冰箱 40 台, 空调 60 台销售总利润最大;

当 $0 < k < 50$ 时, 购进电冰箱 34 台, 空调 66 台销售总利润最大.

点评: 本题考查了列分式方程解实际问题的运用, 一次函数的解析式的性质的运用, 解答时根据总利润=冰箱的利润+空调的利润建立解析式是关键.

四、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分)

22. (6 分) (2015•内江) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=30^\circ$, $AB=12$, $AC=6$, 则 $BC=6\sqrt{3}$.

考点: 含 30° 度角的直角三角形; 勾股定理.

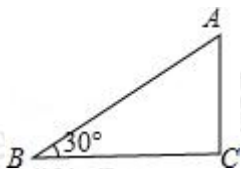
分析: 由 $\angle B=30^\circ$, $AB=12$, $AC=6$, 利用 30° 所对的直角边等于斜边的一半易得 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 利用勾股定理求出 BC 的长.

解答: 解: $\because \angle B=30^\circ$, $AB=12$, $AC=6$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

故答案为: $6\sqrt{3}$.



点评: 此题考查了含 30° 直角三角形的性质, 以及勾股定理, 熟练掌握性质及定理是解本题的关键.

23. (6分) (2015•内江) 在平面直角坐标系 xOy 中, 过点 $P(0, 2)$ 作直线 $l: y = \frac{1}{2}x + b$ (b 为常数且 $b < 2$) 的垂线, 垂足为点 Q , 则 $\tan \angle OPQ = \frac{1}{2}$.

考点: 一次函数图象上点的坐标特征; 解直角三角形.

分析: 设直线 l 与坐标轴的交点分别为 A 、 B , 根据三角形内角和定理求得 $\angle OAB = \angle OPQ$,

根据一次函数图象上点的坐标特征求得 $\tan \angle OAB = \frac{1}{2}$, 进而就可求得.

解答: 解: 如图, 设直线 l 与坐标轴的交点分别为 A 、 B ,

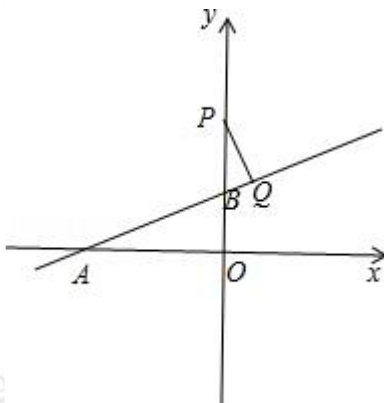
$\because \angle AOB = \angle PQB = 90^\circ$, $\angle ABO = \angle PBQ$,

$\therefore \angle OAB = \angle OPQ$,

由直线的斜率可知: $\tan \angle OAB = \frac{1}{2}$,

$\therefore \tan \angle OPQ = \frac{1}{2}$,

故答案为 $\frac{1}{2}$.



点评: 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 解直角三角形, 求得 $\angle OAB = \angle OPQ$ 是解题的关键.

24. (6分) (2015•内江) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边 CD 在正方形 $ECGF$ 的边 CE 上, O 是 EG 的中点, $\angle EGC$ 的平分线 GH 过点 D , 交 BE 于点 H , 连接 OH , FH , EG 与 FH 交于点 M , 对于下面四个结论: ① $CH \perp BE$; ② $HO = \frac{1}{2}BG$; ③ $S_{\text{正方形 } ABCD} : S_{\text{正方形 } ECGF} = 1 : \sqrt{2}$; ④ $EM : MG = 1 : (1 + \sqrt{2})$, 其中正确结论的序号为 ②.

$$\text{则 } \frac{a}{b} = \frac{-2+\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{则 } S_{\text{正方形 } ABCD} : S_{\text{正方形 } ECGF} = \left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9-4\sqrt{5}}{4}, \text{ 故③错误;}$$

$$\because EF \parallel OH,$$

$$\therefore \triangle EFM \sim \triangle OMH,$$

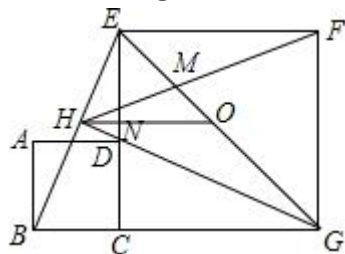
$$\therefore \frac{EM}{OM} = \frac{EF}{OH} = \frac{2b}{a+b},$$

$$\therefore \frac{EM}{OE} = \frac{2b}{a+3b}, \quad \frac{EM}{EG} = \frac{b}{a+3b}$$

$$\therefore \frac{EM}{MG} = \frac{b}{a+2b} = \frac{1}{\frac{a}{b}+2} = \frac{1}{-1+\sqrt{5}+2} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}. \text{ 故④错误.}$$

故正确的是②.

故答案是: ②.



点评: 本题考查了正方形的性质, 以及全等三角形的判定与性质, 相似三角形的判定与性质, 正确求得两个三角形的边长的比是解决本题的关键.

25. (6分) (2015•内江) 已知实数 a, b 满足: $a^2+1=\frac{1}{a}$, $b^2+1=\frac{1}{b}$, 则 $2015^{|a-b|} = \underline{1}$.

考点: 因式分解的应用; 零指数幂.

分析: 由于 $a^2+1=\frac{1}{a}$, $b^2+1=\frac{1}{b}$, 两式相减可得 $a^2-b^2=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$, 则有 $(a+b)(a-b)=\frac{b-a}{ab}$,

分解因式可得 $a=b$, 依此可得 $2015^{|a-b|}=2015^0$, 再根据零指数幂的计算法则计算即可求解.

解答: 解: $\because a^2+1=\frac{1}{a}$, $b^2+1=\frac{1}{b}$,

$$\text{两式相减可得 } a^2-b^2=\frac{1}{a}-\frac{1}{b},$$

$$(a+b)(a-b)=\frac{b-a}{ab},$$

$$[ab(a+b)+1](a-b)=0,$$

$$\therefore a-b=0, \text{ 即 } a=b,$$

$$\therefore 2015^{|a-b|}=2015^0=1.$$

故答案为: 1.

点评: 考查了因式分解的应用, 零指数幂, 本题关键是得到 $a=b$.

五、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 12 分, 共 36 分, 解答时应写出必要的文字说明或演算步骤)

26. (12 分) (2015·内江) (1) 填空:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2;$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3;$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 - b^4.$$

(2) 猜想:

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = a^n - b^n \quad (\text{其中 } n \text{ 为正整数, 且 } n \geq 2).$$

(3) 利用 (2) 猜想的结论计算:

$$2^9 - 2^8 + 2^7 - \dots + 2^3 - 2^2 + 2.$$

考点: 平方差公式.

专题: 规律型.

分析: (1) 根据平方差公式与多项式乘以多项式的运算法则运算即可;

(2) 根据 (1) 的规律可得结果;

(3) 原式变形后, 利用 (2) 得出的规律计算即可得到结果.

解答: 解: (1) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2;$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3;$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4 = a^4 - b^4;$$

故答案为: $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$;

(2) 由 (1) 的规律可得:

$$\text{原式} = a^n - b^n,$$

故答案为: $a^n - b^n$;

$$(3) 2^9 - 2^8 + 2^7 - \dots + 2^3 - 2^2 + 2 = (2-1)(2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2) = 342.$$

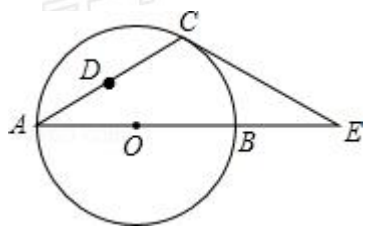
点评: 此题考查了多项式乘以多项式, 弄清题中的规律是解本题的关键.

27. (12 分) (2015·内江) 如图, 在 $\triangle ACE$ 中, $CA=CE$, $\angle CAE=30^\circ$, $\odot O$ 经过点 C , 且圆的直径 AB 在线段 AE 上.

(1) 试说明 CE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\triangle ACE$ 中 AE 边上的高为 h , 试用含 h 的代数式表示 $\odot O$ 的直径 AB ;

(3) 设点 D 是线段 AC 上任意一点 (不含端点), 连接 OD , 当 $\frac{1}{2}CD + OD$ 的最小值为 6 时, 求 $\odot O$ 的直径 AB 的长.



考点: 圆的综合题; 线段的性质: 两点之间线段最短; 等腰三角形的性质; 等边三角形的判定与性质; 菱形的判定与性质; 锐角三角函数的定义; 特殊角的三角函数值.

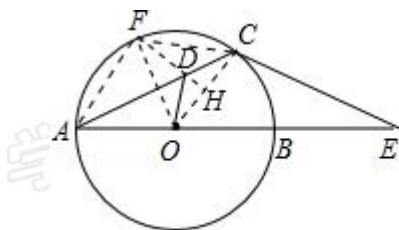


图3

$$\text{则 } \angle AOF = \angle COF = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ.$$

$$\therefore OA = OF = OC,$$

$$\therefore \triangle AOF, \triangle COF \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore AF = AO = OC = FC,$$

$$\therefore \text{四边形 } AOCF \text{ 是菱形,}$$

$$\therefore \text{根据对称性可得 } DF = DO.$$

过点 D 作 $DH \perp OC$ 于 H,

$$\therefore OA = OC, \therefore \angle OCA = \angle OAC = 30^\circ,$$

$$\therefore DH = DC \cdot \sin \angle DCH = DC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} DC,$$

$$\therefore \frac{1}{2} CD + OD = DH + FD.$$

根据两点之间线段最短可得:

$$\text{当 F、D、H 三点共线时, } DH + FD \text{ (即 } \frac{1}{2} CD + OD \text{) 最小,}$$

$$\text{此时 } FH = OF \cdot \sin \angle FOH = \frac{\sqrt{3}}{2} OF = 6,$$

$$\text{则 } OF = 4\sqrt{3}, AB = 2OF = 8\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{当 } \frac{1}{2} CD + OD \text{ 的最小值为 6 时, } \odot O \text{ 的直径 } AB \text{ 的长为 } 8\sqrt{3}.$$

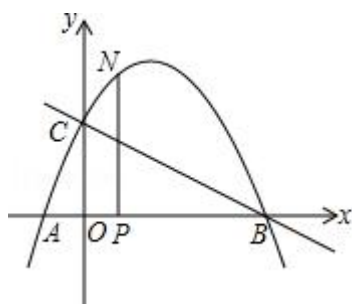
点评: 本题主要考查了圆周角定理、切线的判定、等腰三角形的性质、三角函数的定义、特殊角的三角函数值、等边三角形的判定与性质、菱形的判定与性质、两点之间线段最短等知识, 把 $\frac{1}{2} CD + OD$ 转化为 $DH + FD$ 是解决第 (3) 小题的关键.

28. (12 分) (2015·内江) 如图, 抛物线与 x 轴交于点 A $(-\frac{1}{3}, 0)$ 、点 B $(2, 0)$, 与 y 轴交于点 C $(0, 1)$, 连接 BC.

(1) 求抛物线的函数关系式;

(2) 点 N 为抛物线上的一个动点, 过点 N 作 $NP \perp x$ 轴于点 P, 设点 N 的横坐标为 t $(-\frac{1}{3} < t < 2)$, 求 $\triangle ABN$ 的面积 S 与 t 的函数关系式;

(3) 若 $-\frac{1}{3} < t < 2$ 且 $t \neq 0$ 时 $\triangle OPN \sim \triangle COB$, 求点 N 的坐标.



考点: 二次函数综合题; 待定系数法求二次函数解析式; 相似三角形的性质.

专题: 综合题.

分析: (1) 可设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$, 然后只需运用待定系数法就可解决问题;

(2) 当 $-\frac{1}{3} < t < 2$ 时, 点 N 在 x 轴的上方, 则 NP 等于点 N 的纵坐标, 只需求出 AB, 就可得到 S 与 t 的函数关系式;

(3) 根据相似三角形的性质可得 $PN=2PO$. 由于 $PO=|t|$, 需分 $-\frac{1}{3} < t < 0$ 和 $0 < t < 2$

两种情况讨论, 由 $PN=2PO$ 得到关于 t 的方程, 解这个方程, 就可解决问题.

解答: 解: (1) 设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$, 由题可得:

$$\begin{cases} \frac{1}{9}a - \frac{1}{3}b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{5}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的函数关系式为 } y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1;$$

(2) 当 $-\frac{1}{3} < t < 2$ 时, $y_N > 0$,

$$\therefore NP = |y_N| = y_N = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 1,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}AB \cdot PN$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 1\right)$$

$$= \frac{7}{6} \left(-\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 1\right)$$

$$= -\frac{7}{4}t^2 + \frac{35}{12}t + \frac{7}{6};$$

(3) $\because \triangle OPN \sim \triangle COB$,

$$\therefore \frac{PO}{OC} = \frac{PN}{OB}$$

$$\therefore \frac{PO}{1} = \frac{PN}{2},$$

$$\therefore PN = 2PO.$$

① 当 $-\frac{1}{3} < t < 0$ 时, $PN = |y_N| = y_N = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 1$, $PO = |t| = -t$,

$$\therefore -\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 1 = -2t,$$

$$\text{整理得: } 3t^2 - 9t - 2 = 0,$$

$$\text{解得: } t_1 = \frac{9 + \sqrt{105}}{6}, t_2 = \frac{9 - \sqrt{105}}{6}.$$

$$\therefore \frac{9 + \sqrt{105}}{6} > 0, -\frac{1}{3} < \frac{9 - \sqrt{105}}{6} < 0,$$

$$\therefore t = \frac{9 - \sqrt{105}}{6}, \text{ 此时点 N 的坐标为 } \left(\frac{9 - \sqrt{105}}{6}, \frac{\sqrt{105} - 9}{3} \right);$$

② 当 $0 < t < 2$ 时, $PN = |y_N| = y_N = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 1$, $PO = |t| = t$,

$$\therefore -\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 1 = 2t,$$

$$\text{整理得: } 3t^2 - t - 2 = 0,$$

$$\text{解得: } t_3 = -\frac{2}{3}, t_4 = 1.$$

$$\therefore -\frac{2}{3} < 0, 0 < 1 < 2,$$

$$\therefore t = 1, \text{ 此时点 N 的坐标为 } (1, 2).$$

$$\text{综上所述: 点 N 的坐标为 } \left(\frac{9 - \sqrt{105}}{6}, \frac{\sqrt{105} - 9}{3} \right) \text{ 或 } (1, 2).$$

点评: 本题主要考查了用待定系数法求二次函数的解析式、相似三角形的性质、解一元二次方程等知识, 需要注意的是: 用点的坐标表示相关线段的长度时, 应先用坐标的绝对值表示线段的长度, 然后根据坐标的正负去绝对值; 解方程后要检验, 不符合条件的解要舍去.