

2013 年四川省自贡市中考数学试卷

一、选择题（共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分）

1.（4 分）与 -3 的差为 0 的数是（ ）

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

2.（4 分）在我国南海某海域探明可燃冰储量约有 194 亿立方米. 194 亿用科学记数法表示为（ ）

- A. 1.94×10^{10} B. 0.194×10^{10} C. 19.4×10^9 D. 1.94×10^9

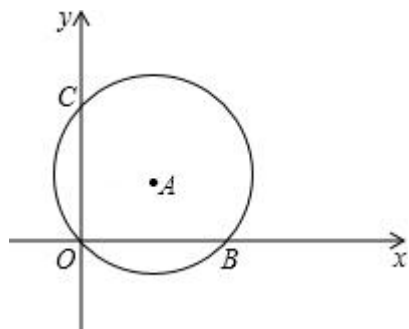
3.（4 分）某班七个合作学习小组人数如下：4、5、5、 x 、6、7、8，已知这组数据的平均数是 6，则这组数据的中位数是（ ）

- A. 5 B. 5.5 C. 6 D. 7

4.（4 分）在四张背面完全相同的卡片上分别印有等腰三角形、平行四边形、菱形、圆的图案，现将印有图案的一面朝下，混合后从中随机抽取两张，则抽到卡片上印有的图案都是轴对称图形的概率为（ ）

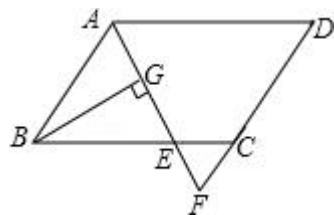
- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

5.（4 分）如图，在平面直角坐标系中， $\odot A$ 经过原点 O ，并且分别与 x 轴、 y 轴交于 B 、 C 两点，已知 $B(8, 0)$ ， $C(0, 6)$ ，则 $\odot A$ 的半径为（ ）



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 8

6.（4 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， $AD=9$ ， $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于 E ，交 DC 的延长线于 F ， $BG \perp AE$ 于 G ， $BG=4\sqrt{2}$ ，则 $\triangle EFC$ 的周长为（ ）



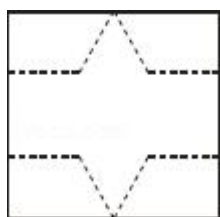
- A. 11 B. 10 C. 9 D. 8

7. (4分) 某超市货架上摆放着某品牌红烧牛肉方便面，如图是它们的三视图，则货架上的红烧牛肉方便面至少有 ()



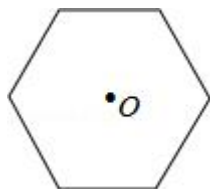
- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

8. (4分) 如图，将一张边长为 3 的正方形纸片按虚线裁剪后，恰好围成一个底面是正三角形的棱柱，这个棱柱的侧面积为 ()



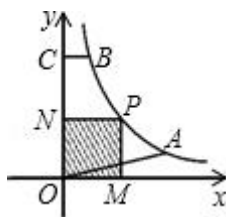
- A. 9 B. $9 - 3\sqrt{3}$ C. $9 - \frac{5}{2}\sqrt{3}$ D. $9 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$

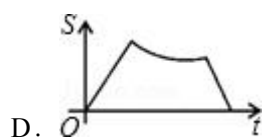
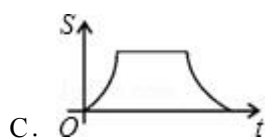
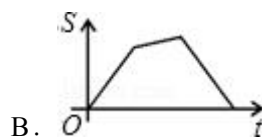
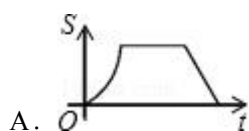
9. (4分) 如图，点 O 是正六边形的对称中心，如果用一副三角板的角，借助点 O (使该角的顶点落在点 O 处)，把这个正六边形的面积 n 等分，那么 n 的所有可能取值的个数是 ()



- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

10. (4分) 如图，已知 A 、 B 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$, $x > 0$) 上的两点， $BC \parallel x$ 轴，交 y 轴于 C ，动点 P 从坐标原点 O 出发，沿 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ 匀速运动，终点为 C ，过运动路线上任意一点 P 作 $PM \perp x$ 轴于 M ， $PN \perp y$ 轴于 N ，设四边形 $OMPN$ 的面积为 S ， P 点运动的时间为 t ，则 S 关于 t 的函数图象大致是 ()



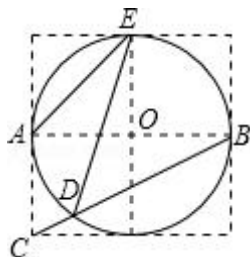


二、填空题（共5个小题，每小题4分，共20分）

11.（4分）多项式 $ax^2 - a$ 与多项式 $x^2 - 2x + 1$ 的公因式是_____.

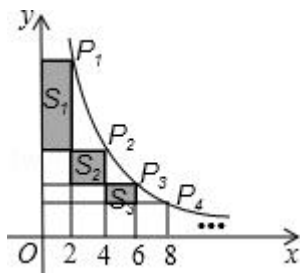
12.（4分）计算： $2013^0 + (\frac{1}{2})^{-1} - 2\sin 60^\circ - |\sqrt{3} - 2| =$ _____.

13.（4分）如图，边长为1的小正方形网格中， $\odot O$ 的圆心在格点上，则 $\angle AED$ 的余弦值是_____.



14.（4分）已知关于 x 的方程 $x^2 - (a+b)x + ab - 1 = 0$, x_1, x_2 是此方程的两个实数根，现给出三个结论：① $x_1 \neq x_2$; ② $x_1 x_2 < ab$; ③ $x_1^2 + x_2^2 < a^2 + b^2$. 则正确结论的序号是_____. (填上你认为正确结论的所有序号)

15.（4分）如图，在函数 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 的图象上有点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, P_{n+1}$ ，点 P_1 的横坐标为2，且后面每个点的横坐标与它前面相邻点的横坐标的差都是2，过点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, P_{n+1}$ 分别作 x 轴、 y 轴的垂线段，构成若干个矩形，如图所示，将图中阴影部分的面积从左至右依次记为 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ，则 $S_1 =$ _____, $S_n =$ _____. (用含 n 的代数式表示)



三、解答题（共2个题，每题8分，共16分）

16. (8分) 解不等式组:
$$\begin{cases} 3(x-2) \geq x-4 & \text{①} \\ \frac{2x+1}{3} > x-1 & \text{②} \end{cases}$$
 并写出它的所有的整数解.

17. (8分) 先化简 $(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}) \div \frac{a}{2a^2-2}$, 然后从 $1, \sqrt{2}, -1$ 中选取一个你认为合适的数作为 a 的值代入求值.

四、解答题 (共 2 个题, 每小题 8 分, 共 16 分)

18. (8分) 用配方法解关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$.

19. (8分) 某校住校生宿舍有大小两种寝室若干间, 据统计该校高一年级男生 740 人, 使用了 55 间大寝室和 50 间小寝室, 正好住满; 女生 730 人, 使用了大寝室 50 间和小寝室 55 间, 也正好住满.

(1) 求该校的大小寝室每间各住多少人?

(2) 预测该校今年招收的高一新生中有不少于 630 名女生将入住寝室 80 间, 问该校有多少种安排住宿的方案?

五、解答题 (共 2 个题, 每题 10 分, 共 20 分)

20. (10分) 为配合我市创建省级文明城市, 某校对八年级各班文明行为劝导志愿者人数进行了统计, 各班统计人数有 6 名、5 名、4 名、3 名、2 名、1 名共计六种情况, 并制作如下两幅不完整的统计图.

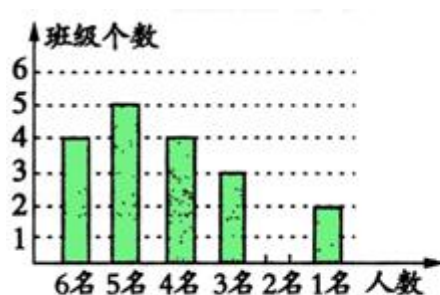


图1



图2

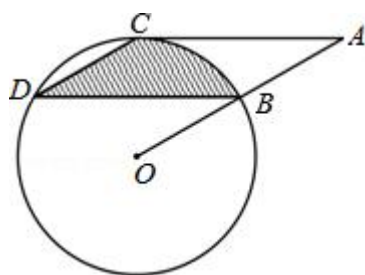
(1) 求该年级平均每班有多少文明行为劝导志愿者? 并将条形图补充完整;

(2) 该校决定本周开展主题实践活动, 从八年级只有 2 名文明行为劝导志愿者的班级中任选两名, 请用列表或画树状图的方法, 求出所选文明行为劝导志愿者有两名来自同一班级的概率.

21. (10分) 如图, 点 B, C, D 都在 $\odot O$ 上, 过点 C 作 $AC \parallel BD$ 交 OB 延长线于点 A , 连接 CD , 且 $\angle CDB = \angle OBD = 30^\circ$, $DB = 6\sqrt{3}cm$.

(1) 求证: AC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 求由弦 CD 、 BD 与弧 BC 所围成的阴影部分的面积. (结果保留 π)

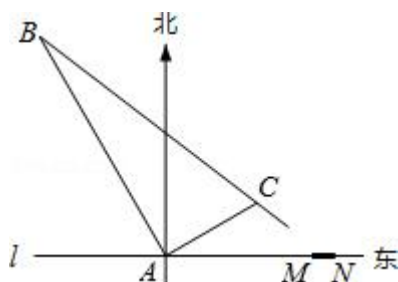


六、解答题 (本题满分 12 分)

22. (12 分) 在东西方向的海岸线 l 上有一长为 1km 的码头 MN (如图), 在码头西端 M 的正西 19.5km 处有一观察站 A . 某时刻测得一艘匀速直线航行的轮船位于 A 的北偏西 30° , 且与 A 相距 40km 的 B 处; 经过 1 小时 20 分钟, 又测得该轮船位于 A 的北偏东 60° , 且与 A 相距 $8\sqrt{3}\text{km}$ 的 C 处.

(1) 求该轮船航行的速度 (保留精确结果);

(2) 如果该轮船不改变航向继续航行, 那么轮船能否正好行至码头 MN 靠岸? 请说明理由.



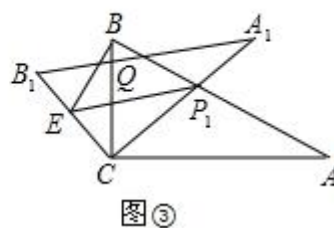
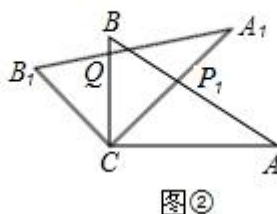
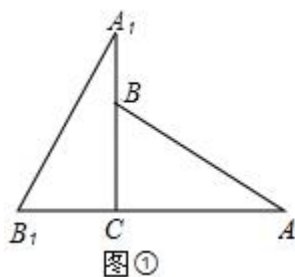
七、解答题 (本题满分 12 分)

23. (12 分) 将两块全等的三角板如图①摆放, 其中 $\angle A_1CB_1 = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A_1 = \angle A = 30^\circ$.

(1) 将图①中的 $\triangle A_1B_1C$ 顺时针旋转 45° 得图②, 点 P_1 是 A_1C 与 AB 的交点, 点 Q 是 A_1B_1 与 BC 的交点, 求证: $CP_1 = CQ$;

(2) 在图②中, 若 $AP_1 = 2$, 则 CQ 等于多少?

(3) 如图③, 在 B_1C 上取一点 E , 连接 BE 、 P_1E , 设 $BC = 1$, 当 $BE \perp P_1B$ 时, 求 $\triangle P_1BE$ 面积的最大值.



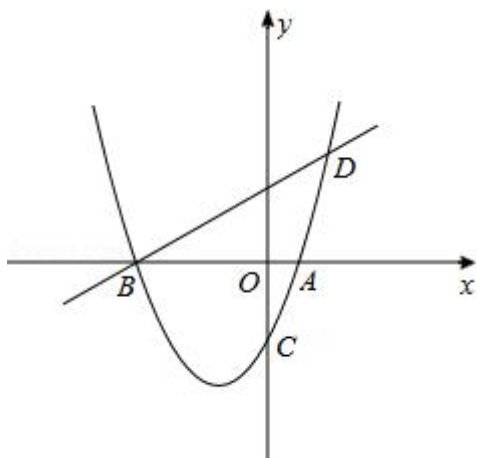
八、解答题（本题满分 14 分）

24.（14 分）如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于 C 点，直线 BD 交抛物线于点 D ，并且 $D(2, 3)$ ， $\tan \angle DBA = \frac{1}{2}$.

（1）求抛物线的解析式；

（2）已知点 M 为抛物线上一动点，且在第三象限，顺次连接点 B 、 M 、 C 、 A ，求四边形 $BMCA$ 面积的最大值；

（3）在（2）中四边形 $BMCA$ 面积最大的条件下，过点 M 作直线平行于 y 轴，在这条直线上是否存在一个以 Q 点为圆心， OQ 为半径且与直线 AC 相切的圆？若存在，求出圆心 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.



2013 年四川省自贡市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 【分析】与 -3 的差为 0 的数就是 $-3+0$ ，据此即可求解．

【解答】解： $-3+0 = -3$ ．

故选：B．

【点评】本题考查了有理数的减法运算，正确列出式子是关键．

2. 【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数．

【解答】解：194 亿 $= 19400000000$ ，用科学记数法表示为： 1.94×10^{10} ．

故选：A．

【点评】此题考查了科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

3. 【分析】根据平均数的定义先求出这组数据 x ，再将这组数据从小到大排列，然后找出最中间的数即可．

【解答】解： $\because 4、5、5、x、6、7、8$ 的平均数是 6 ，

$$\therefore (4+5+5+x+6+7+8) \div 7 = 6,$$

解得： $x = 7$ ，

将这组数据从小到大排列为 $4、5、5、6、7、7、8$ ，

最中间的数是 6 ；

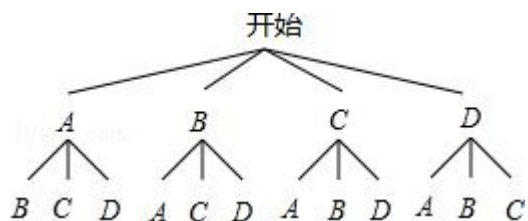
则这组数据的中位数是 6 ；

故选：C．

【点评】此题考查了中位数，掌握中位数的概念是解题的关键，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（最中间两个数的平均数）．

4. 【分析】首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与抽到卡片上印有的图案都是轴对称图形的情况，再利用概率公式求解即可求得答案．

【解答】解：分别用 $A、B、C、D$ 表示等腰三角形、平行四边形、菱形、圆，画树状图得：



$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果，抽到卡片上印有的图案都是轴对称图形的有 6 种情况，

$\therefore$ 抽到卡片上印有的图案都是轴对称图形的概率为： $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

故选：D.

【点评】 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．注意概率 = 所求情况数与总情况数之比．

5. **【分析】** 连接 BC ，由 90° 度的圆周角所对的弦为直径，得到 BC 为圆 A 的直径，在直角三角形 BOC 中，由 OB 与 OC 的长，利用勾股定理求出 BC 的长，即可确定出圆 A 的半径．

【解答】 解：连接 BC ，

$\because \angle BOC = 90^\circ$ ，

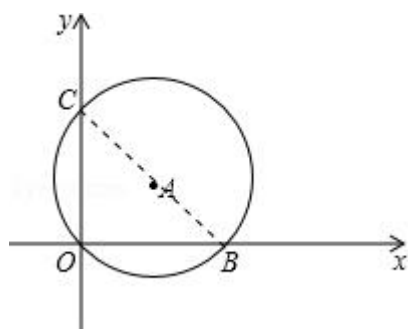
$\therefore BC$ 为圆 A 的直径，即 BC 过圆心 A ，

在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中， $OB = 8$ ， $OC = 6$ ，

根据勾股定理得： $BC = 10$ ，

则圆 A 的半径为 5．

故选：C．



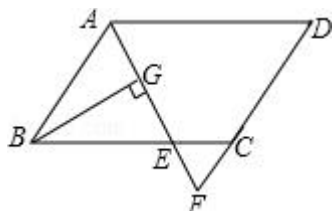
【点评】 此题考查了圆周角定理，坐标与图形性质，以及勾股定理，熟练掌握圆周角定理是解本题的关键．

6. **【分析】** 判断出 $\triangle ADF$ 是等腰三角形， $\triangle ABE$ 是等腰三角形， DF 的长度，继而得到 EC 的长度，在 $\text{Rt}\triangle BGE$ 中求出 GE ，继而得到 AE ，求出 $\triangle ABE$ 的周长，根据相似三角形的周长之比等于相似比，可得出 $\triangle EFC$ 的周长．

【解答】 解： $\because$ 在 $\square ABCD$ 中， $AB = CD = 6$ ， $AD = BC = 9$ ， $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E ，

$\therefore \angle BAF = \angle DAF$,
 $\because AB \parallel DF, AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle BAF = \angle F = \angle DAF, \angle BAE = \angle AEB$,
 $\therefore AB = BE = 6, AD = DF = 9$,
 $\therefore \triangle ADF$ 是等腰三角形, $\triangle ABE$ 是等腰三角形,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \triangle EFC$ 是等腰三角形, 且 $CF = CE$,
 $\therefore EC = FC = DF - DC = 9 - 6 = 3, \frac{CE}{BE} = \frac{1}{2}$,
 在 $\triangle ABG$ 中, $BG \perp AE, AB = 6, BG = 4\sqrt{2}$,
 $\therefore AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = 2$,
 $\therefore AE = 2AG = 4$,
 $\therefore \triangle ABE$ 的周长等于 16,
 又 $\because \triangle CEF \sim \triangle BEA$, 相似比为 1:2,
 $\therefore \triangle CEF$ 的周长为 8.

故选: D.



【点评】 本题主要考查了勾股定理、相似三角形、等腰三角形的性质, 注意掌握相似三角形的周长之比等于相似比, 此题难度较大.

7. 【分析】 主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看, 所得到的图形.

【解答】 解: 易得第一层有 4 碗, 第二层最少有 3 碗, 第三层最少有 2 碗, 所以至少共有 9 个碗.

故选: B.

【点评】 考查学生对三视图掌握程度和灵活运用能力, 同时也体现了对空间想象能力方面的考查. 如果掌握口诀“俯视图打地基, 正视图疯狂盖, 左视图拆违章”就更容易得到答案.

8. 【分析】 这个棱柱的侧面展开正好是一个长方形, 长为 3, 宽为 3, 减去两个三角形的高, 再用长方形的面积公式计算即可解答.

【解答】解：∵将一张边长为 3 的正方形纸片按虚线裁剪后，恰好围成一个底面是正三角形的棱柱，

∴这个正三角形的底面边长为 1，高为 $\sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

∴侧面积为长为 3，宽为 $3 - \sqrt{3}$ 的长方形，面积为 $9 - 3\sqrt{3}$ 。

故选：B。

【点评】此题主要考查了剪纸问题的实际应用，动手操作拼出图形，并能正确进行计算是解答本题的关键。

9. 【分析】根据圆内接正多边形的性质可知，只要把此正六边形再化为正多边形即可，即让周角除以 30 的倍数就可以解决问题。

【解答】解： $360^\circ \div 30^\circ = 12$ ；

$360^\circ \div 60^\circ = 6$ ；

$360^\circ \div 90^\circ = 4$ ；

$360^\circ \div 120^\circ = 3$ ；

$360^\circ \div 180^\circ = 2$ ；

因此 n 的所有可能的值共 5 种情况，

故选：B。

【点评】本题考查了正多边形和圆，只需让周角除以 30° 的倍数即可。

10. 【分析】通过两段的判断即可得出答案，①点 P 在 AB 上运动时，此时四边形 $OMPN$ 的面积不变，可以排除 B 、 D ；②点 P 在 BC 上运动时， S 减小， S 与 t 的关系为一次函数，从而排除 C 。

【解答】解：①点 P 在 AB 上运动时，此时四边形 $OMPN$ 的面积 $S = K$ ，保持不变，故排除 B 、 D ；

②点 P 在 BC 上运动时，设路线 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ 的总路程为 l ，点 P 的速度为 a ，则 $S = OC \times CP = OC \times (l - at)$ ，因为 l ， OC ， a 均是常数，

所以 S 与 t 成一次函数关系。故排除 C 。

故选：A。

【点评】本题考查了动点问题的函数图象，解答此类题目并不要求出函数解析式，只要判断出函数的增减性，或者函数的性质即可，注意排除法的运用。

二、填空题（共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

11. 【分析】第一个多项式提取 a 后，利用平方差公式分解，第二个多项式利用完全平方公式分解，找出公因式即可.

【解答】解：多项式 $ax^2 - a = a(x+1)(x-1)$ ，多项式 $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ ，

则两多项式的公因式为 $x-1$.

故答案为： $x-1$.

【点评】此题考查了公因式，将两多项式分解因式是找公因式的关键.

12. 【分析】本题涉及零指数幂、负指数幂、特殊角的三角函数值、绝对值等四个考点. 针对每个考点分别进行计算，然后根据实数的运算法则求得计算结果.

【解答】解：原式 $= 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - (2 - \sqrt{3})$

$$= 1 + 2 - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}$$

$$= 1,$$

故答案为：1.

【点评】本题考查实数的综合运算能力，是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值，熟练掌握负零指数幂、负指数幂、特殊角的三角函数值、绝对值等考点的运算.

13. 【分析】根据同弧所对的圆周角相等得到 $\angle ABC = \angle AED$ ，在直角三角形 ABC 中，利用锐角三角函数定义求出 $\cos \angle ABC$ 的值，即为 $\cos \angle AED$ 的值.

【解答】解： $\because \angle AED$ 与 $\angle ABC$ 都对 $\widehat{AD}$ ，

$$\therefore \angle AED = \angle ABC,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 2$ ， $AC = 1$ ，

根据勾股定理得： $BC = \sqrt{5}$ ，

$$\text{则 } \cos \angle AED = \cos \angle ABC = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故答案为： $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【点评】此题考查了圆周角定理，锐角三角函数定义，以及勾股定理，熟练掌握圆周角定理是解本题的关键.

14. 【分析】(1) 可以利用方程的判别式就可以判定是否正确；

(2) 根据两根之积就可以判定是否正确；

(3) 利用根与系数的关系可以求出 $x_1^2 + x_2^2$ 的值，然后也可以判定是否正确.

【解答】解：① $\because$ 方程 $x^2 - (a+b)x + ab - 1 = 0$ 中，

$$\Delta = (a+b)^2 - 4(ab-1) = (a-b)^2 + 4 > 0,$$

$$\therefore x_1 \neq x_2$$

故①正确；

② $\because x_1x_2 = ab - 1 < ab$ ，故②正确；

③ $\because x_1 + x_2 = a + b$ ，

$$\text{即 } (x_1 + x_2)^2 = (a + b)^2,$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a + b)^2 - 2ab + 2 = a^2 + b^2 + 2 > a^2 + b^2,$$

$$\text{即 } x_1^2 + x_2^2 > a^2 + b^2.$$

故③错误；

综上所述，正确的结论序号是：①②.

故答案是：①②.

【点评】本题考查的是一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系，及一元二次方程根与系数的关系，需同学们熟练掌握.

15. 【分析】求出 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 ... 的纵坐标，从而可计算出 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ... 的高，进而求出 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ...，从而得出 S_n 的值.

【解答】解：当 $x = 2$ 时， P_1 的纵坐标为 4，

当 $x = 4$ 时， P_2 的纵坐标为 2，

当 $x = 6$ 时， P_3 的纵坐标为 $\frac{4}{3}$ ，

当 $x = 8$ 时， P_4 的纵坐标为 1，

当 $x = 10$ 时， P_5 的纵坐标为： $\frac{4}{5}$ ，

...

$$\text{则 } S_1 = 2 \times (4 - 2) = 4 = 2 \left[\frac{8}{2 \times 1} - \frac{8}{2 \times (1+1)} \right];$$

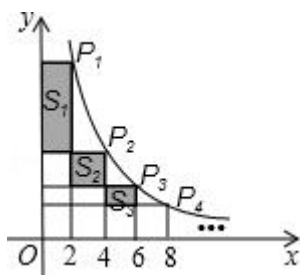
$$S_2 = 2 \times \left(2 - \frac{4}{3} \right) = 2 \times \frac{2}{3} = 2 \left[\frac{8}{2 \times 2} - \frac{8}{2 \times (2+1)} \right];$$

$$S_3 = 2 \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) = 2 \times \frac{1}{3} = 2 \left[\frac{8}{2 \times 3} - \frac{8}{2 \times (3+1)} \right];$$

...

$$S_n = 2 \left[\frac{8}{2n} - \frac{8}{2(n+1)} \right] = \frac{8}{n(n+1)};$$

故答案为: $4; \frac{8}{n(n+1)}$.



【点评】此题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，根据坐标求出各阴影的面积表达式是解题的关键.

三、解答题（共2个题，每题8分，共16分）

16. 【分析】先求出两个不等式的解集，再求其公共解，然后写出整数解即可.

【解答】解:
$$\begin{cases} 3(x-2) \geq x-4 & \text{①} \\ \frac{2x+1}{3} > x-1 & \text{②} \end{cases}$$

解不等式①得, $x \geq 1$,

解不等式②得, $x < 4$,

所以, 不等式组的解集是 $1 \leq x < 4$,

所以, 不等式组的所有整数解是 1、2、3.

【点评】本题主要考查了一元一次不等式组解集的求法, 其简便求法就是用口诀求解. 求不等式组解集的口诀: 同大取大, 同小取小, 大小小大中间找, 大大小小找不到 (无解).

17. 【分析】先算括号内的减法, 同时把除法变成乘法, 再根据分式的乘法进行计算, 最后代入求出即可.

【解答】解:
$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} \right) \div \frac{a}{2a^2-2} \\ &= \frac{(a+1)-(a-1)}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{2(a+1)(a-1)}{a} \\ &= \frac{4}{a}, \end{aligned}$$

$\because a \neq \pm 1$,

$\therefore$ 当 $a = \sqrt{2}$ 时, 原式 $= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

【点评】本题考查了分式的化简求值, 能正确根据分式的运算法则进行化简是解此题的关键.

四、解答题（共2个题，每小题8分，共16分）

18. 【分析】此题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确应用，把左边配成完全平方式，右边化为常数.

【解答】解：∵关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，

∴ $a \neq 0$.

∴由原方程，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

等式的两边都加上 $(\frac{b}{2a})^2$ ，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2,$$

配方，得

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a^2},$$

当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，

$$\text{开方，得：} x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，解得： $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ；

当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，原方程无实数根.

【点评】本题考查了配方法解一元二次方程. 用配方法解一元二次方程的步骤：

(1) 形如 $x^2+px+q=0$ 型：第一步移项，把常数项移到右边；第二步配方，左右两边加上一次项系数一半的平方；第三步左边写成完全平方式；第四步，直接开方即可.

(2) 形如 $ax^2+bx+c=0$ 型，方程两边同时除以二次项系数，即化成 $x^2+px+q=0$ ，然后配方.

19. 【分析】(1) 首先设该校的大寝室每间住 x 人，小寝室每间住 y 人，根据关键语句“高一年级男生 740 人，使用了 55 间大寝室和 50 间小寝室，正好住满；女生 730 人，使用了大寝室 50 间和小寝室 55 间，也正好住满”列出方程组即可；

(2) 设大寝室 a 间，则小寝室 $(80 - a)$ 间，由题意可得 $a \leq 80$ ，再根据关键语句“高一新生中有不少于 630 名女生将入住寝室 80 间”可得不等式 $8a + 6(80 - a) \geq 630$ ，解不

等式组即可.

【解答】解: (1) 设该校的大寝室每间住 x 人, 小寝室每间住 y 人, 由题意得:

$$\begin{cases} 55x+50y=740 \\ 50x+55y=730 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases},$$

答: 该校的大寝室每间住 8 人, 小寝室每间住 6 人;

(2) 设大寝室 a 间, 则小寝室 $(80-a)$ 间, 由题意得:

$$\begin{cases} 8a+6(80-a) \geq 630 \\ a \leq 80 \end{cases},$$

解得: $80 \geq a \geq 75$,

① $a=75$ 时, $80-a=5$,

② $a=76$ 时, $80-a=4$,

③ $a=77$ 时, $80-a=3$,

④ $a=78$ 时, $80-a=2$,

⑤ $a=79$ 时, $80-a=1$,

⑥ $a=80$ 时, $80-a=0$.

答: 共有 6 种安排住宿的方案.

【点评】此题主要考查了二元一次方程组的应用, 以及一元一次不等式组的应用, 关键是正确理解题意, 抓住题目中的关键语句, 列出方程和不等式.

五、解答题 (共 2 个题, 每题 10 分, 共 20 分)

20. **【分析】**(1) 根据志愿者有 6 名的班级占 20%, 可求得班级总数, 再求得志愿者是 2 名的班数, 进而可求出每个班级平均的志愿者人数;

(2) 由 (1) 得只有 2 名志愿者的班级有 2 个, 共 4 名学生. 设 A_1, A_2 来自一个班, B_1, B_2 来自一个班, 列出树状图可得来自一个班的共有 4 种情况, 则所选两名志愿者来自同一个班级的概率.

【解答】解: (1) $\because$ 有 6 名志愿者的班级有 4 个,

$\therefore$ 班级总数为: $4 \div 20\% = 20$ (个),

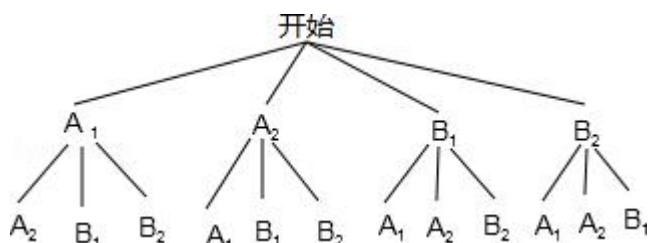
有两名志愿者的班级有:

$20 - 4 - 5 - 4 - 3 - 2 = 2$ (个), 如图所示:

该年级平均每班有;

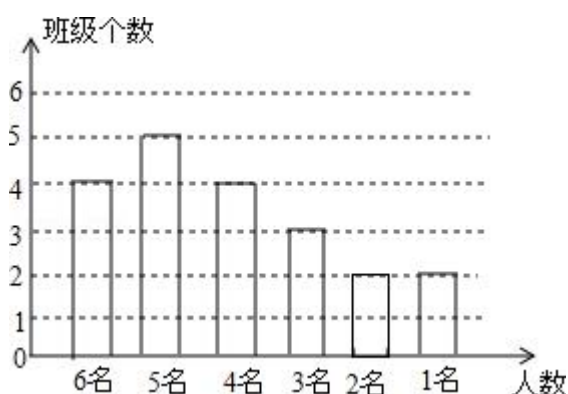
$$\frac{1}{20} (4 \times 6 + 5 \times 5 + 4 \times 4 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 1) = 4 \text{ (名)},$$

(2) 由(1)得只有 2 名文明行为劝导志愿者的班级有 2 个, 共 4 名学生. 设 A_1, A_2 来自一个班, B_1, B_2 来自一个班,



由树状图可知, 共有 12 种可能的情况, 并且每种结果出现的可能性相等, 其中来自一个班的共有 4 种情况,

则所选两名文明行为劝导志愿者来自同一个班级的概率为: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.



【点评】 此题主要考查了条形统计图与扇形统计图的综合应用以及树状图法求概率, 根据图象得出正确信息是解题关键.

21. **【分析】** (1) 求出 $\angle COB$ 的度数, 求出 $\angle A$ 的度数, 根据三角形的内角和定理求出 $\angle OCA$ 的度数, 根据切线的判定推出即可;

(2) 如解答图所示, 解题关键是证明 $\triangle CDM \cong \triangle OBM$, 从而得到 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} BOC}$.

【解答】 如图, 连接 BC, OD, OC , 设 OC 与 BD 交于点 M .

(1) 证明: 根据圆周角定理得: $\angle COB = 2\angle CDB = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$,

$\because AC \parallel BD$,

$\therefore \angle A = \angle OBD = 30^\circ$,

$\therefore \angle OCA = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$,

即 $OC \perp AC$,

$\because OC$ 为半径,

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: 由 (1) 知, AC 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OC \perp AC$.

$\because AC \parallel BD$,

$\therefore OC \perp BD$.

由垂径定理可知, $MD = MB = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle OBM$ 中, $\angle COB = 60^\circ$, $OB = \frac{MB}{\cos 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6$.

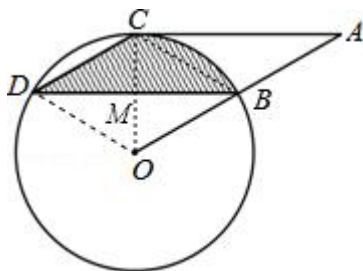
在 $\triangle CDM$ 与 $\triangle OBM$ 中,

$$\begin{cases} \angle CDM = \angle OBM = 30^\circ \\ MD = MB \\ \angle CMD = \angle OMB = 90^\circ \end{cases}$$

$\therefore \triangle CDM \cong \triangle OBM$ (ASA),

$\therefore S_{\triangle CDM} = S_{\triangle OBM}$

$\therefore$ 阴影部分的面积 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} BOC} = \frac{60\pi \cdot 6^2}{360} = 6\pi$ (cm^2).



【点评】 本题考查了平行线性质的判定, 切线的判定, 扇形的面积, 三角形的面积, 圆周角定理的应用, 主要考查学生综合运用定理进行推理和计算的能力.

六、解答题 (本题满分 12 分)

22. **【分析】** (1) 根据 $\angle 1 = 30^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$, 可知 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 根据勾股定理解答.

(2) 延长 BC 交 l 于 T , 比较 AT 与 AM 、 AN 的大小即可得出结论.

【解答】 解: (1) $\because \angle 1 = 30^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

$$\because AB = 40km, AC = 8\sqrt{3}km,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{40^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16\sqrt{7} (km).$$

$$\because 1 \text{ 小时 } 20 \text{ 分钟} = 80 \text{ 分钟}, 1 \text{ 小时} = 60 \text{ 分钟},$$

$$\therefore \frac{16\sqrt{7}}{80} \times 60 = 12\sqrt{7} (\text{千米/小时}).$$

(2) 能.

理由: 作线段 $BR \perp AN$ 于 R , 作线段 $CS \perp AN$ 于 S , 延长 BC 交 l 于 T .

$$\because \angle 2 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 4 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

$$\because AC = 8\sqrt{3} (km),$$

$$\therefore CS = 8\sqrt{3} \sin 30^\circ = 4\sqrt{3} (km).$$

$$\therefore AS = 8\sqrt{3} \cos 30^\circ = 8\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 (km).$$

$$\text{又 } \because \angle 1 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

$$\because AB = 40km,$$

$$\therefore BR = 40 \cdot \sin 60^\circ = 20\sqrt{3} (km).$$

$$\therefore AR = 40 \times \cos 60^\circ = 40 \times \frac{1}{2} = 20 (km).$$

易得, $\triangle STC \sim \triangle RTB$,

$$\text{所以 } \frac{ST}{RT} = \frac{CS}{BR},$$

$$\frac{ST}{ST+20+12} = \frac{4\sqrt{3}}{20\sqrt{3}},$$

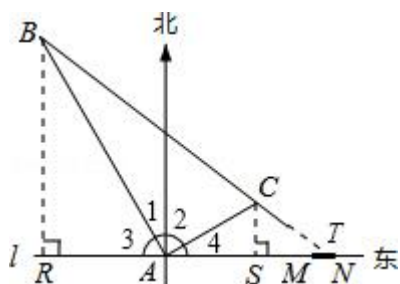
$$\text{解得: } ST = 8 (km).$$

$$\text{所以 } AT = 12+8 = 20 (km).$$

$$\text{又因为 } AM = 19.5km, MN \text{ 长为 } 1km, \therefore AN = 20.5km,$$

$$\because 19.5 < AT < 20.5$$

故轮船能够正好行至码头 MN 靠岸.



【点评】此题结合方向角，考查了阅读理解能力、解直角三角形的能力．计算出相关特殊角和作出辅助线构造相似三角形是解题的关键．

七、解答题（本题满分 12 分）

23. 【分析】（1）先判断 $\angle B_1CQ = \angle BCP_1 = 45^\circ$ ，利用 ASA 即可证明 $\triangle B_1CQ \cong \triangle BCP_1$ ，从而得出结论．

（2）作 $P_1D \perp CA$ 于 D ，在 $Rt\triangle ADP_1$ 中，求出 P_1D ，在 $Rt\triangle CDP_1$ 中求出 CP_1 ，继而可得出 CQ 的长度．

（3）证明 $\triangle AP_1C \sim \triangle BEC$ ，则有 $AP_1 : BE = AC : BC = \sqrt{3} : 1$ ，设 $AP_1 = x$ ，则 $BE = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，得出 $S_{\triangle P_1BE}$ 关于 x 的表达式，利用配方法求最值即可．

【解答】（1）证明： $\because \angle B_1CB = 45^\circ$ ， $\angle B_1CA_1 = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle B_1CQ = \angle BCP_1 = 45^\circ$ ，

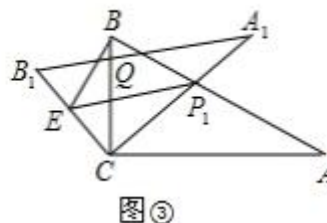
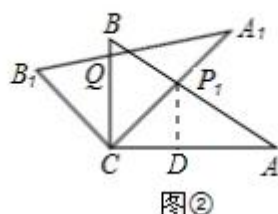
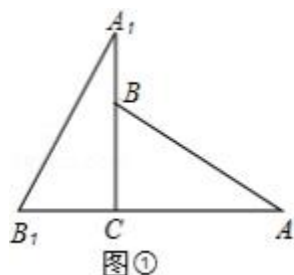
$\because$ 在 $\triangle B_1CQ$ 和 $\triangle BCP_1$ 中，

$$\begin{cases} \angle B_1CQ = \angle BCP_1 \\ B_1C = BC \\ \angle B_1 = \angle B \end{cases},$$

$\therefore \triangle B_1CQ \cong \triangle BCP_1 (ASA)$ ，

$\therefore CQ = CP_1$ ；

（2）作 $P_1D \perp CA$ 于 D ，



$\because \angle A = 30^\circ$ ，

$$\therefore P_1D = \frac{1}{2}AP_1 = 1,$$

$$\because \angle P_1CD = 45^\circ,$$

$$\therefore \frac{P_1D}{CP_1} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore CP_1 = \sqrt{2}P_1D = \sqrt{2},$$

$$\text{又} \because CP_1 = CQ,$$

$$\therefore CQ = \sqrt{2};$$

$$(3) \because \angle P_1BE = 90^\circ, \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle CBE = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{3}BC,$$

由旋转的性质可得: $\angle ACP_1 = \angle BCE$,

$$\therefore \triangle AP_1C \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore AP_1 : BE = AC : BC = \sqrt{3} : 1,$$

$$\text{设 } AP_1 = x, \text{ 则 } BE = \frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$,

$$\therefore AB = 2BC = 2,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle P_1BE} &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}x(2-x) = -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{6}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}, \end{aligned}$$

$$\text{故当 } x = 1 \text{ 时, } S_{\triangle P_1BE(\max)} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 解答本题需要我们熟练掌握含 30° 角的直角三角形的性质、勾股定理及配方法求二次函数的最值, 有一定难度.

八、解答题 (本题满分 14 分)

24. **【分析】** (1) 如答图 1 所示, 利用已知条件求出点 B 的坐标, 然后用待定系数法求出抛物线的解析式;

(2) 如答图 1 所示, 首先求出四边形 $BMCA$ 面积的表达式, 然后利用二次函数的性质求出其最大值;

(3) 本题利用切线的性质、相似三角形与勾股定理求解. 如答图 2 所示, 首先求出直线

AC 与直线 $x = -2$ 的交点 F 的坐标，从而确定了 $\text{Rt}\triangle AGF$ 的各个边长；然后证明 $\text{Rt}\triangle AGF \sim \text{Rt}\triangle QEF$ ，利用相似线段比例关系列出方程，求出点 Q 的坐标。

【解答】方法一：

解：（1）如答图 1 所示，过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E ，则 $DE = 3$ ， $OE = 2$ 。

$$\because \tan \angle DBA = \frac{DE}{BE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BE = 6,$$

$$\therefore OB = BE - OE = 4,$$

$$\therefore B(-4, 0).$$

$\because$ 点 $B(-4, 0)$ 、 $D(2, 3)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ ($a \neq 0$) 上，

$$\therefore \begin{cases} 16a - 4b - 2 = 0 \\ 4a + 2b - 2 = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2.$$

$$(2) \text{ 抛物线的解析式为: } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2,$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } y = -2, \therefore C(0, -2),$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } x = -4 \text{ 或 } 1, \therefore A(1, 0).$$

设点 M 坐标为 (m, n) ($m < 0, n < 0$),

如答图 1 所示，过点 M 作 $MF \perp x$ 轴于点 F ，则 $MF = -n$ ， $OF = -m$ ， $BF = 4 + m$ 。

$$S_{\text{四边形 } BMCA} = S_{\triangle BMF} + S_{\text{梯形 } MFOC} + S_{\triangle AOC}$$

$$= \frac{1}{2}BF \cdot MF + \frac{1}{2}(MF + OC) \cdot OF + \frac{1}{2}OA \cdot OC$$

$$= \frac{1}{2}(4 + m) \times (-n) + \frac{1}{2}(-n + 2) \times (-m) + \frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$= -2n - m + 1$$

$$\because \text{点 } M(m, n) \text{ 在抛物线 } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 \text{ 上,}$$

$$\therefore n = \frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m - 2, \text{ 代入上式得:}$$

$$S_{\text{四边形 } BMCA} = -m^2 - 4m + 5 = -(m + 2)^2 + 9,$$

∴当 $m = -2$ 时，四边形 $BMCA$ 面积有最大值，最大值为 9.

(3) 假设存在这样的 $\odot Q$.

如答图 2 所示，设直线 $x = -2$ 与 x 轴交于点 G ，与直线 AC 交于点 F .

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b$ ，将 $A(1, 0)$ 、 $C(0, -2)$ 代入得：

$$\begin{cases} k+b=0 \\ b=-2 \end{cases},$$

解得： $k = 2$ ， $b = -2$ ，

∴直线 AC 解析式为： $y = 2x - 2$ ，

令 $x = -2$ ，得 $y = -6$ ，∴ $F(-2, -6)$ ， $GF = 6$.

在 $\text{Rt}\triangle AGF$ 中，由勾股定理得： $AF = \sqrt{AG^2 + GF^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$.

设 $Q(-2, n)$ ，则在 $\text{Rt}\triangle QGO$ 中，由勾股定理得： $OQ = \sqrt{OG^2 + QG^2} = \sqrt{n^2 + 4}$.

设 $\odot Q$ 与直线 AC 相切于点 E ，则 $QE = OQ = \sqrt{n^2 + 4}$.

在 $\text{Rt}\triangle AGF$ 与 $\text{Rt}\triangle QEF$ 中，

∵ $\angle AGF = \angle QEF = 90^\circ$ ， $\angle AFG = \angle QFE$ ，

∴ $\text{Rt}\triangle AGF \sim \text{Rt}\triangle QEF$ ，

$$\therefore \frac{AF}{QF} = \frac{AG}{QE}, \text{ 即 } \frac{3\sqrt{5}}{6+n} = \frac{3}{\sqrt{n^2+4}},$$

化简得： $n^2 - 3n - 4 = 0$ ，解得 $n = 4$ 或 $n = -1$.

∴存在一个以 Q 点为圆心， OQ 为半径且与直线 AC 相切的圆，点 Q 的坐标为 $(-2, 4)$

或 $(-2, -1)$.

方法二：

(1) 略.

$$(2) \because y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2, \therefore C(0, -2), A(1, 0),$$

连接 BC ，过点 M 作 x 轴垂线，交 BC 于 H ，设 $M(t, \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - 2)$ ，

∵ $B(-4, 0)$ ， $C(0, -2)$ ，

$$\therefore l_{BC}: y = -\frac{1}{2}x - 2,$$

$$\therefore H(t, -\frac{1}{2}t - 2),$$

$$S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} (C_x - B_x) (H_y - M_y) = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}t - 2 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 2 \right) = -t^2 - 4t,$$

$\therefore$ 当 $t = -2$ 时, $S_{\triangle BCM}$ 有最大值等于 4,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5,$$

$\therefore$ 四边形 $BMCA$ 面积最大值等于 9.

(3) 若存在, 设圆心为 $Q(-2, t)$, 切点为 E , 则 $QE \perp AC$,

$$\therefore K_{QE} \times K_{AC} = -1,$$

$$\because l_{AC}: y = 2x - 2, \therefore K_{AC} = 2, K_{QE} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{设 } l_{QE}: y = -\frac{1}{2}x + b, \text{ 把 } Q(-2, t) \text{ 代入,}$$

$$\therefore b = t - 1,$$

$$\therefore l_{QE}: y = -\frac{1}{2}x + t - 1,$$

$$\because l_{AC}: y = 2x - 2, \therefore x = \frac{2}{5}t + \frac{2}{5}, y = \frac{4}{5}t - \frac{6}{5},$$

$$\therefore E\left(\frac{2}{5}t + \frac{2}{5}, \frac{4}{5}t - \frac{6}{5}\right), Q(-2, t), O(0, 0),$$

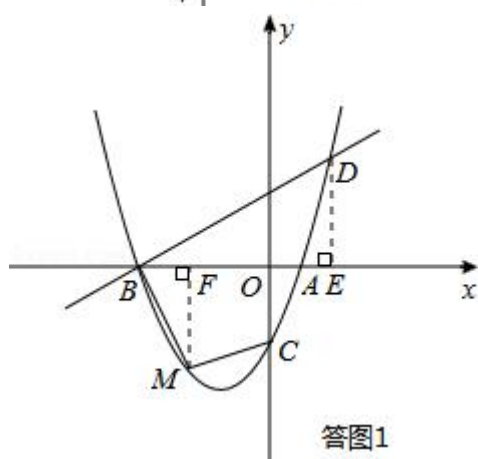
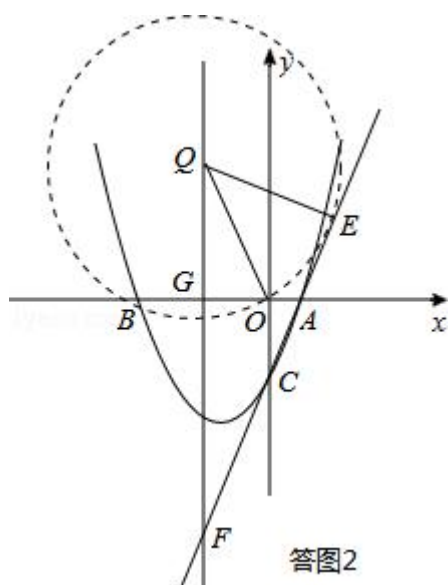
$$\because OQ = QE,$$

$$\therefore t^2 + 2^2 = \left(\frac{2}{5}t + \frac{2}{5} + 2\right)^2 + \left(\frac{4}{5}t - \frac{6}{5} - t\right)^2,$$

$$\therefore t^2 - 3t - 4 = 0,$$

$$\therefore t_1 = -1, t_2 = 4,$$

$$\therefore Q_1(-2, -1), Q_2(-2, 4).$$



【点评】本题是中考压轴题，综合考查了二次函数的图象与性质、一次函数的图象与性质、待定系数法、相似三角形、勾股定理、圆的切线性质、解直角三角形、图形面积计算等重要知识点，涉及考点众多，有一定的难度．第（2）问面积最大值的问题，利用二次函数的最值解决；第（3）问为存在型问题，首先假设存在，然后利用已知条件，求出符合条件的点 Q 坐标．