

2011 年四川省南充市中考数学试卷

一、选择题：（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.（3 分）计算 $a+(-a)$ 的结果是（ ）

- A. $2a$ B. 0 C. $-a^2$ D. $-2a$

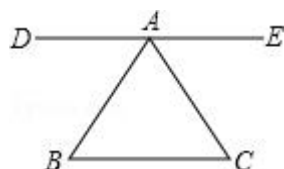
2.（3 分）学校商店在一段时间内销售了四种饮料共 100 瓶，各种饮料的销售量如下表：

品牌	甲	乙	丙	丁
销售量（瓶）	12	32	13	43

建议学校商店进货数量最多的品牌是（ ）

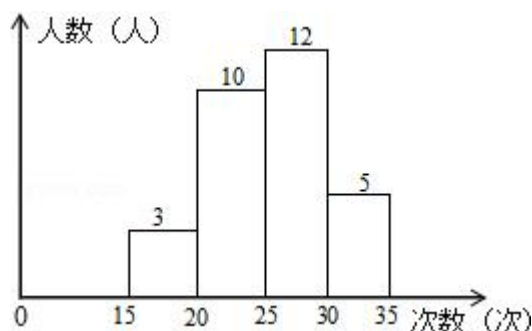
- A. 甲品牌 B. 乙品牌 C. 丙品牌 D. 丁品牌

3.（3 分）如图，直线 DE 经过点 A ， $DE \parallel BC$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，下列结论成立的是（ ）



- A. $\angle C = 60^\circ$ B. $\angle DAB = 60^\circ$ C. $\angle EAC = 60^\circ$ D. $\angle BAC = 60^\circ$

4.（3 分）某学校为了了解九年级体能情况，随机选取 30 名学生测试一分钟仰卧起坐次数，并绘制了如图的直方图，学生仰卧起坐次数在 25~30 之间的频率为（ ）



- A. 0.1 B. 0.17 C. 0.33 D. 0.4

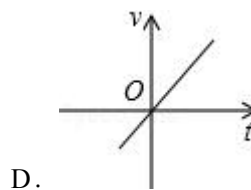
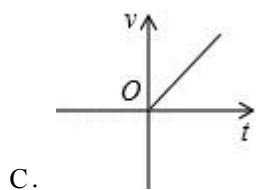
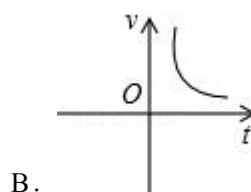
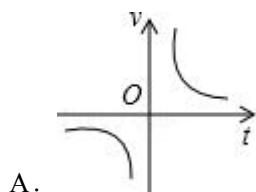
5.（3 分）下列计算不正确的是（ ）

- A. $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -2$ B. $(-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ C. $|-3| = 3$ D. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

6.（3 分）方程 $(x+1)(x-2) = x+1$ 的解是（ ）

- A. 2 B. 3 C. -1, 2 D. -1, 3

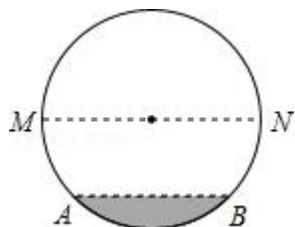
7.（3 分）小明乘车从南充到成都，行车的速度 v (km/h) 和行车时间 t (h) 之间的函数图象是（ ）



8. (3分) 若分式 $\frac{x-1}{x+2}$ 的值为零, 则 x 的值是 ()

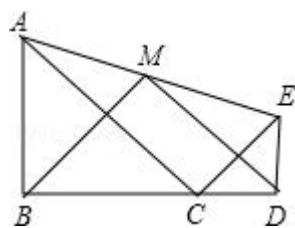
- A. 0 B. 1 C. -1 D. -2

9. (3分) 在圆柱形油槽内装有一些油. 截面如图, 油面宽 AB 为 6 分米, 如果再注入一些油后, 油面 AB 上升 1 分米, 油面宽变为 8 分米, 圆柱形油槽直径 MN 为 ()



- A. 6 分米 B. 8 分米 C. 10 分米 D. 12 分米

10. (3分) 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 均为等腰直角三角形, 点 B, C, D 在一条直线上, 点 M 是 AE 的中点, 下列结论: ① $\tan \angle AEC = \frac{BC}{CD}$; ② $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDE} \geq S_{\triangle ACE}$; ③ $BM \perp DM$; ④ $BM = DM$. 正确结论的个数是 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

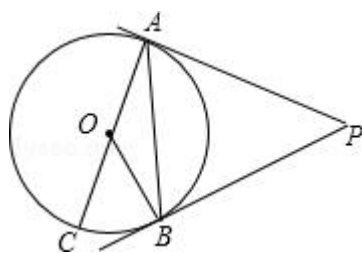
二、填空题: (本大题共 4 个小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

11. (3分) 计算 $(\pi - 3)^0 =$ _____.

12. (3分) 某灯具厂从 1 万件同批次产品中随机抽取了 100 件进行质检, 发现其中有 5 件不合格, 估计该厂这一万件产品中不合格品约为 _____ 件.

13. (3分) 如图, PA, PB 是 $\odot O$ 是切线, A, B 为切点, AC 是 $\odot O$ 的直径, 若 $\angle BAC = 25^\circ$,

则 $\angle P =$ _____ 度.



14. (3分) 过反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 图象上一点 A , 分别作 x 轴, y 轴的垂线, 垂足分别为 B, C , 如果 $\triangle ABC$ 的面积为 3. 则 k 的值为_____.

三、(本大题共 3 个小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

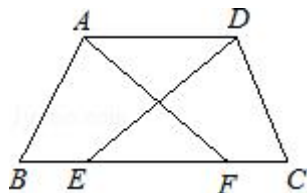
15. (6分) 先化简, 再求值: $\frac{x}{x^2-1} (\frac{x-1}{x} - 2)$, 其中 $x = 2$.

16. (6分) 在一个不透明的口袋中装有 4 张相同的纸牌, 它们分别标有数字 1, 2, 3, 4. 随机地摸取出一张纸牌然后放回, 再随机摸取出一张纸牌.

(1) 计算两次摸取纸牌上数字之和为 5 的概率;

(2) 甲、乙两个人进行游戏, 如果两次摸出纸牌上数字之和为奇数, 则甲胜; 如果两次摸出纸牌上数字之和为偶数, 则乙胜. 这是个公平的游戏吗? 请说明理由.

17. (6分) 如图, 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E, F 在 BC 上, 且 $BE = FC$, 连接 DE, AF . 求证: $DE = AF$.



四、(本大题共 2 个小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

18. (8分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + k + 1 = 0$ 的实数解是 x_1 和 x_2 .

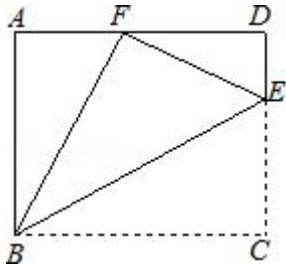
(1) 求 k 的取值范围;

(2) 如果 $x_1 + x_2 - x_1 x_2 < -1$ 且 k 为整数, 求 k 的值.

19. (8分) 如图, 点 E 是矩形 $ABCD$ 中 CD 边上一点, $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠为 $\triangle BFE$, 点 F 落在 AD 上.

(1) 求证: $\triangle ABF \sim \triangle DFE$;

(2) 若 $\sin \angle DFE = \frac{1}{3}$, 求 $\tan \angle EBC$ 的值.

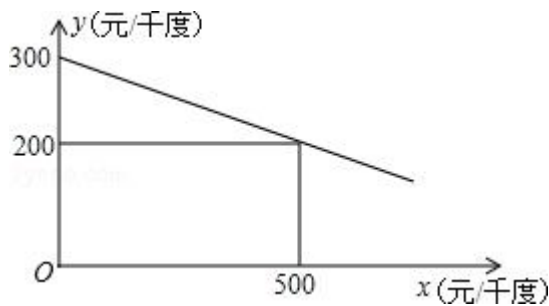


五、(本大题共 3 个小题，每小题 8 分，共 24 分)

20. (8 分) 某工厂在生产过程中要消耗大量电能，消耗每千度电产生利润与电价是一次函数关系，经过测算，工厂每千度电产生利润 y (元/千度) 与电价 x (元/千度) 的函数图象如图：

(1) 当电价为 600 元千度时，工厂消耗每千度电产生利润是多少？

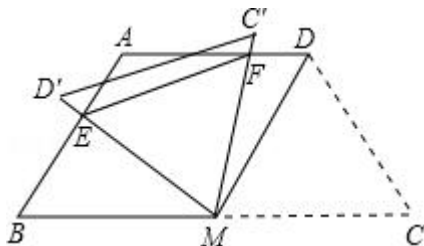
(2) 为了实现节能减排目标，有关部门规定，该厂电价 x (元/千度) 与每天用电量 m (千度) 的函数关系为 $x = 10m + 500$ ，且该工厂每天用电量不超过 60 千度，为了获得最大利润，工厂每天应安排使用多少度电？工厂每天消耗电产生利润最大是多少元？



21. (8 分) 如图，等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD = AB = CD = 2$ ， $\angle C = 60^\circ$ ， M 是 BC 的中点.

(1) 求证： $\triangle MDC$ 是等边三角形；

(2) 将 $\triangle MDC$ 绕点 M 旋转，当 MD (即 MD') 与 AB 交于一点 E ， MC (即 MC') 同时与 AD 交于一点 F 时，点 E ， F 和点 A 构成 $\triangle AEF$. 试探究 $\triangle AEF$ 的周长是否存在最小值？如果不存在，请说明理由；如果存在，请计算出 $\triangle AEF$ 周长的最小值.

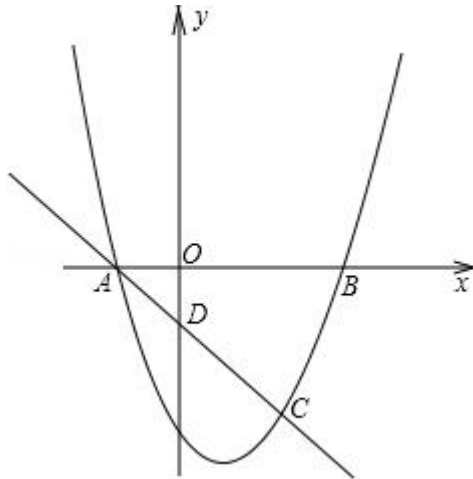


22. (8 分) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴的交点为 $A(m - 4, 0)$ 和 $B(m, 0)$ ，与直线 $y = -x + p$ 相交于点 A 和点 $C(2m - 4, m - 6)$.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 若点 P 在抛物线上，且以点 P 和 A ， C 以及另一点 Q 为顶点的平行四边形面积为 12，求点 P ， Q 的坐标；

(3) 在 (2) 条件下，若点 M 是 x 轴下方抛物线上的动点，当 $\triangle PQM$ 的面积最大时，请求出 $\triangle PQM$ 的最大面积及点 M 的坐标。



2011 年四川省南充市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 【分析】本题需先把括号去掉，再合并同类项，即可得出正确答案.

【解答】解： $a + (-a)$,

$$= a - a,$$

$$= 0.$$

故选：B.

【点评】本题主要考查了整式的加减，在解题时要注意去括号，再合并同类项是解题的关键.

2. 【分析】根据众数的意义和定义，众数是一组数据中出现次数最多的数据，则进货要进销售量最多的品牌.

【解答】解：在四个品牌的销售量中，丁的销售量最多.

故选：D.

【点评】本题属于基础题，考查了确定一组数据的众数的能力. 一些学生往往对这个概念掌握不清楚，而误选其它选项.

3. 【分析】根据平行线的性质，根据内错角相等，逐个排除选项即可得出结果.

【解答】解： $\because DE \parallel BC$, $\angle B = 60^\circ$,

$$\therefore \angle DAB = \angle B = 60^\circ \quad (\text{两直线平行, 内错角相等})$$

$$\angle BAE = 180^\circ - \angle B = 120^\circ \quad (\text{两直线平行, 同旁内角互补})$$

故选：B.

【点评】本题考查了两直线平行，内错角相等的性质，难度适中.

4. 【分析】首先根据频数分布直方图可以知道仰卧起坐次数在 25 ~ 30 之间的频数，然后除以总次数（30）即可得到仰卧起坐次数在 25 ~ 30 之间的频率.

【解答】解： $\because$ 从频数率分布直方图可以知道仰卧起坐次数在 25 ~ 30 之间的频数为 12,

$$\text{而仰卧起坐总次数为: } 3 + 10 + 12 + 5 = 30,$$

$$\therefore \text{学生仰卧起坐次数在 25 ~ 30 之间的频率为 } 12 \div 30 = 0.4.$$

故选：D.

【点评】本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力；利用统计图

获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题.

5. 【分析】本题需先对每一项分别进行解答，得出正确的结果，最后选出本题的答案即可.

【解答】解：A、 $\because -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$ ，故本答案错误；

B、 $(-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ ，故本答案正确；

C、 $|-3| = 3$ ，故本答案正确；

D、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，故本答案正确.

故选：A.

【点评】本题主要考查了实数的运算，在解题时要注意运算顺序和符号是解题的关键.

6. 【分析】先移项得到 $(x+1)(x-2) - (x+1) = 0$ ，然后利用提公因式因式分解，再化为两个一元一次方程，解方程即可.

【解答】解： $(x+1)(x-2) - (x+1) = 0$ ，

$\therefore (x+1)(x-2-1) = 0$ ，即 $(x+1)(x-3) = 0$ ，

$\therefore x+1 = 0$ ，或 $x-3 = 0$ ，

$\therefore x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$.

故选：D.

【点评】本题考查了运用因式分解法解一元二次方程的方法：利用因式分解把一个一元二次方程化为两个一元一次方程.

7. 【分析】根据时间 t 、速度 v 和路程 s 之间的关系，在路程不变的条件下，得 $v = \frac{s}{t}$ ，则 v 是 t 的反比例函数，且 $t > 0$.

【解答】解： $\because v = \frac{s}{t} (t > 0)$ ，

$\therefore v$ 是 t 的反比例函数，

故选：B.

【点评】本题是一道反比例函数的实际应用题，注：在路程不变的条件下， v 是 t 的反比例函数.

8. 【分析】分式的值是 0 的条件是：分子为 0，分母不为 0，则可得 $x-1=0$ 且 $x+2 \neq 0$ ，从而解决问题.

【解答】解： $\because x-1=0$ 且 $x+2 \neq 0$ ，

$\therefore x = 1$.

故选：B.

【点评】此题考查的是分式的值为零的条件，分式是0的条件中特别需要注意的是分母不能是0，这是经常考查的知识点.

9. 【分析】如图，油面 AB 上升 1 分米得到油面 CD ，依题意得 $AB = 6$ ， $CD = 8$ ，过 O 点作 AB 的垂线，垂足为 E ，交 CD 于 F 点，连接 OA ， OC ，由垂径定理，得 $AE = \frac{1}{2}AB = 3$ ， $CF = \frac{1}{2}CD = 4$ ，设 $OE = x$ ，则 $OF = x - 1$ ，在 $\text{Rt}\triangle OAE$ 中， $OA^2 = AE^2 + OE^2$ ，在 $\text{Rt}\triangle OCF$ 中， $OC^2 = CF^2 + OF^2$ ，由 $OA = OC$ ，列方程求 x 即可求半径 OA ，得出直径 MN .

【解答】解：如图，依题意得 $AB = 6$ ， $CD = 8$ ，过 O 点作 AB 的垂线，垂足为 E ，交 CD 于 F 点，连接 OA ， OC ，

由垂径定理，得 $AE = \frac{1}{2}AB = 3$ ， $CF = \frac{1}{2}CD = 4$ ，

设 $OE = x$ ，则 $OF = x - 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OAE$ 中， $OA^2 = AE^2 + OE^2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OCF$ 中， $OC^2 = CF^2 + OF^2$ ，

$\because OA = OC$ ，

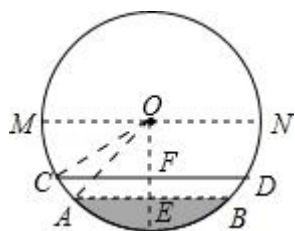
$$\therefore 3^2 + x^2 = 4^2 + (x - 1)^2,$$

解得 $x = 4$ ，

$$\therefore \text{半径 } OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\therefore$ 直径 $MN = 2OA = 10$ 分米.

故选：C.



【点评】本题考查了垂径定理的运用. 关键是利用垂径定理得出两个直角三角形，根据勾股定理表示半径的平方，根据半径相等列方程求解.

10. 【分析】①根据等腰直角三角形的性质及 $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ 的对应边成比例知， $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD}$ ；然后由直角三角形中的正切函数，得 $\tan \angle AEC = \frac{AC}{EC}$ ，再由等量代换求得 $\tan \angle$

$$AEC = \frac{BC}{CD};$$

②由三角形的面积公式、梯形的面积公式及不等式的基本性质 $a^2+b^2 \geq 2ab$ ($a=b$ 时取等号) 解答;

③、④通过作辅助线 MN , 构建直角梯形的中位线, 根据梯形的中位线定理及等腰直角三角形的判定定理解答.

【解答】解: $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 均为等腰直角三角形,

$$\therefore AB = BC, CD = DE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \angle DCE = \angle DEC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ;$$

$$\because \triangle ABC \sim \triangle CDE$$

$$\therefore \frac{AC}{EC} = \frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD}$$

$$\textcircled{1} \therefore \tan \angle AEC = \frac{AC}{EC},$$

$$\therefore \tan \angle AEC = \frac{BC}{CD}; \text{ 故本选项正确;}$$

$$\textcircled{2} \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a^2, S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}b^2, S_{\text{梯形} ABDE} = \frac{1}{2}(a+b)^2,$$

$$\therefore S_{\triangle ACE} = S_{\text{梯形} ABDE} - S_{\triangle ABC} - S_{\triangle CDE} = ab,$$

$$S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab \text{ (} a=b \text{ 时取等号)},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDE} \geq S_{\triangle ACE}; \text{ 故本选项正确;}$$

④过点 M 作 MN 垂直于 BD , 垂足为 N .

$\because$ 点 M 是 AE 的中点,

则 MN 为梯形中位线,

$\therefore N$ 为中点,

$\therefore \triangle BMD$ 为等腰三角形,

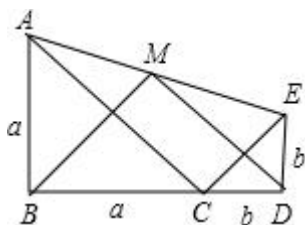
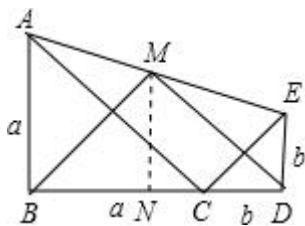
$\therefore BM = DM$; 故本选项正确;

$$\textcircled{3} \text{ 又 } MN = \frac{1}{2}(AB + ED) = \frac{1}{2}(BC + CD),$$

$$\therefore \angle BMD = 90^\circ,$$

即 $BM \perp DM$; 故本选项正确.

故选: D .



【点评】 本题综合考查了等腰直角三角形的判定与性质、梯形的中位线定理、锐角三角函数的定义等知识点．在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边．

二、填空题: (本大题共 4 个小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

11. 【分析】 根据零指数幂的性质即可得出答案．

【解答】 解: $(\pi - 3)^0 = 1$,

故答案为: 1.

【点评】 本题主要考查了零指数幂的性质, 比较简单.

12. 【分析】 首先可以求出样本的不合格率, 然后利用样本估计总体的思想即可求出这一万件产品中不合格品约为多少件.

【解答】 解: $\because$ 某灯具厂从 1 万件同批次产品中随机抽取了 100 件进行质检, 发现其中有 5 件不合格,

$\therefore$ 不合格率为: $5 \div 100 = 5\%$,

$\therefore$ 估计该厂这一万件产品中不合格品为 $10000 \times 5\% = 500$ 件.

故答案为: 500.

【点评】 此题主要考查了利用样本估计总体的思想, 解题时首先求出样本的不合格率, 然后利用样本估计总体的思想即可解决问题.

13. 【分析】 首先利用切线长定理可得 $PA = PB$, 再根据 $\angle OBA = \angle BAC = 25^\circ$, 得出 $\angle ABP$ 的度数, 再根据三角形内角和求出.

【解答】 解: $\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线, A, B 为切点,

$\therefore PA = PB, \angle OBP = 90^\circ$,

$\therefore OA = OB$,

$$\begin{aligned}\therefore \angle OBA &= \angle BAC = 25^\circ, \\ \therefore \angle ABP &= 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ, \\ \therefore PA &= PB, \\ \therefore \angle BAP &= \angle ABP = 65^\circ, \\ \therefore \angle P &= 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ,\end{aligned}$$

故答案为：50.

【点评】此题主要考查了切线的性质以及三角形内角和定理，得出 $\angle ABP$ 是解决问题的关键.

14. **【分析】**根据 $\triangle ABC$ 的面积为反比例函数比例系数的绝对值的一半可得 k 的值.

【解答】解： $\because \triangle ABC$ 的面积为反比例函数比例系数的绝对值的一半，

$$\therefore \frac{1}{2}|k| = 3,$$

解得 $k = 6$ 或 -6 ,

故答案为：6 或 -6.

【点评】考查反比例函数系数 k 的几何意义；得到 $\triangle ABC$ 的面积与反比例函数比例系数的关系是解决本题的关键.

三、(本大题共 3 个小题，每小题 6 分，共 18 分)

15. **【分析】**先通分，计算括号里的，再利用乘法进行约分计算，最后把 x 的值代入计算即可.

$$\text{【解答】解：原式} = \frac{x}{x^2-1} \left(\frac{x-1}{x} - \frac{2x}{x} \right) = \frac{x}{(x+1)(x-1)} \times \frac{-x-1}{x} = -\frac{1}{x-1},$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时，原式} = -\frac{1}{2-1} = -1.$$

【点评】本题考查了分式的化简求值. 解题的关键是注意对分式的分子、分母因式分解.

16. **【分析】**(1) 先列表展示所有可能的结果数为 16，再找出两次摸取纸牌上数字之和为 5 的结果数，然后根据概率的概念计算即可；

(2) 从表中找出两次摸出纸牌上数字之和为奇数的结果数和两次摸出纸牌上数字之和为偶数的结果数，分别计算这两个事件的概率，然后判断游戏的公平性.

【解答】解：根据题意，列表如下：

甲	1	2	3	4
乙				

1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

由上表可以看出，摸取一张纸牌然后放回，再随机摸取出纸牌，可能结果有 16 种，它们出现的可能性相等．

(1) 两次摸取纸牌上数字之和为 5 (记为事件 A) 有 4 个, $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$;

(2) 这个游戏公平, 理由如下:

$\therefore$ 两次摸出纸牌上数字之和为奇数 (记为事件 B) 有 8 个, $P(B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$,

两次摸出纸牌上数字之和为偶数 (记为事件 C) 有 8 个, $P(C) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 两次摸出纸牌上数字之和为奇数和为偶数的概率相同, 所以这个游戏公平.

【点评】 本题考查了关于游戏公平性的问题: 先利用图表或树形图展示所有可能的结果数, 然后计算出两个事件的概率, 若它们的概率相等, 则游戏公平; 若它们的概率不相等, 则游戏不公平.

17. **【分析】** 先根据等腰梯形的性质获得 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ 所需要的条件, 再利用全等的性质得到 $DE = AF$.

【解答】 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形且 $AD \parallel BC$,

$\therefore AB = DC, \angle B = \angle C$,

又 $\because BE = FC$,

$\therefore BE + EF = FC + EF$ 即 $BF = CE$,

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DCE$,

$\therefore DE = AF$.

【点评】 本题考查三角形全等的判定方法和全等三角形的性质, 判定两个三角形全等的一般方法有: SSS 、 SAS 、 SSA 、 HL .

注意: AAA 、 SSA 不能判定两个三角形全等, 判定两个三角形全等时, 必须有边的参与, 若有两边一角对应相等时, 角必须是两边的夹角.

四、(本大题共 2 个小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

18. **【分析】** (1) 方程有两个实数根, 必须满足 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, 从而求出实数 k 的取值范

围;

(2) 先由一元二次方程根与系数的关系, 得 $x_1+x_2 = -2$, $x_1x_2 = k+1$. 再代入不等式 $x_1+x_2 - x_1x_2 < -1$, 即可求得 k 的取值范围, 然后根据 k 为整数, 求出 k 的值.

【解答】解: (1) $\because$ 方程有实数根,

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4(k+1) \geq 0,$$

解得 $k \leq 0$.

故 K 的取值范围是 $k \leq 0$.

(2) 根据一元二次方程根与系数的关系, 得 $x_1+x_2 = -2$, $x_1x_2 = k+1$,

$$x_1+x_2 - x_1x_2 = -2 - (k+1).$$

由已知, 得 $-2 - (k+1) < -1$, 解得 $k > -2$.

又由 (1) $k \leq 0$,

$$\therefore -2 < k \leq 0.$$

$\because k$ 为整数,

$\therefore k$ 的值为 -1 或 0 .

【点评】 本题综合考查了根的判别式和根与系数的关系. 在运用一元二次方程根与系数的关系解题时, 一定要注意其前提是此方程的判别式 $\Delta \geq 0$.

19. **【分析】** (1) 根据矩形的性质可知 $\angle A = \angle D = \angle C = 90^\circ$, $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠为 $\triangle BFE$, 得出 $\angle BFE = \angle C = 90^\circ$, 再根据三角形的内角和为 180° , 可知 $\angle AFB + \angle ABF = 90^\circ$, 得出 $\angle ABF = \angle DFE$, 即可证明 $\triangle ABF \sim \triangle DFE$,

(2) 已知 $\sin \angle DFE = \frac{1}{3}$, 设 $DE = a$, $EF = 3a$, $DF = \sqrt{EF^2 - DE^2} = 2\sqrt{2}a$, 可得出 $CE = EF = 3a$, $CD = DE + CE = 4a$, $AB = 4a$, $\angle EBC = \angle EBF$, 由 (1) 中 $\triangle ABF \sim \triangle DFE$, 可得 $\tan \angle EBC = \tan \angle EBF = \frac{FE}{BF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解答】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形

$$\therefore \angle A = \angle D = \angle C = 90^\circ,$$

$\because \triangle BCE$ 沿 BE 折叠为 $\triangle BFE$,

$$\therefore \angle BFE = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFB + \angle DFE = 180^\circ - \angle BFE = 90^\circ,$$

又 $\because \angle AFB + \angle ABF = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ABF = \angle DFE,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle DFE,$$

$$(2) \text{ 解: 在 Rt}\triangle DEF \text{ 中, } \sin \angle DFE = \frac{DE}{EF} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{ 设 } DE = a, EF = 3a, DF = \sqrt{EF^2 - DE^2} = 2\sqrt{2}a,$$

$$\therefore \triangle BCE \text{ 沿 } BE \text{ 折叠为 } \triangle BFE,$$

$$\therefore CE = EF = 3a, CD = DE + CE = 4a, AB = 4a, \angle EBC = \angle EBF,$$

$$\text{ 又由 (1) } \triangle ABF \sim \triangle DFE,$$

$$\therefore \frac{FE}{BF} = \frac{DF}{AB} = \frac{2\sqrt{2}a}{4a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \tan \angle EBF = \frac{FE}{BF} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan \angle EBC = \tan \angle EBF = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点评】 本题考查了矩形的性质以及相似三角形的证明方法，以及直角三角形中角的函数值，难度适中.

五、(本大题共 3 个小题，每小题 8 分，共 24 分)

20. **【分析】** (1) 把 (0, 300), (500, 200) 代入直线解析式可得一次函数解析式，把 $x = 600$ 代入函数解析式可得利润的值；

(2) 利润 = 用电量 $\times$ 每千度电产生利润，结合该工厂每天用电量不超过 60 千度，得到利润的最大值即可.

【解答】 解: (1) 工厂每千度电产生利润 y (元/千度) 与电价 x (元/千度) 的函数解析式为:

$$y = kx + b \quad (k, b \text{ 是常数, 且 } k \neq 0).$$

该函数图象过点 (0, 300), (500, 200),

$$\therefore \begin{cases} 500k + b = 200 \\ b = 300 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{5} \\ b = 300 \end{cases}.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{5}x + 300 \quad (x \geq 0).$$

当电价 $x = 600$ 元/千度时，该工厂消耗每千度电产生利润 $y = -\frac{1}{5} \times 600 + 300 = 180$ (元/

千度).

答: 工厂消耗每千度电产生利润是 180 元.

(2) 设工厂每天耗电产生利润为 w 元, 由题意得:

$$W = my = m \left(-\frac{1}{5}x + 300 \right) = m \left[-\frac{1}{5}(10m + 500) + 300 \right].$$

化简配方, 得: $w = -2(m - 50)^2 + 5000$.

由题意得: $a = -2 < 0$, $m \leq 60$,

$\therefore$ 当 $m = 50$ 时, $w_{\text{最大}} = 5000$,

即当工厂每天消耗 50 千度电时, 工厂每天耗电产生利润为 5000 元.

【点评】 考查二次函数及一次函数的应用; 得到总利润的等量关系是解决本题的关键; 注意利用配方法解决二次函数的最值问题.

21. **【分析】**(1) 过点 D 作 $DP \perp BC$ 于点 P , 过点 A 作 $AQ \perp BC$ 于点 Q , 得到 $CP = BQ = \frac{1}{2}AB$,

$CP + BQ = \frac{1}{2}AB = 1$, 得出 $BC = 2CD$, 由点 M 是 BC 的中点, 推出 $CM = CD$, 由 $\angle C = 60^\circ$,

根据等边三角形的判定即可得到答案;

(2) $\triangle AEF$ 的周长存在最小值, 理由是连接 AM , 由 $ABMD$ 是菱形, 得出 $\triangle MAB$, $\triangle MAD$ 和 $\triangle MC'D'$ 是等边三角形, 推出 $\angle BME = \angle AMF$, 证出 $\triangle BME \cong \triangle AMF$ (ASA), 得出 $BE = AF$, $ME = MF$, 推出 $\triangle EMF$ 是等边三角形, 根据 MF 的最小值为点 M 到 AD 的距离 $\sqrt{3}$, 即 EF 的最小值是 $\sqrt{3}$, 即可求出 $\triangle AEF$ 的周长.

【解答】(1) 证明: 连接 AM , 过点 D 作 $DP \perp BC$ 于点 P , 过点 A 作 $AQ \perp BC$ 于点 Q , 即 $AQ \parallel DP$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ADPQ$ 是平行四边形,

$\therefore AD = QP = AB = CD$,

$\because \angle C = \angle B = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAQ = \angle CDP = 30^\circ$,

$\therefore CP = BQ = \frac{1}{2}AB = 1$,

即 $BC = 1 + 1 + 2 = 4$,

$\because CD = 2$,

$$\therefore BC = 2CD,$$

$\because$ 点 M 是 BC 的中点,

$$BC = 2CM,$$

$$\therefore CD = CM,$$

$$\because \angle C = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle MDC$ 是等边三角形.

(2) 解: $\triangle AEF$ 的周长存在最小值, 理由如下:

过 D 作 $DN \perp BC$ 于 N , 连接 AM ,

$$\because \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDN = 30^\circ,$$

$$\because CD = 2,$$

$$\therefore CN = 1,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得: } DN = \sqrt{3},$$

连接 AM , 由 (1) 平行四边形 $ABMD$ 是菱形,

$\triangle MAB$, $\triangle MAD$ 和 $\triangle MC'D'$ 是等边三角形,

$$\angle BMA = \angle BME + \angle AME = 60^\circ, \quad \angle EMF = \angle AMF + \angle AME = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BME = \angle AMF,$$

在 $\triangle BME$ 与 $\triangle AMF$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle FAM \\ BM = AM \\ \angle BME = \angle AMF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BME \cong \triangle AMF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BE = AF, \quad ME = MF, \quad AE + AF = AE + BE = AB,$$

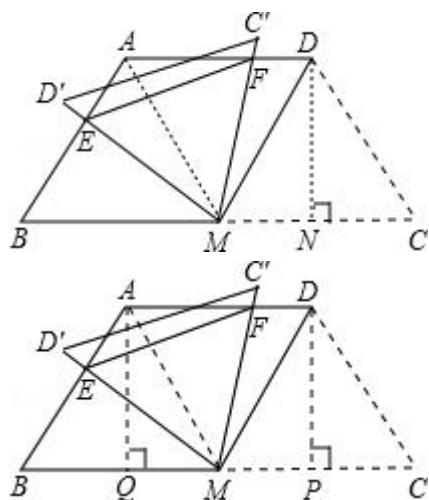
$$\because \angle EMF = \angle DMC = 60^\circ, \quad \text{故 } \triangle EMF \text{ 是等边三角形, } EF = MF,$$

$$\because MF \text{ 的最小值为点 } M \text{ 到 } AD \text{ 的距离等于 } DN \text{ 的长, 即是 } \sqrt{3}, \text{ 即 } EF \text{ 的最小值是 } \sqrt{3},$$

$$\triangle AEF \text{ 的周长} = AE + AF + EF = AB + EF,$$

$$\triangle AEF \text{ 的周长的最小值为 } 2 + \sqrt{3},$$

答: 存在, $\triangle AEF$ 的周长的最小值为 $2 + \sqrt{3}$.



【点评】 本题主要考查对等边三角形的性质和判定，旋转的性质，全等三角形的性质和判定，等腰梯形的性质等知识点的理解和掌握，综合运用这些性质进行推理是解此题的关键.

22. 【分析】 (1) 把点 $A(m-4, 0)$ 和 $C(2m-4, m-6)$ 代入直线 $y = -x+p$ 上得到方程组 $\begin{cases} -(m-4)+p=0 \\ -(2m-4)+p=m-6 \end{cases}$, 求出方程组的解 $\begin{cases} m=3 \\ p=-1 \end{cases}$, 得出 A, B, C 的坐标, 设抛物线 $y = ax^2+bx+c = a(x-3)(x+1)$, 把 $C(2, -3)$ 代入求出 a 即可;

(2) AC 所在直线的解析式为: $y = -x-1$, 根据平行四边形 $ACQP$ 的面积为 12, 求出 AC 边上的高为 $2\sqrt{2}$, 过点 D 作 $DK \perp AC$ 与 PQ 所在直线相交于点 K , 求出 DK, DN , 得到 PQ 的解析式为 $y = -x+3$ 或 $y = -x-5$, 求出方程组的解, 即可得到 $P_1(3, 0)$, $P_2(-2, 5)$, 根据 $ACQP$ 是平行四边形, 求出 Q 的坐标; 同法求出以 AC 为对角线时 Q 的坐标;

(3) 设 $M(t, t^2-2t-3)$, $(-1 < t < 3)$, 过点 M 作 y 轴的平行线, 交 PQ 所在直线于点 T , 则 $T(t, -t+3)$, 求出 $MT = -t^2+t+6$, 过点 M 作 $MS \perp PQ$ 所在直线于点 S , 求出 $MS = -\frac{\sqrt{2}}{2}(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{25\sqrt{2}}{8}$, 即可得到答案.

【解答】 解: (1) $\because$ 点 $A(m-4, 0)$ 和 $C(2m-4, m-6)$ 在直线 $y = -x+p$ 上

$$\therefore \begin{cases} -(m-4)+p=0 \\ -(2m-4)+p=m-6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m=3 \\ p=-1 \end{cases},$$

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0), C(2, -3),$$

$$\text{设抛物线 } y = ax^2+bx+c = a(x-3)(x+1),$$

$$\because C(2, -3), \text{ 代入得: } -3 = a(2-3)(2+1),$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为: } y = x^2 - 2x - 3.$$

$$\text{答: 抛物线解析式为 } y = x^2 - 2x - 3.$$

$$(2) \text{ 解: } A(-1, 0), C(2, -3), \text{ 由勾股定理得: } AC = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (-3-0)^2} = 3\sqrt{2},$$

$$AC \text{ 所在直线的解析式为: } y = -x - 1,$$

$$\angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ACQP \text{ 的面积为 } 12,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ACQP \text{ 中 } AC \text{ 边上的高为 } \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{过点 } D \text{ 作 } DK \perp AC \text{ 与 } PQ \text{ 所在直线相交于点 } K, DK = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore DN = 4,$$

$$\therefore \text{四边形 } ACQP, PQ \text{ 所在直线在直线 } ADC \text{ 的两侧, 可能各有一条,}$$

$$\therefore \text{根据平移的性质得出直线 } PQ \text{ 的解析式为① } y = -x + 3 \text{ 或② } y = -x - 5,$$

$$\therefore \text{由①得: } \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -x + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 5 \end{cases},$$

$$\text{由②得: } \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -x - 5 \end{cases}, \text{ 方程组无解,}$$

$$\text{即 } P_1(3, 0), P_2(-2, 5),$$

$$\therefore ACQP \text{ 是平行四边形, } A(-1, 0), C(2, -3),$$

$$\therefore \text{当 } P(3, 0) \text{ 时, 当以 } AC \text{ 为边时, } Q_1(6, -3), Q_2(0, 3), \text{ 当 } AC \text{ 为对角线时 } Q_3(-2, -3)$$

$$\therefore \text{满足条件的 } P, Q \text{ 点是 } P_1(3, 0), Q_1(6, -3) \text{ 或 } P_2(-2, 5), Q_2(1, 2), Q_3(-2, -3)$$

$$\text{当 } P(-2, 5) \text{ 时, 当以 } AC \text{ 为边时, } Q_4(1, 2), Q_5(-5, 8), \text{ 当 } AC \text{ 为对角线时, } Q_6(3, -8)$$

$$\text{以 } AC \text{ 为对角线时,}$$

答：点 P, Q 的坐标是 $P_1(3, 0), Q_1(6, -3)$ 或 $(0, 3)$ 或 $(-2, -3)$
或 $P_2(-2, 5), Q_2(1, 2)$ 或 $(-5, 8)$ 或 $(3, -8)$.

(3) 解：设 $M(t, t^2 - 2t - 3), (-1 < t < 3)$,

过点 M 作 y 轴的平行线，交 PQ 所在直线于点 T ，则 $T(t, -t+3)$,

$$MT = (-t+3) - (t^2 - 2t - 3) = -t^2 + t + 6,$$

过点 M 作 $MS \perp PQ$ 所在直线于点 S ,

$$MS = \frac{\sqrt{2}}{2} MT = \frac{\sqrt{2}}{2} (-t^2 + t + 6) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{25\sqrt{2}}{8},$$

则当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $M(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4})$, $\triangle PQM$ 中 PQ 边上高的最大值为 $\frac{25\sqrt{2}}{8}$,

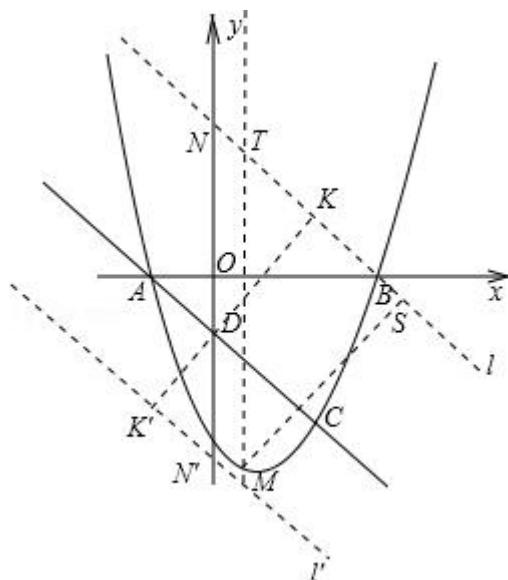
$\therefore P_1(3, 0), Q_1(6, -3)$ 或 $P_2(-2, 5), Q_2(1, 2)$.

$\therefore$ 当 $P(3, 0), Q(6, -3)$ 时, $PQ = \sqrt{(3-6)^2 + (0+3)^2} = 3\sqrt{2}$.

当 $P(-2, 5), Q(1, 2)$ 时, $PQ = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore S_{\triangle PQM} = \frac{1}{2} \times PQ \times \frac{25\sqrt{2}}{8} = \frac{75}{8}.$$

答： $\triangle PQM$ 的最大面积是 $\frac{75}{8}$ ，点 M 的坐标是 $(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4})$.



【点评】 本题主要考查对用待定系数法求二次函数的解析式，二次函数的最值，平行四边形的性质，解二元一次方程组等知识点的理解和掌握，综合运用这些性质进行计算是解此题的关键，此题是一个综合性比较强的题目，有一定的难度.

