

2015 年四川省乐山市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求．

1. (3 分) (2015•乐山) 3 的相反数是 ()

- A. -3 B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

2. (3 分) (2015•乐山) 下列几何体中，正视图是矩形的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

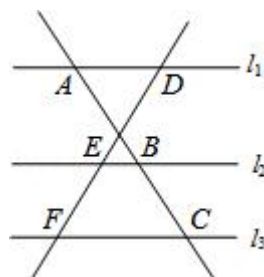
3. (3 分) (2015•乐山) 某班开展 1 分钟仰卧起坐比赛活动，5 名同学的成绩如下 (单位：个)：37、38、40、40、42. 这组数据的众数是 ()

- A. 37 B. 38 C. 40 D. 42

4. (3 分) (2015•乐山) 下列说法不一定成立的是 ()

- A. 若 $a > b$ ，则 $a+c > b+c$ B. 若 $a+c > b+c$ ，则 $a > b$
C. 若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$ D. 若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $a > b$

5. (3 分) (2015•乐山) 如图， $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，两条直线与这三条平行线分别交于点 A、B、C 和 D、E、F. 已知 $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$ ，则 $\frac{DE}{EF}$ 的值为 ()

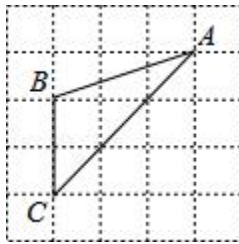


- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

6. (3 分) (2015•乐山) 二次函数 $y = -x^2 + 2x + 4$ 的最大值为 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

7. (3 分) (2015•乐山) 如图，已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上，则 $\cos A$ 的值为 ()



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

8. (3分) (2015•乐山) 电影《刘三姐》中，秀才和刘三姐对歌的场面十分精彩．罗秀才唱到：“三百条狗交给你，一少三多四下分，
不要双数要单数，看你怎样分得均？”刘三姐示意舟妹来答，舟妹唱道：“九十九条打猎去，
九十九条看羊来，九十九条守门口，剩下三条财主请来当奴才．”若用数学方法解决罗秀才
提出的问题，设“一少”的狗有 x 条，“三多”的狗有 y 条，则解此问题所列关系式正确的是
()

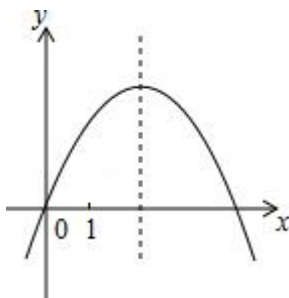
A. $\begin{cases} x+3y=300 \\ 0 < x < y < 300 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x+3y=300 \\ 0 < x < y < 300 \\ x、y \text{ 为奇数} \end{cases}$

C. $\begin{cases} x+3y=300 \\ 0 < 3x=y < 300 \\ x、y \text{ 为奇数} \end{cases}$

D. $\begin{cases} x+3y=300 \\ 0 < x < 300 \\ 0 < y < 300 \\ x、y \text{ 为奇数} \end{cases}$

9. (3分) (2015•乐山) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，记 $m=|a-b+c|+|2a+b+c|$ ，
 $n=|a+b+c|+|2a-b-c|$ ．则下列选项正确的是 ()



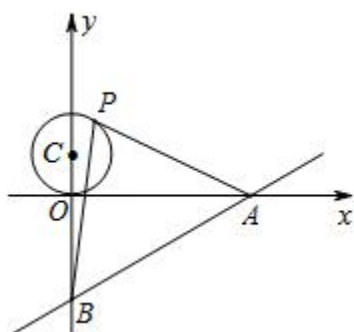
A. $m < n$

B. $m > n$

C. $m=n$

D. $m、n$ 的大小关系不能确定

10. (3分) (2015•乐山) 如图，已知直线 $y=\frac{3}{4}x-3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 $A、B$ 两点， P 是
以 $C(0, 1)$ 为圆心，1 为半径的圆上一动点，连结 $PA、PB$ ．则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是 ()



- A. 8 B. 12 C. $\frac{21}{2}$ D. $\frac{17}{2}$

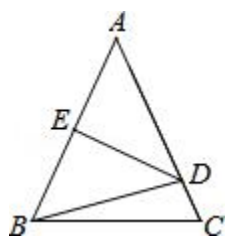
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

11. (3 分) (2015•湘潭) $\frac{1}{2}$ 的倒数是_____.

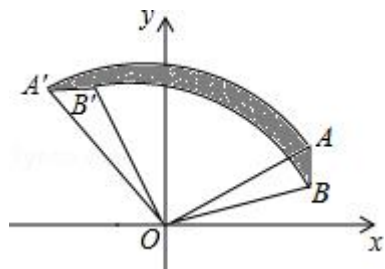
12. (3 分) (2015•乐山) 函数 $y=\sqrt{x-2}$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

13. (3 分) (2015•乐山) 九年级 1 班 9 名学生参加学校的植树活动，活动结束后，统计每人植树的情况，植了 2 棵树的有 5 人，植了 4 棵树的有 3 人，植了 5 棵树的有 1 人，那么平均每人植树_____棵.

14. (3 分) (2015•乐山) 如图，在等腰三角形 ABC 中， $AB=AC$ ，DE 垂直平分 AB，已知 $\angle ADE=40^\circ$ ，则 $\angle DBC=$ _____°.



15. (3 分) (2015•乐山) 如图，已知 $A(2\sqrt{3}, 2)$ 、 $B(2\sqrt{3}, 1)$ ，将 $\triangle AOB$ 绕着点 O 逆时针旋转，使点 A 旋转到点 $A'(-2, 2\sqrt{3})$ 的位置，则图中阴影部分的面积为_____.



16. (3 分) (2015•乐山) 在直角坐标系 xOy 中，对于点 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y')$ ，给出如下

定义：若 $y' = \begin{cases} y & (x \geq 0) \\ -y & (x < 0) \end{cases}$ ，则称点 Q 为点 P 的“可控变点”.

例如：点 (1, 2) 的“可控变点”为点 (1, 2)，点 (-1, 3) 的“可控变点”为点 (-1, -3)。

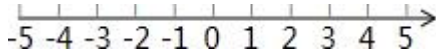
(1) 若点 (-1, -2) 是一次函数 $y=x+3$ 图象上点 M 的“可控变点”，则点 M 的坐标为_____。

(2) 若点 P 在函数 $y=-x^2+16$ ($-5\leq x\leq a$) 的图象上，其“可控变点”Q 的纵坐标 y' 的取值范围是 $-16\leq y'\leq 16$ ，则实数 a 的取值范围是_____。

三、本大题共 3 小题，每小题 9 分，共 27 分。

17. (9 分) (2015•乐山) 计算： $|- \frac{1}{2}| + \sqrt{8} - 4\cos 45^\circ + (-1)^{2015}$ 。

18. (9 分) (2015•乐山) 求不等式组 $\begin{cases} 3x-7 < 2 \\ 2x+3 \geq 1 \end{cases}$ 的解集，并把它们的解集在数轴上表示出来。

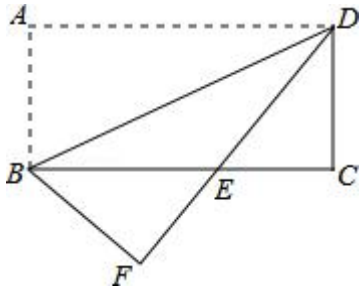


19. (9 分) (2015•乐山) 化简求值： $\frac{2a}{a^2-4} \div (\frac{a^2}{a-2} - a)$ ，其中 $a=\sqrt{3}-2$ 。

四、本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分.

20. (10 分) (2015•乐山) 如图，将矩形纸片 ABCD 沿对角线 BD 折叠，使点 A 落在平面上的 F 点处，DF 交 BC 于点 E.

- (1) 求证: $\triangle DCE \cong \triangle BFE$;
- (2) 若 $CD=2$, $\angle ADB=30^\circ$, 求 BE 的长.

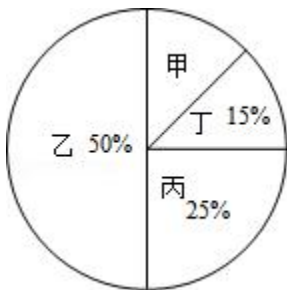


21. (10 分) (2015•乐山) 某班开展安全知识竞赛活动，班长将所有同学的成绩分成四类，并制作了如下的统计图表:

类别	成绩	频数
甲	$60 \leq m < 70$	4
乙	$70 \leq m < 80$	a
丙	$80 \leq m < 90$	10
丁	$90 \leq m \leq 100$	5

根据图表信息，回答下列问题:

- (1) 该班共有学生_____人; 表中 $a=$ _____;
- (2) 将丁类的五名学生分别记为 A、B、C、D、E，现从中随机挑选两名学生参加学校的决赛，请借助树状图、列表或其他方式求 B 一定能参加决赛的概率.



22. (10 分) (2015•乐山) “六一”期间, 小张购进 100 只两种型号的文具进行销售, 其进价和售价之间的关系如下表:

型号	进价 (元/只)	售价 (元/只)
A 型	10	12
B 型	15	23

- (1) 小张如何进货, 使进货款恰好为 1300 元?
- (2) 要使销售文具所获利润最大, 且所获利润不超过进货价格的 40%, 请你帮小张设计一个进货方案, 并求出其所获利润的最大值.

五、本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分.

23. (10 分) (2015•乐山) 如图 1, 四边形 ABCD 中, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 2$, $\tan A = \frac{4}{3}$.

- (1) 求 CD 边的长;
- (2) 如图 2, 将直线 CD 边沿箭头方向平移, 交 DA 于点 P, 交 CB 于点 Q (点 Q 运动到点 B 停止). 设 $DP = x$, 四边形 PQCD 的面积为 y , 求 y 与 x 的函数关系式, 并求出自变量 x 的取值范围.

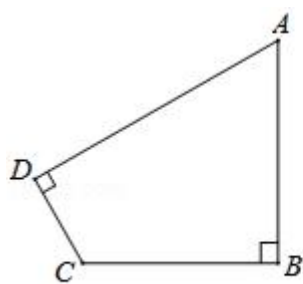


图 1

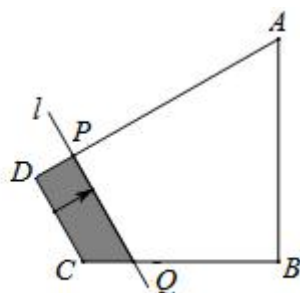
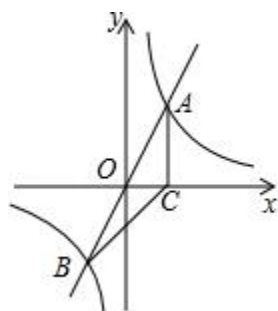


图 2

24. (10 分) (2015•乐山) 如图, 正比例函数 $y=2x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于 A、B 两点, 过点 A 作 AC 垂直 x 轴于点 C, 连结 BC. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 2.

(1) 求 k 的值;

(2) x 轴上是否存在一点 D, 使 $\triangle ABD$ 为直角三角形? 若存在, 求出点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



六、本大题共 2 小题, 第 25 题 12 分, 第 26 题 13 分, 共 25 分.

25. (12 分) (2015•乐山) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, AB 是 $\odot O$ 的弦, 斜边 AC 交 $\odot O$ 于点 D, 且 $AD=DC$, 延长 CB 交 $\odot O$ 于点 E.

(1) 图 1 的 A、B、C、D、E 五个点中, 是否存在某两点间的距离等于线段 CE 的长? 请说明理由;

(2) 如图 2, 过点 E 作 $\odot O$ 的切线, 交 AC 的延长线于点 F.

①若 $CF=CD$ 时, 求 $\sin \angle CAB$ 的值;

②若 $CF=aCD$ ($a>0$) 时, 试猜想 $\sin \angle CAB$ 的值. (用含 a 的代数式表示, 直接写出结果)

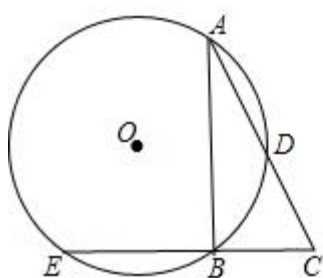


图1

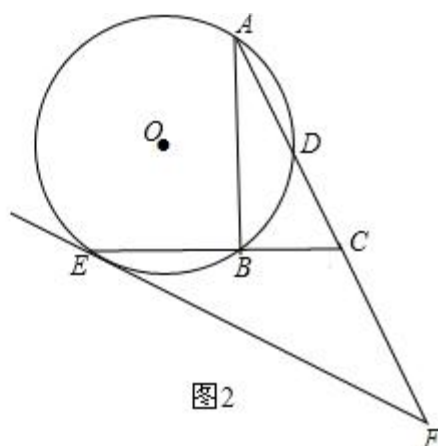


图2

26. (13 分) (2015•乐山) 如图 1, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴分别交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C . 若 $\tan \angle ABC=3$, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 -8 、 2 .

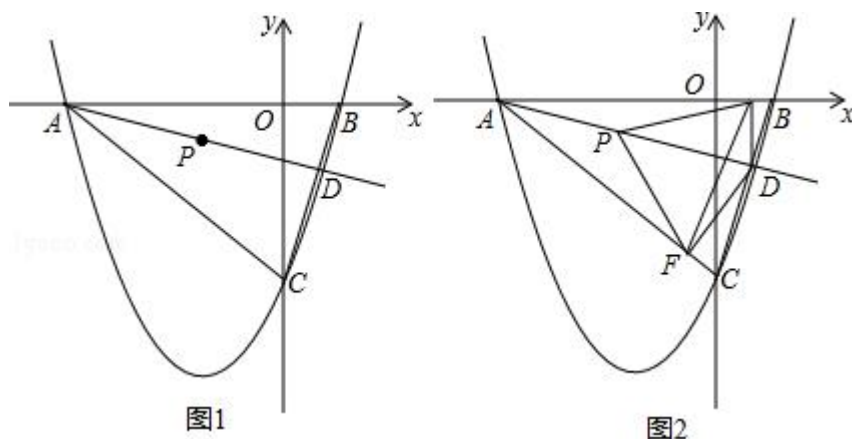
(1) 求二次函数的解析式;

(2) 直线 l 绕点 A 以 AB 为起始位置顺时针旋转到 AC 位置停止, l 与线段 BC 交于点 D , P 是 AD 的中点.

①求点 P 的运动路程;

②如图 2, 过点 D 作 DE 垂直 x 轴于点 E , 作 $DF \perp AC$ 所在直线于点 F , 连结 PE 、 PF , 在 l 运动过程中, $\angle EPF$ 的大小是否改变? 请说明理由;

(3) 在 (2) 的条件下, 连结 EF , 求 $\triangle PEF$ 周长的最小值.



2015 年四川省乐山市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求．

1. (3 分) (2015•乐山) 3 的相反数是 ()

- A. -3 B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

考点：相反数．

分析：根据相反数的含义，可得求一个数的相反数的方法就是在这个数的前边添加“ $-$ ”，据此解答即可．

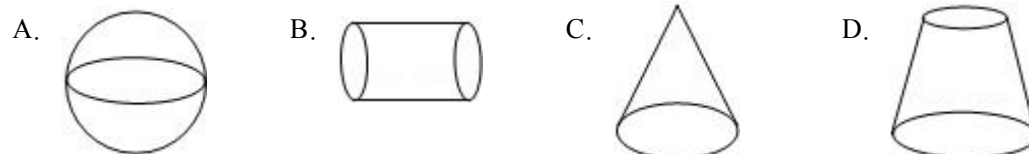
解答：解：根据相反数的含义，可得

3 的相反数是： -3 ．

故选：A．

点评：此题主要考查了相反数的含义以及求法，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：相反数是成对出现的，不能单独存在；求一个数的相反数的方法就是在这个数的前边添加“ $-$ ”．

2. (3 分) (2015•乐山) 下列几何体中，正视图是矩形的是 ()



考点：简单几何体的三视图．

分析：主视图是从物体正面看，所得到的图形．

解答：解：A、球的正视图是圆，故此选项错误；

B、圆柱的正视图是矩形，故此选项正确；

C、圆锥的正视图是等腰三角形，故此选项错误；

D、圆台的正视图是等腰梯形，故此选项错误；

故选：B.

点评：本题考查了几何体的三种视图，掌握定义是关键. 注意所有的看到的棱都应表现在三视图中.

3. (3分) (2015•乐山) 某班开展1分钟仰卧起坐比赛活动，5名同学的成绩如下(单位：个)：37、38、40、40、42. 这组数据的众数是 ()

A. 37 B. 38 C. 40 D. 42

考点：众数.

分析：根据众数的概念求解.

解答：解：由题意得，40出现的次数最多，众数为40.

故选：C.

点评：本题考查了众数的知识，一组数据中出现次数最多的数据叫做众数.

4. (3分) (2015•乐山) 下列说法不一定成立的是 ()

A. 若 $a > b$ ，则 $a+c > b+c$ B. 若 $a+c > b+c$ ，则 $a > b$
C. 若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$ D. 若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $a > b$

考点：不等式的性质.

分析：根据不等式的性质进行判断.

解答：解：A、在不等式 $a > b$ 的两边同时加上 c ，不等式仍成立，即 $a+c > b+c$ ，故本选项错误；

B、在不等式 $a+c > b+c$ 的两边同时减去 c ，不等式仍成立，即 $a > b$ ，故本选项错误；

C、当 $c=0$ 时，若 $a > b$ ，则不等式 $ac^2 > bc^2$ 不成立，故本选项正确；

D、在不等式 $ac^2 > bc^2$ 的两边同时除以不为0的 c^2 ，该不等式仍成立，即 $a > b$ ，故本选项错误.

故选：C.

点评：主要考查了不等式的基本性质. “0”是很特殊的一个数，因此，解答不等式的问题时，

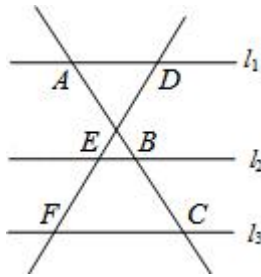
应密切关注“0”存在与否，以防掉进“0”的陷阱．不等式的基本性质：

(1) 不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变．

(2) 不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变．

(3) 不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变．

5. (3分) (2015•乐山) 如图， $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，两条直线与这三条平行线分别交于点 A、B、C 和 D、E、F. 已知 $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$ ，则 $\frac{DE}{DF}$ 的值为 ()



- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

考点：平行线分线段成比例.

分析：根据平行线分线段成比例定理得出 $\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC}$ ，根据已知即可求出答案.

解答：解： $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$,

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5},$$

故选：D.

点评：本题考查了平行线分线段成比例定理的应用，能根据定理得出比例式是解此题的关键，注意：一组平行线截两条直线，所截得的对应线段成比例.

6. (3分) (2015•乐山) 二次函数 $y = -x^2 + 2x + 4$ 的最大值为 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

考点：二次函数的最值.

专题：计算题.

分析：先利用配方法得到 $y = -(x-1)^2 + 5$ ，然后根据二次函数的最值问题求解.

解答: 解: $y = -(x-1)^2 + 5$,

$$\because a = -1 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, y 有最大值, 最大值为 5.

故选: C.

点评: 本题考查了二次函数的最值: 当 $a > 0$ 时, 抛物线在对称轴左侧, y 随 x 的增大而减少;

在对称轴右侧, y 随 x 的增大而增大, 因为图象有最低点, 所以函数有最小值, 当 $x =$

$$-\frac{b}{2a} \text{ 时, } y = \frac{4ac - b^2}{4a}; \text{ 当 } a < 0 \text{ 时, 抛物线在对称轴左侧, } y \text{ 随 } x \text{ 的增大而增大; 在}$$

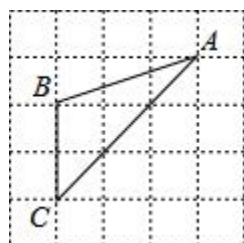
对称轴右侧, y 随 x 的增大而减少, 因为图象有最高点, 所以函数有最大值, 当 $x =$

$$-\frac{b}{2a} \text{ 时, } y = \frac{4ac - b^2}{4a}; \text{ 确定一个二次函数的最值, 首先看自变量的取值范围, 当自}$$

变量取全体实数时, 其最值为抛物线顶点坐标的纵坐标; 当自变量取某个范围时, 要

分别求出顶点和函数端点处的函数值, 比较这些函数值, 从而获得最值.

7. (3 分) (2015•乐山) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上, 则 $\cos A$ 的值为 ()



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

考点: 锐角三角函数的定义; 勾股定理; 勾股定理的逆定理.

专题: 网格型.

分析: 过 B 点作 $BD \perp AC$, 得 AB 的长, AD 的长, 利用锐角三角函数得结果.

解答: 解: 过 B 点作 $BD \perp AC$, 如图,

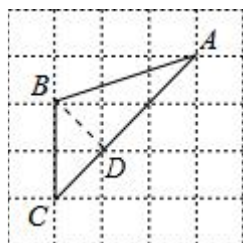
由勾股定理得,

$$AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$AD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos A = \frac{AD}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

故选：D.



点评：本题主要考查了锐角三角函数和勾股定理，作出适当的辅助线构建全等三角形是解答此题的关键.

8. (3分) (2015•乐山) 电影《刘三姐》中，秀才和刘三姐对歌的场面十分精彩. 罗秀才唱到：“三百条狗交给你，一少三多四下分，

不要双数要单数，看你怎样分得均？”刘三姐示意舟妹来答，舟妹唱道：“九十九条打猎去，九十九条看羊来，九十九条守门口，剩下三条财主请来当奴才.”若用数学方法解决罗秀才提出的问题，设“一少”的狗有 x 条，“三多”的狗有 y 条，则解此问题所列关系式正确的是

()

A.
$$\begin{cases} x+3y=300 \\ 0 < x < y < 300 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x+3y=300 \\ 0 < x < y < 300 \\ x、y \text{ 为奇数} \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x+3y=300 \\ 0 < 3x=y < 300 \\ x、y \text{ 为奇数} \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x+3y=300 \\ 0 < x < 300 \\ 0 < y < 300 \\ x、y \text{ 为奇数} \end{cases}$$

考点：由实际问题抽象出二元一次方程.

分析：根据一少三多四下分，不要双数要单数，列出不等式组解答即可.

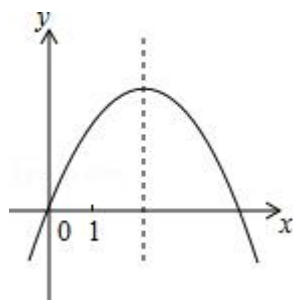
解答:

解: 设“一少”的狗有 x 条, “三多”的狗有 y 条, 可得:
$$\begin{cases} x+3y=300 \\ 0 < x < y < 300, \\ x、y \text{ 为奇数} \end{cases}$$

故选: B.

点评: 此题考查二元一次方程的应用, 关键是根据一少三多四下分, 不要双数要单数列出不等式组.

9. (3 分) (2015•乐山) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示, 记 $m=|a-b+c|+|2a+b+c|$, $n=|a+b+c|+|2a-b-c|$. 则下列选项正确的是 ()



A. $m < n$

B. $m > n$

C. $m=n$

D. $m、n$ 的大小关系不能确定

考点: 二次函数图象与系数的关系.

分析: 首先根据抛物线开口向下, 可得 $a < 0$; 然后根据对称轴在 y 轴右边, 可得 $b > 0$; 再根据抛物线经过原点, 可得 $c=0$; 再根据 $x=1$ 时, $y > 0$, 判断出 $a+b+c > 0$, $a > -b$; 最后分两种情况讨论: ①当对称轴 $x = -\frac{b}{2a} \leq 1$ 时; ②当对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > 1$ 时; 判断出 $m、n$ 的大小关系即可.

解答: 解: $\because$ 抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0,$$

$\because$ 对称轴在 y 轴右边,

$$\therefore b > 0,$$

$\because$ 抛物线经过原点,

$$\therefore c=0,$$

$$\therefore a-b+c < 0;$$

$$\because x=1 \text{ 时, } y > 0,$$

$$\therefore a+b+c > 0,$$

$$\because c=0,$$

$$\therefore a+b > 0;$$

$$(1) \text{ 当对称轴 } x = -\frac{b}{2a} \leq 1 \text{ 时,}$$

$$2a+b \geq 0,$$

$$m = |a - b + c| + |2a + b + c|$$

$$= b - a + 2a + b$$

$$= 2b + a$$

$$n = |a + b + c| + |2a - b - c|$$

$$= a + b + (b - 2a)$$

$$= 2b - a$$

$$\because a < 0,$$

$$\therefore 2b + a < 2b - a,$$

$$\therefore m < n.$$

$$(2) \text{ 当对称轴 } x = -\frac{b}{2a} > 1 \text{ 时,}$$

$$2a + b < 0,$$

$$m = |a - b + c| + |2a + b + c|$$

$$= b - a - (2a + b)$$

$$= -3a$$

$$n = |a + b + c| + |2a - b - c|$$

$$= a + b + (b - 2a)$$

$$= 2b - a$$

$$m - n = (-3a) - (2b - a)$$

$$= -2(a + b)$$

$$\because a + b > 0,$$

$$\therefore -2(a + b) < 0,$$

$$\therefore m < n.$$

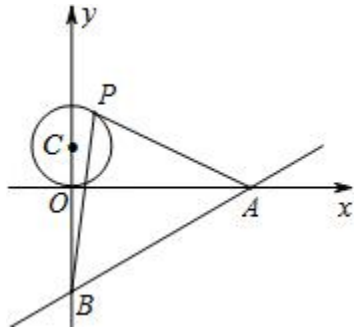
综上, 可得 $m < n$.

故选: A.

点评: 此题主要考查了二次函数的图象与系数的关系, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明

确: ①二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小: 当 $a > 0$ 时, 抛物线向上开口; 当 $a < 0$ 时, 抛物线向下开口; ②一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置: 当 a 与 b 同号时 (即 $ab > 0$), 对称轴在 y 轴左; 当 a 与 b 异号时 (即 $ab < 0$), 对称轴在 y 轴右. (简称: 左同右异) ③常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点. 抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$.

10. (3 分) (2015•乐山) 如图, 已知直线 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, P 是以 $C(0, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆上一动点, 连结 PA 、 PB . 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是 ()



A. 8

B. 12

C. $\frac{21}{2}$

D. $\frac{17}{2}$

考点: 圆的综合题.

分析: 求出 A 、 B 的坐标, 根据勾股定理求出 AB , 求出点 C 到 AB 的距离, 即可求出圆 C 上点到 AB 的最大距离, 根据面积公式求出即可.

解答: 解: $\because$ 直线 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点,

$\therefore A$ 点的坐标为 $(4, 0)$, B 点的坐标为 $(0, -3)$, $3x - 4y - 12 = 0$,

即 $OA = 4$, $OB = 3$, 由勾股定理得: $AB = 5$,

$\therefore$ 点 $C(0, 1)$ 到直线 $3x - 4y - 12 = 0$ 的距离是 $\frac{|3 \times 0 - 4 \times 1 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5}$,

$\therefore$ 圆 C 上点到直线 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 的最大距离是 $1 + \frac{16}{5} = \frac{21}{5}$,

$\therefore \triangle PAB$ 面积的最大值是 $\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{21}{5} = \frac{21}{2}$,

故选: C.

点评: 本题考查了三角形的面积, 点到直线的距离公式的应用, 解此题的关键是求出圆上的点到直线 AB 的最大距离, 属于中档题目.

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分.

11. (3 分) (2015•湘潭) $\frac{1}{2}$ 的倒数是 2.

考点: 倒数.

分析: 根据倒数的定义, $\frac{1}{2}$ 的倒数是 2.

解答: 解: $\frac{1}{2}$ 的倒数是 2,

故答案为: 2.

点评: 此题主要考查了倒数的定义: 若两个数的乘积是 1, 我们就称这两个数互为倒数.

12. (3 分) (2015•乐山) 函数 $y=\sqrt{x-2}$ 的自变量 x 的取值范围是 $x \geq 2$.

考点: 函数自变量的取值范围.

分析: 根据被开方数大于等于 0 列式计算即可得解.

解答: 解: 根据题意得, $x-2 \geq 0$,

解得 $x \geq 2$.

故答案为: $x \geq 2$.

点评: 本题考查了函数自变量的范围, 一般从三个方面考虑:

- (1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数;
- (2) 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0;
- (3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数非负数.

13. (3 分) (2015•乐山) 九年级 1 班 9 名学生参加学校的植树活动, 活动结束后, 统计每人植树的情况, 植了 2 棵树的有 5 人, 植了 4 棵树的有 3 人, 植了 5 棵树的有 1 人, 那么平均每人植树 3 棵.

考点: 加权平均数.

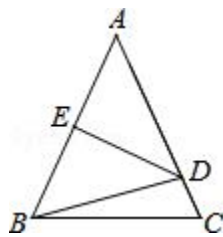
分析: 直接利用加权平均数的计算公式进行计算即可.

解答: 解: 平均每人植树 $\frac{2 \times 5 + 4 \times 3 + 5 \times 1}{5 + 3 + 1} = 3$ 棵,

故答案为: 3.

点评: 本题考查了加权平均数的计算, 解题的关键是牢记加权平均数的计算公式, 难度不大.

14. (3 分) (2015•乐山) 如图, 在等腰三角形 ABC 中, $AB=AC$, DE 垂直平分 AB, 已知 $\angle ADE=40^\circ$, 则 $\angle DBC=$ 15 $^\circ$.



考点: 线段垂直平分线的性质; 等腰三角形的性质.

分析: 根据线段垂直平分线求出 $AD=BD$, 推出 $\angle A=\angle ABD=50^\circ$, 根据三角形内角和定理和等腰三角形性质求出 $\angle ABC$, 即可得出答案.

解答: 解: $\because$ DE 垂直平分 AB,

$$\therefore AD=BD, \angle AED=90^\circ,$$

$$\therefore \angle A=\angle ABD,$$

$$\because \angle ADE=40^\circ,$$

$$\therefore \angle A=90^\circ - 40^\circ=50^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD=\angle A=50^\circ,$$

$$\because AB=AC,$$

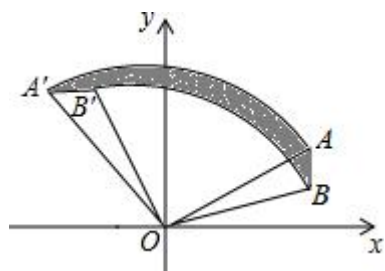
$$\therefore \angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)=65^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC=\angle ABC - \angle ABD=65^\circ - 50^\circ=15^\circ,$$

故答案为: 15.

点评: 本题考查了等腰三角形的性质, 线段垂直平分线性质, 三角形内角和定理的应用, 能正确运用定理求出各个角的度数是解此题的关键, 难度适中.

15. (3分) (2015•乐山) 如图, 已知 $A(2\sqrt{3}, 2)$ 、 $B(2\sqrt{3}, 1)$, 将 $\triangle AOB$ 绕着点 O 逆时针旋转, 使点 A 旋转到点 $A'(-2, 2\sqrt{3})$ 的位置, 则图中阴影部分的面积为 $\frac{3}{4}\pi$.



考点: 扇形面积的计算; 坐标与图形变化-旋转.

分析: 由 $A(2\sqrt{3}, 2)$ 使点 A 旋转到点 $A'(-2, 2\sqrt{3})$ 的位置易得旋转 90° , 根据旋转的性质可得, 阴影部分的面积等于 $S_{\text{扇形} A'OA} - S_{\text{扇形} C'OC}$, 从而根据 A, B 点坐标知 $OA=4$, $OC=OB=\sqrt{13}$, 可得出阴影部分的面积.

解答: 解: $\because A(2\sqrt{3}, 2)$ 、 $B(2\sqrt{3}, 1)$,

$$\therefore OA=4, OB=\sqrt{13},$$

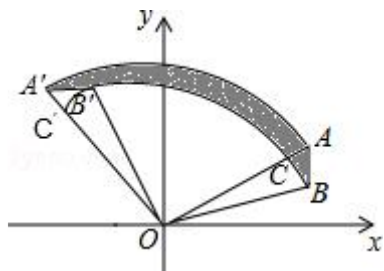
$\because$ 由 $A(2\sqrt{3}, 2)$ 使点 A 旋转到点 $A'(-2, 2\sqrt{3})$,

$$\therefore \angle A'OA = \angle B'OB = 90^\circ,$$

根据旋转的性质可得, $S_{\text{扇形} A'OA} = S_{\text{扇形} C'OC}$,

$$\therefore \text{阴影部分的面积等于 } S_{\text{扇形} A'OA} - S_{\text{扇形} C'OC} = \frac{1}{4}\pi \times 4^2 - \frac{1}{4}\pi \times (\sqrt{13})^2 = \frac{3}{4}\pi,$$

故答案为: $\frac{3}{4}\pi$.



点评: 此题主要考查了扇形的面积计算及旋转的性质, 解答本题的关键是根据旋转的性质得出 $S_{\text{扇形} A'OA} = S_{\text{扇形} C'OC}$, 从而得到阴影部分的表达式.

16. (3分) (2015•乐山) 在直角坐标系 xOy 中, 对于点 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y')$, 给出如下

定义: 若 $y' = \begin{cases} y & (x \geq 0) \\ -y & (x < 0) \end{cases}$, 则称点 Q 为点 P 的“可控变点”.

例如: 点 $(1, 2)$ 的“可控变点”为点 $(1, 2)$, 点 $(-1, 3)$ 的“可控变点”为点 $(-1, -3)$.

(1) 若点 $(-1, -2)$ 是一次函数 $y=x+3$ 图象上点 M 的“可控变点”, 则点 M 的坐标为 $(-1, 2)$.

(2) 若点 P 在函数 $y=-x^2+16$ ($-5 \leq x \leq a$) 的图象上, 其“可控变点” Q 的纵坐标 y' 的取值范围是 $-16 \leq y' \leq 16$, 则实数 a 的取值范围是 $0 \leq a \leq 4\sqrt{2}$.

考点: 二次函数图象上点的坐标特征; 一次函数图象上点的坐标特征.

专题: 新定义.

分析: (1) 直接根据“可控变点”的定义直接得出答案;

(2) 根据题意可知 $y=-x^2+16$ 图象上的点 P 的“可控变点”必在函数

$$y = \begin{cases} -x^2+16, & x \geq 0 \\ x^2-16, & -5 \leq x < 0 \end{cases} \text{ 的图象上, 结合图象即可得到答案.}$$

解答: 解: (1) 根据“可控变点”的定义可知点 M 的坐标为 $(-1, 2)$;

(2) 依题意, $y=-x^2+16$ 图象上的点 P 的“可控变点”必在函数

$$y = \begin{cases} -x^2+16, & x \geq 0 \\ x^2-16, & -5 \leq x < 0 \end{cases} \text{ 的图象上.}$$

$$\therefore -16 \leq y' \leq 16,$$

$$\text{当 } y'=16 \text{ 时, } 16 = -x^2+16 \text{ 或 } -16 = -x^2+16.$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x=4\sqrt{2}.$$

$$\text{当 } y'=-16 \text{ 时, } -16 = -x^2+16.$$

$$\therefore x=4\sqrt{2}.$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } 0 \leq a \leq 4\sqrt{2}.$$

$$\text{故答案为 } (-1, 2), 0 \leq a \leq 4\sqrt{2}.$$

点评: 本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征, 解答本题的关键是熟练掌握新定义“可控变点”, 解答此题还需要掌握二次函数的性质, 此题有一定的难度.

三、本大题共 3 小题，每小题 9 分，共 27 分.

17. (9 分) (2015•乐山) 计算: $|- \frac{1}{2}| + \sqrt{8} - 4\cos 45^\circ + (-1)^{2015}$.

考点: 实数的运算; 特殊角的三角函数值.

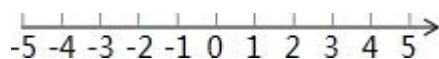
专题: 计算题.

分析: 原式第一项利用绝对值的代数意义化简, 第二项化为最简二次根式, 第三项利用特殊角的三角函数值计算, 最后一项利用乘方的意义化简, 计算即可得到结果.

解答: 解: 原式 $= \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

点评: 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

18. (9 分) (2015•乐山) 求不等式组 $\begin{cases} 3x - 7 < 2 \\ 2x + 3 \geq 1 \end{cases}$ 的解集, 并把它们的解集在数轴上表示出来.



考点: 解一元一次不等式组; 在数轴上表示不等式的解集.

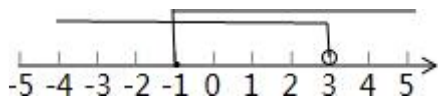
分析: 先解每个不等式, 两个不等式解集的公共部分就是不等式组的解集, 然后再数轴上表示出来即可.

解答: 解: $\begin{cases} 3x - 7 < 2 \text{ ①} \\ 2x + 3 \geq 1 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得: $x < 3$;

解不等式②得: $x \geq -1$.

则不等式组的解集是: $-1 \leq x < 3$.



点评: 本题考查了一元一次不等式 (组), 在数轴上表示不等式组的解集的应用, 关键是求出 不等式组的解集.

19. (9 分) (2015•乐山) 化简求值: $\frac{2a}{a^2 - 4} \div (\frac{a^2}{a - 2} - a)$, 其中 $a = \sqrt{3} - 2$.

考点: 分式的化简求值.

分析: 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简, 再把 a 的值代入进行计算即可.

解答: 解: 原式 $= \frac{2a}{(a+2)(a-2)} \div \frac{2a}{a-2}$
 $= \frac{2a}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a-2}{2a}$
 $= \frac{1}{a+2},$
当 $a = \sqrt{3} - 2$ 时, 原式 $= \frac{1}{\sqrt{3} - 2 + 2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

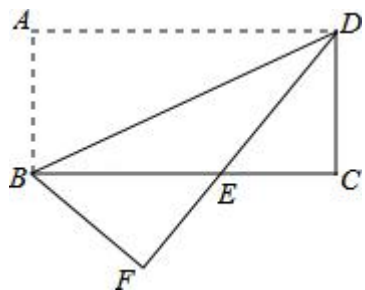
点评: 本题考查的是分式的化简求值, 熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

四、本大题共 3 小题, 每小题 10 分, 共 30 分.

20. (10 分) (2015•乐山) 如图, 将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠, 使点 A 落在平面上的 F 点处, DF 交 BC 于点 E .

(1) 求证: $\triangle DCE \cong \triangle BFE$;

(2) 若 $CD=2$, $\angle ADB=30^\circ$, 求 BE 的长.



考点: 翻折变换 (折叠问题); 全等三角形的判定与性质.

分析: (1) 由 $AD \parallel BC$, 知 $\angle ADB = \angle DBC$, 根据折叠的性质 $\angle ADB = \angle BDF$, 所以 $\angle DBC = \angle BDF$, 得 $BE = DE$, 即可用 AAS 证 $\triangle DCE \cong \triangle BFE$;

(2) 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $CD=2$, $\angle ADB = \angle DBC = 30^\circ$, 知 $BC = 2\sqrt{3}$, 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $CD=2$, $\angle EDC = 30^\circ$, 知 $CE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $BE = BC - EC = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$

解答: 解: (1) $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle DBC$,

根据折叠的性质 $\angle ADB = \angle BDF$, $\angle F = \angle A = \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DBC = \angle BDF,$$

$$\therefore BE = DE,$$

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle BFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle BEF = \angle DEC \\ \angle F = \angle C \\ BE = DE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DCE \cong \triangle BFE;$$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中,

$$\because CD = 2, \angle ADB = \angle DBC = 30^\circ,$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中,

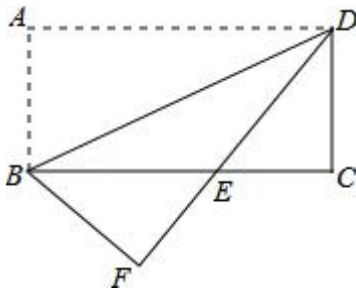
$$\because CD = 2, \angle EDC = 30^\circ,$$

$$\therefore DE = 2EC,$$

$$\therefore (2EC)^2 - EC^2 = CD^2,$$

$$\therefore CE = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore BE = BC - EC = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



点评: 本题考查了折叠的性质、全等三角形的判定和性质、等角对等边、平行线的性质以及勾股定理的综合运用, 熟练的运用折叠的性质是解决本题的关键.

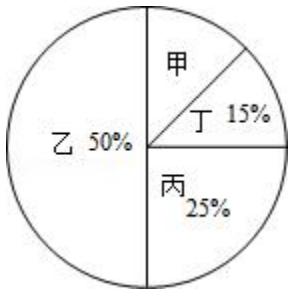
21. (10 分) (2015•乐山) 某班开展安全知识竞赛活动, 班长将所有同学的成绩分成四类, 并制作了如下的统计图表:

类别	成绩	频数
甲	$60 \leq m < 70$	4
乙	$70 \leq m < 80$	a

丙	$80 \leq m < 90$	10
丁	$90 \leq m \leq 100$	5

根据图表信息，回答下列问题：

- (1) 该班共有学生 40 人；表中 $a =$ 20 ；
- (2) 将丁类的五名学生分别记为 A、B、C、D、E，现从中随机挑选两名学生参加学校的决赛，请借助树状图、列表或其他方式求 B 一定能参加决赛的概率。



考点：列表法与树状图法；频数（率）分布表；扇形统计图.

专题：计算题.

- 分析：** (1) 根据丙的人数除以占的百分比求出学生总数，进而求出 a 的值即可；
- (2) 列表得出所有等可能的情况数，找出 B 一定参加的情况数，即可求出所求的概率.

解答： 解：(1) 根据题意得： $10 \div 25\% = 40$ (人)， $a = 40 - 5 - 10 - 5 = 20$ ；

故答案为： 40； 20；

(2) 列表如下：

	A	B	C	D	E
A	- - -	(B, A)	(C, A)	(D, A)	(E, A)
B	(A, B)	- - -	(C, B)	(D, B)	(E, B)
C	(A, C)	(B, C)	- - -	(D, C)	(E, C)
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	- - -	(E, D)
E	(A, E)	(B, E)	(C, E)	(D, E)	- - -

所有等可能的情况有 20 种，其中 B 一定参加的情况有 8 种，

$$\text{则 } P(\text{B 一定参加}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

点评: 此题考查了列表法与树状图法, 以及扇形统计图, 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

22. (10 分) (2015•乐山) “六一”期间, 小张购进 100 只两种型号的文具进行销售, 其进价和售价之间的关系如下表:

型号	进价 (元/只)	售价 (元/只)
A 型	10	12
B 型	15	23

(1) 小张如何进货, 使进货款恰好为 1300 元?

(2) 要使销售文具所获利润最大, 且所获利润不超过进货价格的 40%, 请你帮小张设计一个进货方案, 并求出其所获利润的最大值.

考点: 一次函数的应用; 一元一次方程的应用; 一元一次不等式的应用.

分析: (1) 设 A 文具为 x 只, 则 B 文具为 $(100 - x)$ 只, 根据题意列出方程解答即可;

(2) 设 A 文具为 x 只, 则 B 文具为 $(100 - x)$ 只, 根据题意列出函数解答即可.

解答: 解: (1) 设 A 文具为 x 只, 则 B 文具为 $(100 - x)$ 只, 可得:

$$10x + 15(100 - x) = 1300,$$

解得: $x = 40$.

答: A 文具为 40 只, 则 B 文具为 $100 - 40 = 60$ 只;

(2) 设 A 文具为 x 只, 则 B 文具为 $(100 - x)$ 只, 可得

$$(12 - 10)x + (23 - 15)(100 - x) \leq 40\%[10x + 15(100 - x)],$$

解得: $x \geq 50$,

设利润为 y , 则可得: $y = (12 - 10)x + (23 - 15)(100 - x) = 2x + 800 - 8x = -6x + 800$,

因为是减函数, 所以当 $x = 50$ 时, 利润最大, 即最大利润 $= -50 \times 6 + 800 = 500$ 元.

点评: 此题考查一次函数的应用, 关键是根据题意列出方程和不等式, 根据函数是减函数进行解答.

五、本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分.

23. (10 分) (2015•乐山) 如图 1, 四边形 ABCD 中, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $AB=3$, $BC=2$, $\tan A = \frac{4}{3}$.

(1) 求 CD 边的长;

(2) 如图 2, 将直线 CD 边沿箭头方向平移, 交 DA 于点 P, 交 CB 于点 Q (点 Q 运动到点 B 停止). 设 $DP=x$, 四边形 PQCD 的面积为 y , 求 y 与 x 的函数关系式, 并求出自变量 x 的取值范围.

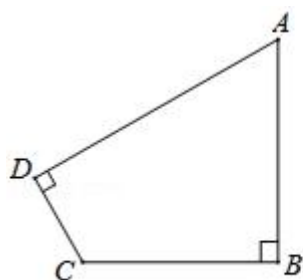


图 1

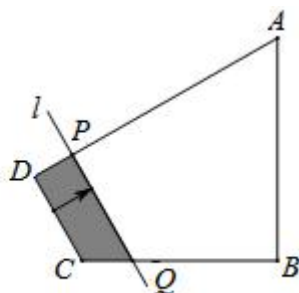


图 2

考点: 相似三角形的判定与性质; 函数关系式; 平移的性质; 解直角三角形.

分析: (1) 分别延长 AD、BC 相交于 E, 在 $Rt\triangle ABE$ 中, 由 $\tan A = \frac{4}{3}$, $AB=3$, $BC=2$, 得

到 $BE=4$, $EC=2$, $AE=5$, 通过等角的余角相等得到 $\angle A = \angle ECD$, 由 $\tan A = \frac{4}{3}$, 得 $\cos A = \frac{3}{5}$,

于是得到 $\cos \angle ECD = \frac{CD}{EC} = \frac{3}{5}$, 即问题可得;

(2) 由 (1) 可知 $\tan \angle ECD = \frac{ED}{CD} = \frac{4}{3}$, 得到 $ED = \frac{8}{5}$, 如图 4, 由 $PQ \parallel DC$, 可知 $\triangle EDC \sim$

$\triangle EPQ$, 得到比例式 $\frac{ED}{EP} = \frac{DC}{PQ}$, 求得 $PQ = \frac{6}{5} + \frac{3}{4}x$, 由 $S_{\text{四边形 PQCD}} = S_{\triangle EPQ} - S_{\triangle EDC}$, 于是

得到 $y = \frac{1}{2}PQ \cdot EP - \frac{1}{2}DC \cdot ED = \frac{1}{2} \times (\frac{6}{5} + \frac{3}{4}x) \times (\frac{8}{5} + x) - \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{10}x^2 + \frac{6}{5}x$, 于是

是当 Q 点到达 B 点时, 点 P 在 M 点处, 由 $EC=BC$, $DC \parallel PQ$, 得到 $DM=ED=\frac{8}{5}$, 于是

是结论可得.

解答: 解: (1) 如图 (3), 分别延长 AD、BC 相交于 E,

在 $Rt\triangle ABE$ 中,

$$\because \tan A = \frac{4}{3}, AB=3, BC=2,$$

$$\therefore BE=4, EC=2, AE=5,$$

$$\text{又} \because \angle E + \angle A = 90^\circ, \angle E + \angle ECD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ECD,$$

$$\text{由 } \tan A = \frac{4}{3}, \text{ 得 } \cos A = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \cos \angle ECD = \frac{CD}{EC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore CD = \frac{6}{5},$$

$$(2) \text{ 如图 4, 由 (1) 可知 } \tan \angle ECD = \frac{ED}{CD} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore ED = \frac{8}{5},$$

如图 4, 由 $PQ \parallel DC$, 可知 $\triangle EDC \sim \triangle EPQ$,

$$\therefore \frac{ED}{EP} = \frac{DC}{PQ},$$

$$\therefore \frac{\frac{8}{5}}{\frac{8}{5} + x} = \frac{\frac{6}{5}}{PQ}, \text{ 即 } PQ = \frac{6}{5} + \frac{3}{4}x,$$

$$\therefore S_{\text{四边形 PQCD}} = S_{\triangle EPQ} - S_{\triangle EDC},$$

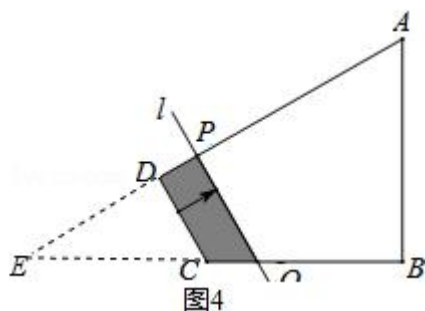
$$\therefore y = \frac{1}{2}PQ \cdot EP - \frac{1}{2}DC \cdot ED = \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{4}x\right) \times \left(\frac{8}{5} + x\right) - \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{8}x^2 + \frac{6}{5}x,$$

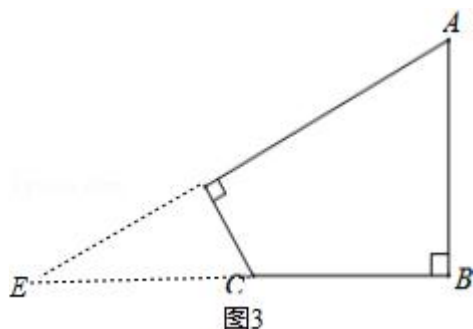
$\therefore$ 当 Q 点到达 B 点时, 点 P 在 M 点处,

由 $EC = BC$, $DC \parallel PQ$,

$$\therefore DM = ED = \frac{8}{5},$$

$\therefore$ 自变量 x 的取值范围为: $0 < x \leq \frac{8}{5}$.



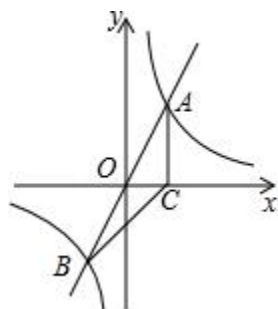


点评: 本题考查了相似三角形的判定和性质, 平移的性质, 求函数的解析式, 解直角三角形, 正确的作出辅助线是解题的关键.

24. (10 分) (2015•乐山) 如图, 正比例函数 $y=2x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于 A、B 两点, 过点 A 作 AC 垂直 x 轴于点 C, 连结 BC. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 2.

(1) 求 k 的值;

(2) x 轴上是否存在一点 D, 使 $\triangle ABD$ 为直角三角形? 若存在, 求出点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



考点: 反比例函数与一次函数的交点问题.

分析: (1) 首先根据反比例函数与正比例函数的图象特征, 可知 A、B 两点关于原点对称, 则 O 为线段 AB 的中点, 故 $\triangle BOC$ 的面积等于 $\triangle AOC$ 的面积, 都等于 1, 然后由反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的比例系数 k 的几何意义, 可知 $\triangle AOC$ 的面积等于 $\frac{1}{2}|k|$, 从而求出 k 的值;

(2) 先将 $y=2x$ 与 $y=\frac{2}{x}$ 联立成方程组, 求出 A、B 两点的坐标, 然后分三种情况讨论:

①当 $AD \perp AB$ 时, 求出直线 AD 的关系式, 令 $y=0$, 即可确定 D 点的坐标; ②当 $BD \perp AB$ 时, 求出直线 BD 的关系式, 令 $y=0$, 即可确定 D 点的坐标; ③当 $AD \perp BD$ 时, 由 O

为线段 AB 的中点, 可得 $OD = \frac{1}{2}AB = OA$, 然后利用勾股定理求出 OA 的值, 即可求出

D 点的坐标.

解答: 解: (1) $\because$ 反比例函数与正比例函数的图象相交于 A、B 两点,

$\therefore$ A、B 两点关于原点对称,

$\therefore OA = OB$,

$\therefore \triangle BOC$ 的面积 $= \triangle AOC$ 的面积 $= 2 \div 2 = 1$,

又 $\because$ A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上的点, 且 $AC \perp x$ 轴于点 C,

$\therefore \triangle AOC$ 的面积 $= \frac{1}{2}|k|$,

$\therefore \frac{1}{2}|k| = 1$,

$\because k > 0$,

$\therefore k = 2$.

故这个反比例函数的解析式为 $y = \frac{2}{x}$;

(2) x 轴上存在一点 D, 使 $\triangle ABD$ 为直角三角形.

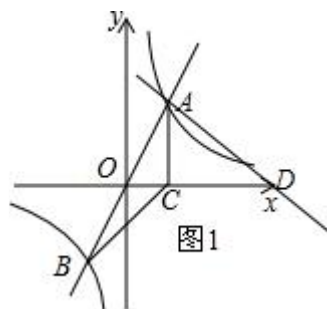
将 $y = 2x$ 与 $y = \frac{2}{x}$ 联立成方程组得:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{cases},$$

$\therefore A(1, 2), B(-1, -2)$,

①当 $AD \perp AB$ 时, 如图 1,



设直线 AD 的关系式为 $y = -\frac{1}{2}x + b$,

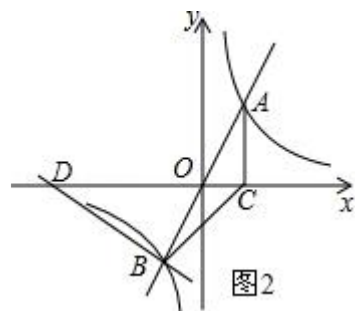
将 A (1, 2) 代入上式得: $b = \frac{5}{2}$,

∴ 直线 AD 的关系式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$,

令 $y=0$ 得: $x=5$,

∴ D (5, 0);

②当 $BD \perp AB$ 时, 如图 2,



设直线 BD 的关系式为 $y = -\frac{1}{2}x + b$,

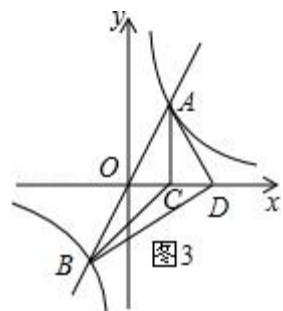
将 B (-1, -2) 代入上式得: $b = -\frac{5}{2}$,

∴ 直线 AD 的关系式为 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$,

令 $y=0$ 得: $x = -5$,

∴ D (-5, 0);

③当 $AD \perp BD$ 时, 如图 3,



∵ O 为线段 AB 的中点,

∴ $OD = \frac{1}{2}AB = OA$,

∵ A (1, 2),

∴ OC=1, AC=2,

由勾股定理得: $OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{5}$,

$$\therefore OD = \sqrt{5},$$

$$\therefore D(\sqrt{5}, 0).$$

根据对称性，当 D 为直角顶点，且 D 在 x 轴负半轴时， $D(-\sqrt{5}, 0)$ 。

故 x 轴上存在一点 D，使 $\triangle ABD$ 为直角三角形，点 D 的坐标为 $(5, 0)$ 或 $(-5, 0)$ 或 $(\sqrt{5}, 0)$ 或 $(-\sqrt{5}, 0)$ 。

点评：本题主要考查函数图象的交点及待定系数法求函数解析式，掌握图象的交点的坐标满足两个函数解析式是解题的关键。另外第 2 问要分 3 种情况讨论。

六、本大题共 2 小题，第 25 题 12 分，第 26 题 13 分，共 25 分。

25. (12 分) (2015·乐山) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，AB 是 $\odot O$ 的弦，斜边 AC 交 $\odot O$ 于点 D，且 $AD=DC$ ，延长 CB 交 $\odot O$ 于点 E。

(1) 图 1 的 A、B、C、D、E 五个点中，是否存在某两点间的距离等于线段 CE 的长？请说明理由；

(2) 如图 2，过点 E 作 $\odot O$ 的切线，交 AC 的延长线于点 F。

①若 $CF=CD$ 时，求 $\sin \angle CAB$ 的值；

②若 $CF=aCD$ ($a>0$) 时，试猜想 $\sin \angle CAB$ 的值。(用含 a 的代数式表示，直接写出结果)

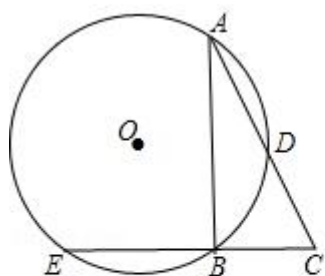


图1

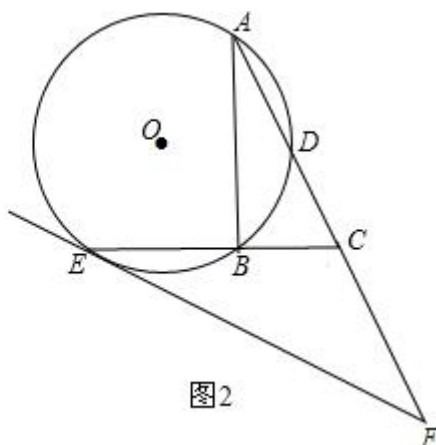


图2

考点：圆的综合题。

专题：探究型；存在型。

分析：(1) 连接 AE、DE，如图 1，根据圆周角定理可得 $\angle ADE = \angle ABE = 90^\circ$ ，由于 $AD=DC$ ，根据垂直平分线的性质可得 $AE=CE$ ；

(2) 连接 AE、ED，如图 2，由 $\angle ABE = 90^\circ$ 可得 AE 是 $\odot O$ 的直径，根据切线的性质

可得 $\angle AEF=90^\circ$ ，从而可证到 $\triangle ADE \sim \triangle AEF$ ，然后运用相似三角形的性质可得 $AE^2=AD \cdot AF$ 。①当 $CF=CD$ 时，可得 $AE^2=3CD^2$ ，从而有 $EC=AE=\sqrt{3}CD$ ，在 $Rt\triangle DEC$ 中运用三角函数可得 $\sin \angle CED = \frac{DC}{EC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，根据圆周角定理可得 $\angle CAB = \angle DEC$ ，即可求出 $\sin \angle CAB$ 的值；②当 $CF=aCD$ ($a>0$) 时，同①即可解决问题。

解答：解：(1) $AE=CE$ 。

理由：连接 AE 、 DE ，如图 1，

$$\because \angle ABC=90^\circ, \therefore \angle ABE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABE = 90^\circ.$$

$$\because AD=DC,$$

$$\therefore AE=CE;$$

(2) 连接 AE 、 ED ，如图 2，

$$\because \angle ABE=90^\circ, \therefore AE \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径}.$$

$$\because EF \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线},$$

$$\therefore \angle AEF=90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AEF = 90^\circ.$$

$$\text{又 } \because \angle DAE = \angle EAF,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle AEF,$$

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{AD}{AE},$$

$$\therefore AE^2 = AD \cdot AF.$$

①当 $CF=CD$ 时，

$$AD=DC=CF, AF=3DC,$$

$$\therefore AE^2 = DC \cdot 3DC = 3DC^2,$$

$$\therefore AE = \sqrt{3}DC.$$

$$\because EC=AE,$$

$$\therefore EC = \sqrt{3}DC.$$

$$\therefore \sin \angle CAB = \sin \angle CED = \frac{DC}{EC} = \frac{DC}{\sqrt{3}DC} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{②当 } CF=aCD \text{ (} a>0 \text{) 时, } \sin \angle CAB = \frac{\sqrt{a+2}}{a+2}.$$

提示: $\because CF=aCD, AD=DC,$

$$\therefore AF=AD+DC+CF=(a+2)CD,$$

$$\therefore AE^2=DC \cdot (a+2)DC=(a+2)DC^2,$$

$$\therefore AE=\sqrt{a+2}DC.$$

$$\therefore EC=AE,$$

$$\therefore EC=\sqrt{a+2}DC.$$

$$\therefore \sin \angle CAB = \sin \angle CED = \frac{DC}{EC} = \frac{DC}{\sqrt{a+2}DC} = \frac{\sqrt{a+2}}{a+2}.$$

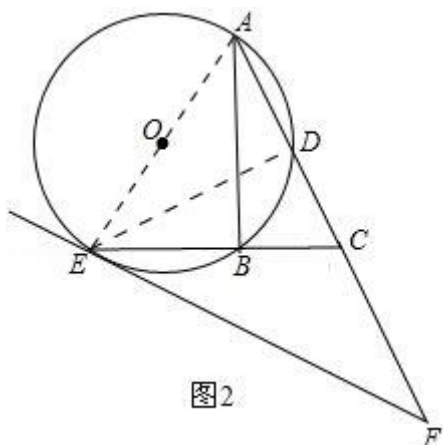


图2

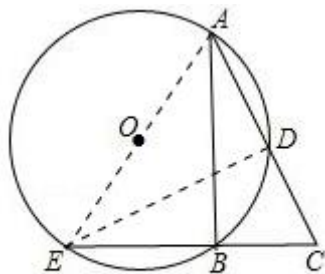


图1

点评: 本题主要考查了圆周角定理、相似三角形的判定与性质、三角函数、垂直平分线的性质的性质等知识, 利用 $\angle CAB = \angle CED$ 及 $AE = EC$ 是解决 (2)、(3) 两小题的关键.

26. (13 分) (2015•乐山) 如图 1, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴分别交于 A、B 两点, 与 y 轴交于点 C. 若 $\tan \angle ABC=3$, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 -8 、 2 .

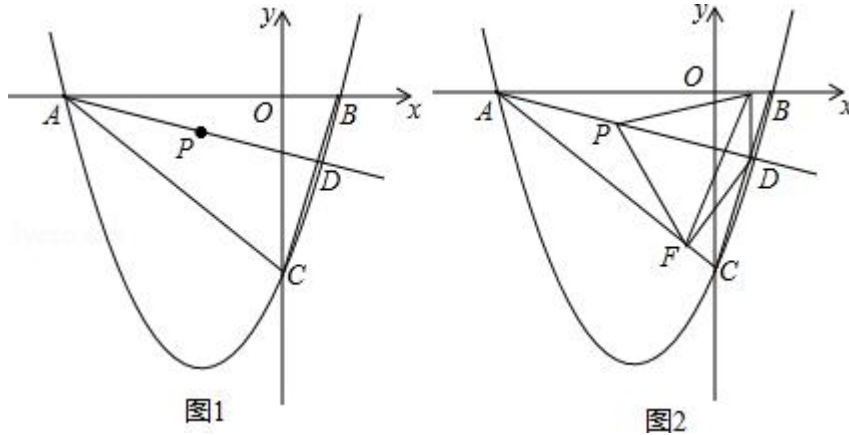
(1) 求二次函数的解析式;

(2) 直线 l 绕点 A 以 AB 为起始位置顺时针旋转到 AC 位置停止, l 与线段 BC 交于点 D, P 是 AD 的中点.

①求点 P 的运动路程;

②如图 2，过点 D 作 DE 垂直 x 轴于点 E，作 $DF \perp AC$ 所在直线于点 F，连结 PE、PF，在 l 运动过程中， $\angle EPF$ 的大小是否改变？请说明理由；

(3) 在 (2) 的条件下，连结 EF，求 $\triangle PEF$ 周长的最小值.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 利用 $\tan \angle ABC=3$ ，得出 C 点坐标，再利用待定系数法求出二次函数解析式；

(2) ①当 l 在 AB 位置时，P 即为 AB 的中点 H，当 l 运动到 AC 位置时，P 即为 AC 中点 K，则 P 的运动路程为 $\triangle ABC$ 的中位线 HK，再利用勾股定理得出答案；

②首先利用等腰三角形的性质得出 $\angle PAE = \angle PEA = \frac{1}{2} \angle EPD$ ，同理可得：

$\angle PAF = \angle PFA = \frac{1}{2} \angle DPF$ ，进而求出 $\angle EPF = \angle EPD + \angle FPD = 2(\angle PAE + \angle PAF)$ ，即可得出答案；

(3) 首先得出 $C_{\triangle PEF} = AD + EF$ ，进而得出 $EG = \frac{3}{5}PE$ ， $EF = \frac{6}{5}PE = \frac{3}{5}AD$ ，利用

$C_{\triangle PEF} = AD + EF = (1 + \frac{3}{5})AD = \frac{8}{5}AD$ ，得出最小值即可.

解答: 解：(1) $\because$ 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A、B 两点，且一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 两根为：-8, 2,

$\therefore A(-8, 0)$ 、 $B(2, 0)$ ，即 $OB=2$ ，

又 $\because \tan \angle ABC=3$ ， $\therefore OC=6$ ，即 $C(0, -6)$ ，

将 $A(-8, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 6$ 中，得：

$$\begin{cases} 64a - 8b - 6 = 0 \\ 4a + 2b - 6 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=\frac{3}{8} \\ b=\frac{9}{4} \end{cases},$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为: $y=\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{4}x-6$;

(2) ①如图 1, 当 l 在 AB 位置时, P 即为 AB 的中点 H ,

当 l 运动到 AC 位置时, P 即为 AC 中点 K ,

$\therefore P$ 的运动路程为 $\triangle ABC$ 的中位线 HK ,

$$\therefore HK=\frac{1}{2}BC,$$

在 $Rt\triangle BOC$ 中, $OB=2$, $OC=6$,

$$\therefore BC=2\sqrt{10}, \therefore HK=\sqrt{10},$$

即 P 的运动路程为: $\sqrt{10}$;

② $\angle EPF$ 的大小不会改变,

理由如下: 如图 2, $\because DE \perp AB$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AED$ 中, P 为斜边 AD 的中点,

$$\therefore PE=\frac{1}{2}AD=PA,$$

$$\therefore \angle PAE=\angle PEA=\frac{1}{2}\angle EPD,$$

同理可得: $\angle PAF=\angle PFA=\frac{1}{2}\angle DPF$,

$$\therefore \angle EPF=\angle EPD+\angle FPD=2(\angle PAE+\angle PAF),$$

即 $\angle EPF=2\angle EAF$,

又 $\because \angle EAF$ 大小不变,

$\therefore \angle EPF$ 的大小不会改变;

(3) 设 $\triangle PEF$ 的周长为 C , 则 $C_{\triangle PEF}=PE+PF+EF$,

$$\because PE=\frac{1}{2}AD, PF=\frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore C_{\triangle PEF}=AD+EF,$$

在等腰三角形 PEF 中, 如图 2, 过点 P 作 $PG \perp EF$ 于点 G ,

$$\begin{aligned}\therefore \angle EPC &= \frac{1}{2} \angle EPF = \angle BAC, \\ \therefore \tan \angle BAC &= \frac{OC}{AO} = \frac{3}{4}, \\ \therefore \tan \angle EPG &= \frac{EG}{PG} = \frac{3}{4}, \\ \therefore EG &= \frac{3}{5} PE, \quad EF = \frac{6}{5} PE = \frac{3}{5} AD, \\ \therefore C_{\triangle PEF} &= AD + EF = \left(1 + \frac{3}{5}\right) AD = \frac{8}{5} AD,\end{aligned}$$

又当 $AD \perp BC$ 时, AD 最小, 此时 $C_{\triangle PEF}$ 最小,

又 $S_{\triangle ABC} = 30$,

$$\therefore \frac{1}{2} BC \times AD = 30,$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{10},$$

$$\therefore C_{\triangle PEF} \text{ 最小值为: } \frac{8}{5} AD = \frac{24}{5} \sqrt{10}.$$

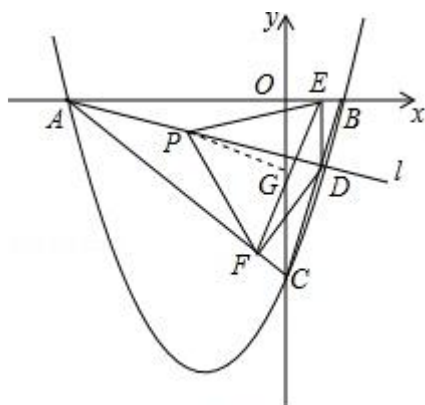


图2

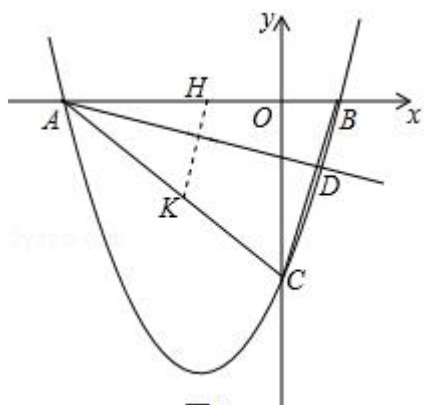


图1

点评: 此题主要考查了二次函数综合以及待定系数法求二次函数解析式和直角三角形中线的性质等知识, 用 AD 表示出 $\triangle PEF$ 的周长是解题关键.

