

成都市二〇〇九年高中阶段教育学校统一招生考试试卷

(含成都市初三毕业会考)

数 学

全卷分 A 卷和 B 卷, A 卷满分 100 分, B 卷满分 50 分; 考试时间 120 分钟。A 卷分第 I 卷和第 II 卷, 第 I 卷为选择题, 第 II 卷为其他类型的题。

A 卷(共 100 分)

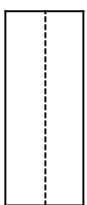
第 I 卷(选择题, 共 30 分)

注意事项:

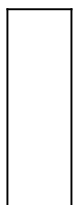
1. 第 I 卷共 2 页。答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在试卷和答题卡上。考试结束, 监考人员将试卷和答题卡一并收回。
2. 第 I 卷全是选择题, 各题均有四个选项, 只有一项符合题目要求。每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 选择题的答案不能答在试卷上。请注意机读答题卡的横竖格式。

一、选择题: (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 计算 $2 \times (-\frac{1}{2})$ 的结果是
(A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 2
2. 在函数 $y = \frac{1}{3x-1}$ 中, 自变量 x 的取值范围是
(A) $x < \frac{1}{3}$ (B) $x \neq -\frac{1}{3}$ (C) $x \neq \frac{1}{3}$ (D) $x > \frac{1}{3}$
3. 如图所示的是某几何体的三视图, 则该几何体的形状是



主视图



左视图



俯视图

- (A) 长方体 (B) 三棱柱 (C) 圆锥 (D) 正方体

4. 下列说法正确的是

(A)某市“明天降雨的概率是75%”表示明天有75%的时间会降雨

(B)随机抛掷一枚均匀的硬币，落地后正面一定朝上

(C)在一次抽奖活动中，“中奖的概率是 $\frac{1}{100}$ ”表示抽奖100次就一定会中奖

(D)在平面内，平行四边形的两条对角线一定相交

5. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，且 $AB:DE=1:2$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle DEF$ 的面积之比为

(A)1:2 (B)1:4 (C)2:1 (D)4:1

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(2, 3)$ ，若将 OA 绕原点 O 逆时针旋转 180° 得到 OA' ，

则点 A' 在平面直角坐标系中的位置是在

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限

7. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是

(A) $k > -1$ (B) $k > -1$ 且 $k \neq 0$ (C) $k < 1$ (D) $k < 1$ 且 $k \neq 0$

8. 若一个圆锥的底面圆的周长是 $4\pi\text{cm}$ ，母线长是 6cm ，则该圆锥的侧面展开图的圆心角的度数是

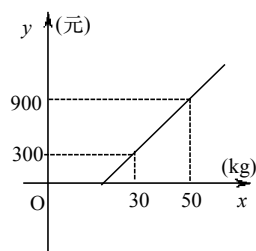
(A) 40° (B) 80° (C) 120° (D) 150°

9. 某航空公司规定，旅客乘机所携带行李的质量 x (kg)与其运费 y (元)由如图所示的一次函数图象确定，

那么旅客可携带的免费行李的最大质量为

(A)20kg (B)25kg

(C)28kg (D)30kg



10. 为了解某小区居民的日用电情况，居住在该小区的一名同学随机抽查了15户家庭的日用电量，结果

如下表：

日用电量 (单位：度)	5	6	7	8	10
户 数	2	5	4	3	1

则关于这 15 户家庭的日用电量，下列说法错误的是

- (A)众数是 6 度 (B)平均数是 6.8 度
(C)极差是 5 度 (D)中位数是 6 度

成都市二 0 0 九年高中阶段教育学校统一招生考试试卷

(含成都市初三毕业会考)

数 学

注意事项： 1. A 卷的第 II 卷和 B 卷共 10 页，用蓝、黑钢笔或圆珠笔直接答在试卷上。

2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

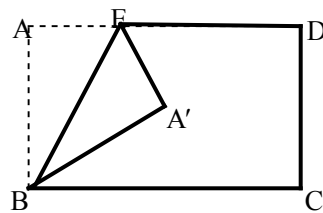
第 II 卷(非选择题，共 70 分)

二、填空题：(每小题 4 分，共 16 分)

将答案直接写在该题目中的横线上。

11.分式方程 $\frac{2}{3x} = \frac{1}{x+1}$ 的解是_____

12. 如图，将矩形 ABCD 沿 BE 折叠，若 $\angle CBA' = 30^\circ$ 则 $\angle BEA' =$ _____.

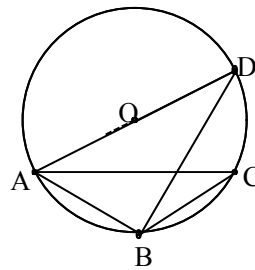


13. 改革开放 30 年以来，成都的城市化推进一直保持着快速、稳定的发展态势。据统计，到 2008 年

底，成都市中心五城区(不含高新区)常住人口已达到 4 410 000 人，对这个常住人口数有如下几种表示：

① 4.41×10^5 人；② 4.41×10^6 人；③ 44.1×10^5 人。其中是科学记数法表示的序号为_____。

14.如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $AB = BC$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ，AD 为 $\odot O$ 的直径，



AD = 6, 那么 BD = _____.

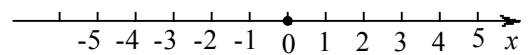
三、(第 15 题每小题 6 分, 第 16 题 6 分, 共 18 分)

15. 解答下列各题:

(1) 计算: $\sqrt{8} + 2(\pi - 2009)^0 - 4\sin 45^\circ + (-1)^3$

(2) 先化简, 再求值: $x^2(3-x) + x(x^2 - 2x) + 1$, 其中 $x = \sqrt{3}$ 。

16. 解不等式组 $\begin{cases} 3x - 1 < 2(x + 1), \\ \frac{x + 3}{2} \geq 1, \end{cases}$ 并在所给的数轴上表示出其解集。



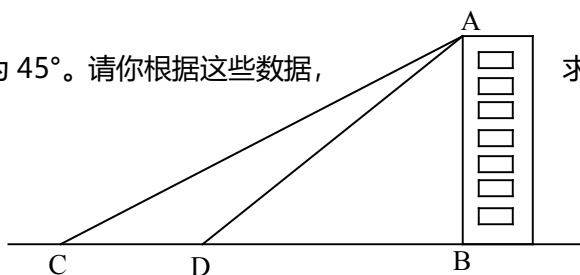
四、(每小题 8 分, 共 16 分)

17. 已知一次函数 $y = x + 2$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$, 其中一次函数 $y = x + 2$ 的图象经过点 $P(k, 5)$.

(1) 试确定反比例函数的表达式;

(2) 若点 Q 是上述一次函数与反比例函数图象在第三象限的交点, 求点 Q 的坐标.

18. 某中学九年级学生在学习“直角三角形的边角关系”一章时, 开展测量物体高度的实践活动, 他们要测量学校一幢教学楼的高度. 如图, 他们先在点 C 测得教学楼 AB 的顶点 A 的仰角为 30° , 然后向教学楼前进 60 米到达点 D , 又测得点 A 的仰角为 45° . 请你根据这些数据, 求出这幢教学楼的高度. (计算过程和结果均不取近似值)



五、(每小题 10 分, 共 20 分)

19. 有一枚均匀的正四面体, 四个面上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 小红随机地抛掷一次, 把着地一面的数字记为 x ; 另有三张背面完全相同, 正面上分别写有数字 -2, -1, 1 的卡片, 小亮将其混合后, 正面朝下放置在桌面上, 并从中随机地抽取一张, 把卡片正面上的数字记为 y ; 然后他们计算出 $S=x+y$ 的值.

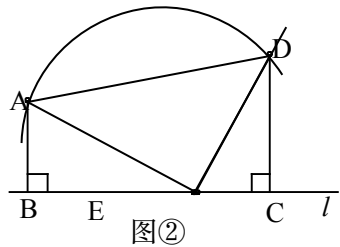
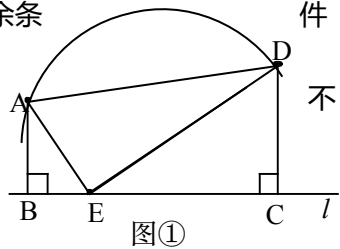
(1)用树状图或列表法表示出 S 的所有可能情况;

(2)分别求出当 $S=0$ 和 $S<2$ 时的概率.

20. 已知 A、D 是一段圆弧上的两点，且在直线 l 的同侧，分别过这两点作 l 的垂线，垂足为 B、C，E 是 BC 上一动点，连结 AD、AE、DE，且 $\angle AED = 90^\circ$ 。

(1) 如图①，如果 $AB=6, BC=16$ ，且 $BE:CE=1:3$ ，求 AD 的长。

(2) 如图②，若点 E 恰为这段圆弧的圆心，则线段 AB、BC、CD 之间有怎样的等量关系？请写出你的结论并予以证明。再探究：当 A、D 分别在直线 l 两侧且 $AB \neq CD$ ，而其余条件不变时，线段 AB、BC、CD 之间又有怎样的等量关系？请直接写出结论，不必证明。



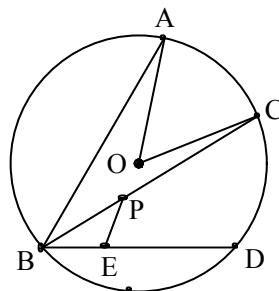
B 卷(共 50 分)

一、填空题：(每小题 4 分，共 20 分)

将答案直接写在该题目中的横线上.

21. 化简: $1 - \frac{x+y}{x-3y} \div \frac{x^2-y^2}{x^2-6xy+9y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

22. 如图, A、B、C 是 $\odot O$ 上的三点, 以 BC 为一边, 作 $\angle CBD = \angle ABC$, 过 BC 上一点 P, 作 $PE \parallel AB$ 交 BD 于点 E. 若 $\angle AOC = 60^\circ$, $BE = 3$, 则点 P 到弦 AB 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

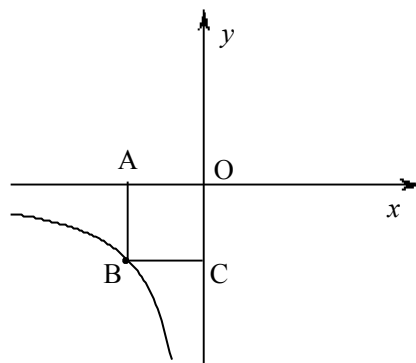


23. 已知 $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} (n=1,2,3,\dots)$, 记 $b_1 = 2(1-a_1)$, $b_2 = 2(1-a_1)(1-a_2)$, $\dots$,

$b_n = 2(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)$, 则通过计算推测出 b_n 的表达式 $b_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

(用含 n 的代数式表示)

24. 如图, 正方形 OABC 的面积是 4, 点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x < 0)$ 的图象上. 若点 R 是该反比例函数图象上异于点 B 的任意一点, 过点 R 分别作 x 轴、y 轴的垂线, 垂足为 M、N, 从矩形 OMRN 的面积中减去其与正方形 OABC 重合部分的面积, 记剩余部分的面积为



S. 则

当 $S=m$ (m 为常数, 且 $0 < m < 4$) 时, 点 R 的坐标是_____

(用含 m 的代数式表示)

25. 已知 $M(a, b)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点, 其中 a 是从 1, 2, 3 三个数中任取的一个数, b 是从 1, 2, 3, 4 四个数中任取的一个数. 定义 “点 $M(a, b)$ 在直线 $x+y=n$ 上” 为事件 Q_n ($2 \leq n \leq 7$, n 为整数), 则当 Q_n 的概率最大时, n 的所有可能的值为_____.

二、(共 8 分)

26. 某大学毕业生响应国家 “自主创业” 的号召, 投资开办了一个装饰品商店. 该店采购进一种今年新上市的饰品进行了 30 天的试销售, 购进价格为 20 元 / 件. 销售结束后, 得知日销售量 P (件) 与销售时间 x (天) 之间有如下关系: $P = -2x + 80$ ($1 \leq x \leq 30$, 且 x 为整数); 又知前 20 天的销售价格 Q_1 (元/件) 与销售时间 x (天) 之间有如下关系: $Q_1 = \frac{1}{2}x + 30$ ($1 \leq x \leq 20$, 且 x 为整数), 后 10 天的销售价格 Q_2 (元/件) 与销售时间 x (天) 之间有如下关系: $Q_2 = 45$ ($21 \leq x \leq 30$, 且 x 为整数).

(1) 试写出该商店前 20 天的日销售利润 R_1 (元) 和后 10 天的日销售利润 R_2 (元) 分别与销售时间 x (天) 之间的函数关系式;

(2) 请问在这 30 天的试销售中, 哪一天的日销售利润最大? 并求出这个最大利润.

注: 销售利润 = 销售收入 - 购进成本.

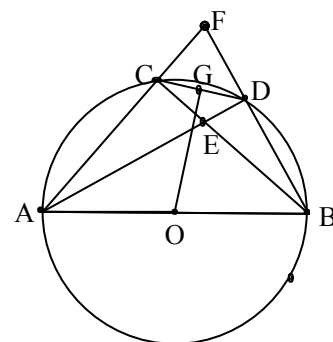
三、(共 10 分)

27. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AC=BC$, $\angle BAC$ 的平分线 AD 与 $\odot O$ 交于点 D , 与 BC 交于点 E , 延长 BD , 与 AC 的延长线交于点 F , 连结 CD , G 是 CD 的中点, 连结 OG .

(1) 判断 OG 与 CD 的位置关系, 写出你的结论并证明;

(2) 求证: $AE=BF$;

(3) 若 $OG \cdot DE = 3(2 - \sqrt{2})$, 求 $\odot O$ 的面积。



四、(共 12 分)

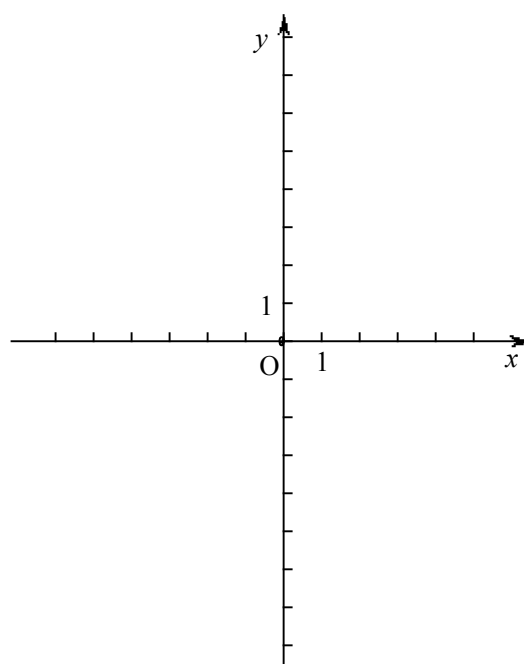
28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = a(x+1)^2 + c (a > 0)$ 与 x 轴交于 A、B 两点(点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C, 其顶点为 M, 若直线 MC 的函数表达式为 $y = kx - 3$, 与 x 轴的交点为 N, 且

$$\cos \angle BCO = \frac{3\sqrt{10}}{10}。$$

(1)求此抛物线的函数表达式；

(2)在此抛物线上是否存在异于点 C 的点 P，使以 N、P、C 为顶点的三角形是以 NC 为一条直角边的直角三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

(3)过点 A 作 x 轴的垂线，交直线 MC 于点 Q.若将抛物线沿其对称轴上下平移，使抛物线与线段 NQ 总有公共点，则抛物线向上最多可平移多少个单位长度？向下最多可平移多少个单位长度？



秘 密

解密时间:2009 年
6 月 14 日上午 9:30

成都市二〇〇九年高中阶段教育学校统一招生考试试卷 (含成都市初三毕业会考)

数学参考答案及评分意见

A 卷(共 100 分)

第 I 卷(共 30 分)

一、选择题:(每小题 3 分,共 30 分)

1. A; 2. C; 3. B; 4. D; 5. B; 6. C; 7. B; 8. C; 9. A; 10. D.

第 II 卷(共 70 分)

二、填空题:(每小题 4 分,共 16 分)

11. $x=2$; 12. 60° ; 13. ②; 14. $3\sqrt{3}$.

三、(第 15 题每小题 6 分,第 16 题 6 分,共 18 分)

15. (1)解:原式 $= 2\sqrt{2} + 2 \times 1 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1)$ 4 分

$$= 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 1$$

$$= 1. \quad \text{.....2 分}$$

(2)解:原式 $= 3x^2 - x^3 + x^3 - 2x^2 + 1$ 2 分

$$= x^2 + 1. \quad \text{.....2 分}$$

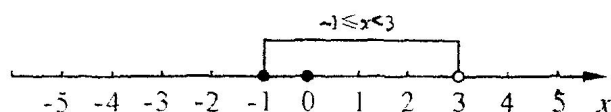
$\therefore$ 当 $x = \sqrt{3}$ 时,原式 $= (\sqrt{3})^2 + 1 = 4$2 分

16. 解:解不等式 $3x - 1 < 2(x + 1)$, 得 $x < 3$2 分

解不等式 $\frac{x+3}{2} \geq 1$, 得 $x \geq -1$2 分

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-1 \leq x < 3$1 分

在数轴上表示其解集为



.....1 分

四、(每小题 8 分,共 16 分)

17. 解:(1) $\because$ 一次函数 $y = x + 2$ 的图象经过点 $P(k, 5)$,

$$\therefore 5 = k + 2. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore k = 3. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{反比例函数的表达式为 } y = \frac{3}{x}. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = x + 2, \\ y = \frac{3}{x} \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } x^2 + 2x - 3 = 0. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{即 } (x + 3)(x - 1) = 0.$$

$$\therefore x = -3 \text{ 或 } x = 1.$$

$$\text{可得 } y = -1 \text{ 或 } y = 3.$$

$$\text{于是 } \begin{cases} x = -3, \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases} \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$\because$ 点 Q 在第三象限,

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的坐标为 } (-3, -1). \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

18. 解:如图,由已知,可得

$$\angle ACB = 30^\circ, \angle ADB = 45^\circ. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中}, BD = AB. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{又在 Rt}\triangle ABC \text{ 中}, \because \tan 30^\circ = \frac{AB}{BC},$$

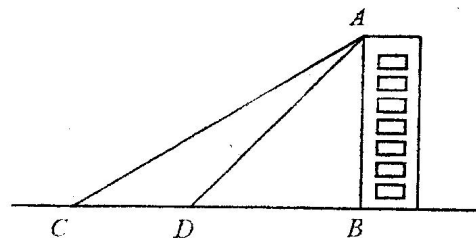
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } BC = \sqrt{3}AB. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\because BC = CD + BD, \therefore \sqrt{3}AB = CD + AB.$$

$$\text{即 } (\sqrt{3} - 1)AB = 60. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

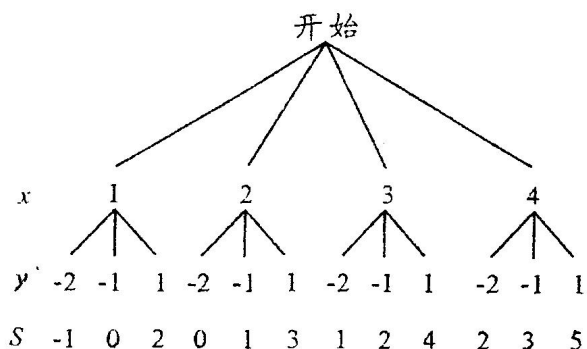
$$\therefore AB = \frac{60}{\sqrt{3} - 1} = 30(\sqrt{3} + 1) \text{ (米)}. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{答: (或 } \therefore \text{) 教学楼的高度为 } 30(\sqrt{3} + 1) \text{ 米}. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$



五、(每小题 10 分,共 20 分)

19. 解:(1)画树状图:



或用列表法:

S $x \backslash y$	-2	-1	1
1	-1	0	2
2	0	1	3
3	1	2	4
4	2	3	5

.....4 分

(2)由图(或表)可知,所有可能出现的结果有 12 种,其中 $S=0$ 的有 2 种,

$S < 2$ 的有 5 种.

.....2 分

$$\therefore P(S=0) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6};$$

.....2 分

$$P(S < 2) = \frac{5}{12}$$

.....2 分

20. 解:(1) $\because AB \perp l$ 于 $B, DC \perp l$ 于 C ,

$$\therefore \angle ABE = \angle ECD = 90^\circ;$$

$$\because \angle BEA + \angle AED + \angle CED = 180^\circ,$$

$$\text{且 } \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 90^\circ - \angle BEA.$$

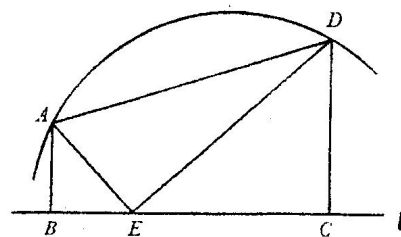
$$\text{又 } \angle BAE = 90^\circ - \angle BEA,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CED.$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle ABE \sim \text{Rt} \triangle ECD.$$

.....1 分

[或: $\because AB \perp l$ 于 $B, DC \perp l$ 于 $C, \therefore AB \parallel DC. \therefore \text{Rt} \triangle ABE \sim \text{Rt} \triangle ECD.$]



$$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{BE}{CD}$$

$$\because BE:EC = 1:3, BC = 16,$$

$$\therefore BE = 4, EC = 12.$$

$$\text{又 } AB = 6, \therefore CD = \frac{BE \cdot EC}{AB} = \frac{4 \times 12}{6} = 8. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, 由勾股定理, 得

$$\begin{aligned} \therefore AD &= \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{(AB^2 + BE^2) + (EC^2 + CD^2)} \\ &= \sqrt{6^2 + 12^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}. \end{aligned} \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

(2)(i) 猜想: $AB + CD = BC$.

证明: 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $\because \angle ABE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ - \angle AEB.$$

$$\text{又 } \because \angle AEB + \angle AED + \angle CED = 180^\circ,$$

$$\text{且 } \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 90^\circ - \angle AEB.$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CED.$$

$$\because DC \perp BC \text{ 于点 } C, \therefore \angle ECD = 90^\circ.$$

由已知, 有 $AE = ED$.

于是在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和 $\text{Rt}\triangle ECD$ 中,

$$\therefore \angle ABE = \angle ECD = 90^\circ, \angle BAE = \angle CED, AE = ED,$$

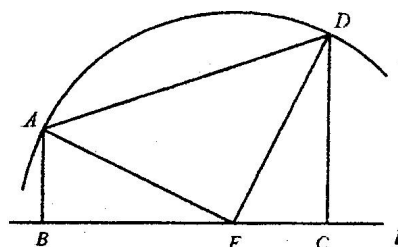
$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ECD. (\text{AAS}) \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore AB = EC, BE = CD. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore BC = BE + EC = CD + AB. \text{ 即 } AB + CD = BC. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

(ii) 当 A, D 分别在直线 l 两侧时, 线段 AB, BC, CD 有如下等量关系:

$$AB - CD = BC (AB > CD) \text{ 或 } CD - AB = BC (AB < CD). \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$



B 卷(共 50 分)

一、填空题:(每小题 4 分,共 20 分)

21. $\frac{2y}{x-y}$; 22. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 23. $\frac{n+2}{n+1}$; 24. $(\frac{m-4}{2}, \frac{8}{m-4}), (\frac{8}{m-4}, \frac{m-4}{2})$;

25. 4 和 5.

二、(共 8 分)

26. 解:(1)根据题意,得

$$\begin{aligned} R_1 &= P(Q_1 - 20) = (-2x + 80) \left[\left(\frac{1}{2}x + 30 \right) - 20 \right] \\ &= -x^2 + 20x + 800 \quad (1 \leq x \leq 20, \text{且 } x \text{ 为整数}). \end{aligned} \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= P(Q_2 - 20) = (-2x + 80)(45 - 20) \\ &= -50x + 2000 \quad (21 \leq x \leq 30, \text{且 } x \text{ 为整数}). \end{aligned} \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2)在 $1 \leq x \leq 20$, 且 x 为整数时,

$$\begin{aligned} \because R_1 &= -(x-10)^2 + 900, \\ \therefore \text{当 } x &= 10 \text{ 时, } R_1 \text{ 的最大值为 } 900. \end{aligned} \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

在 $21 \leq x \leq 30$, 且 x 为整数时,

$$\begin{aligned} \because \text{在 } R_2 &= -50x + 2000 \text{ 中, } R_2 \text{ 的值随 } x \text{ 值的增大而减小,} \\ \therefore \text{当 } x &= 21 \text{ 时, } R_2 \text{ 的最大值是 } 950. \end{aligned} \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\because 950 > 900,$$

$$\therefore \text{当 } x = 21 \text{ 即在第 } 21 \text{ 天时, 日销售利润最大, 最大值为 } 950 \text{ 元} \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

三、(共 10 分)

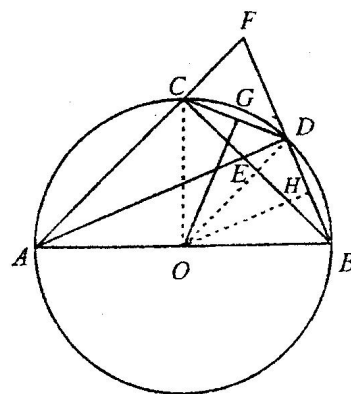
27. (1)猜想: $OG \perp CD$.

证明:如图,连结 OC 、 OD .

$$\because OC = OD, G \text{ 是 } CD \text{ 的中点,}$$

$$\therefore \text{由等腰三角形的性质,有 } OG \perp CD.$$

$\dots\dots 2 \text{ 分}$



(2)证明: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$

而 $\angle CAE = \angle CBF$ (同弧所对的圆周角相等).

在 $Rt\triangle ACE$ 和 $Rt\triangle BCF$ 中,

$$\because \angle ACE = \angle BCF = 90^\circ, AC = BC, \angle CAE = \angle CBF,$$

$$\therefore Rt\triangle ACE \cong Rt\triangle BCF. (ASA)$$

数学参考答案第 5 页(共 8 页)

$$\therefore AE = BF.$$

……3 分

(3)解:如图,过点 O 作 BD 的垂线,垂足为 H .

则 H 为 BD 的中点.

$$\therefore OH = \frac{1}{2}AD, \text{ 即 } AD = 2OH.$$

$$\text{又 } \angle CAD = \angle BAD \Rightarrow CD = BD, \therefore OH = OG.$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 和 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中,

$$\because \angle DBE = \angle DAC = \angle BAD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \sim \text{Rt}\triangle ADB.$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DB}, \text{ 即 } BD^2 = AD \cdot DE.$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot DE = 2OG \cdot DE = 6(2 - \sqrt{2}).$$

……1 分

$$\text{又 } BD = FD, \therefore BF = 2BD.$$

$$\therefore BF^2 = 4BD^2 = 24(2 - \sqrt{2}).$$

…① ……1 分

$$\text{设 } AC = x, \text{ 则 } BC = x, AB = \sqrt{2}x.$$

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\therefore \angle FAD = \angle BAD.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle AFD$ 中,

$$\because \angle ADB = \angle ADF = 90^\circ, AD = AD, \angle FAD = \angle BAD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle AFD. (\text{ASA})$$

$$\therefore AF = AB = \sqrt{2}x, BD = FD.$$

$$\therefore CF = AF - AC = \sqrt{2}x - x = (\sqrt{2} - 1)x.$$

在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中,由勾股定理,得

$$BF^2 = BC^2 + CF^2 = x^2 + [(\sqrt{2} - 1)x]^2 = 2(2 - \sqrt{2})x^2. \quad \dots\dots ② \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{由 } ①、②, \text{ 得 } 2(2 - \sqrt{2})x^2 = 24(2 - \sqrt{2}).$$

$$\therefore x^2 = 12. \text{ 解得 } x = 2\sqrt{3} \text{ 或 } -2\sqrt{3} (\text{舍去}).$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}x = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径长为 } \sqrt{6}.$$

……1 分

$$\therefore S_{\odot O} = \pi \cdot (\sqrt{6})^2 = 6\pi.$$

……1 分

四、(共 12 分)

28. 解: (1) $\because$ 直线 MC 的函数表达式为 $y=kx-3$,
 $\therefore$ 点 $C(0, -3)$1 分

$$\because \cos \angle BCO = \frac{|OC|}{|BC|} = \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$\therefore$ 可设 $|OC|=3t(t>0)$, $|BC|=\sqrt{10}t$.

则由勾股定理, 得 $|OB|=t$.

而 $|OC|=3t=3$, $\therefore t=1$.

$\therefore |OB|=1$. $\therefore$ 点 $B(1, 0)$.

.....1 分

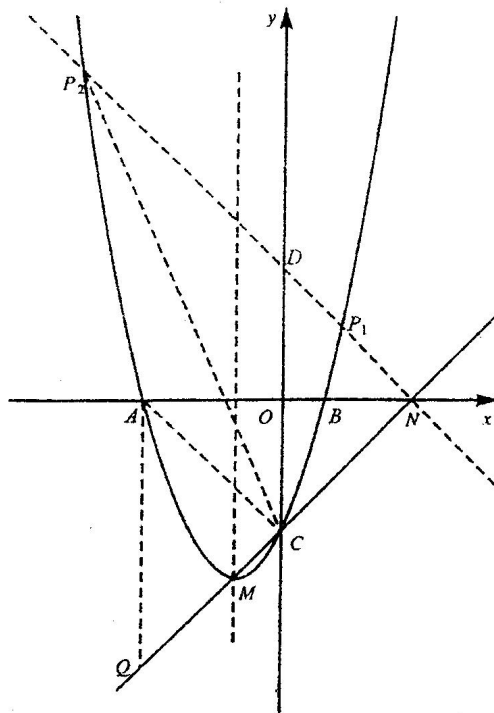
$\because$ 点 $B(1, 0)$, $C(0, -3)$ 在抛物线上,

$$\therefore \begin{cases} 4a+c=0, \\ a+c=-3. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=1, \\ c=-4. \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为

$$y=(x+1)^2-4=x^2+2x-3.$$

.....2 分



(2) 假设在抛物线上存在异于点 C 的点 P , 使以 N, P, C 为顶点的三角形是以 NC 为一条直角边的直角三角形.

①若 PN 为另一条直角边.

$\because$ 点 $M(-1, -4)$ 在直线 MC 上, $\therefore -4 = -k - 3$, 即 $k=1$.

$\therefore$ 直线 MC 的函数表达式为 $y=x-3$.

易得直线 MC 与 x 轴的交点 N 的坐标为 $N(3, 0)$.

$\because |OC|=|ON|$, $\therefore \angle CNO=45^\circ$.

在 y 轴上取点 $D(0, 3)$, 连结 ND 交抛物线于点 P .

$\because |ON|=|OD|$, $\therefore \angle DNO=45^\circ$. $\therefore \angle PNC=90^\circ$.

设直线 ND 的函数表达式为 $y=mx+n$.

$$\text{由 } \begin{cases} 3m+n=0, \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-1, \\ n=3. \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 ND 的函数表达式为 $y=-x+3$.

设点 $P(x, -x+3)$, 代入抛物线的函数表达式, 得

$$-x+3=x^2+2x-3, \text{ 即 } x^2+3x-6=0.$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{2}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{33}}{2}.$$

$$\therefore y_1 = \frac{9-\sqrt{33}}{2}, y_2 = \frac{9+\sqrt{33}}{2}.$$

$$\therefore \text{ 满足条件的点为 } P_1\left(\frac{-3+\sqrt{33}}{2}, \frac{9-\sqrt{33}}{2}\right), P_2\left(\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, \frac{9+\sqrt{33}}{2}\right).$$

.....2 分

②若 PC 是另一条直角边.

∵ 点 A 是抛物线与 x 轴的另一交点, ∴ 点 A 的坐标为 (-3, 0).

连结 AC. ∵ $|OA| = |OC|$, ∴ $\angle OCA = 45^\circ$. 又 $\angle OCN = 45^\circ$,

∴ $\angle ACN = 90^\circ$. ∴ 点 A 就是所求的点 $P_3(-3, 0)$1 分

[或: 求出直线 AC 的函数表达式为 $y = -x - 3$. 设点 $P(x, -x - 3)$, 代入抛物线的函数表达式, 得 $-x - 3 = x^2 + 2x - 3$, 即 $x^2 + 3x = 0$. 解得 $x_1 = -3, x_2 = 0$.

∴ $y_1 = 0, y_2 = -3$. ∴ 点 $P_3(-3, 0), P_4(0, -3)$ (舍去).]

综上所述, 在抛物线上存在满足条件的点, 有 3 个, 分别为:

$$P_1\left(\frac{-3+\sqrt{33}}{2}, \frac{9-\sqrt{33}}{2}\right), P_2\left(\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, \frac{9+\sqrt{33}}{2}\right), P_3(-3, 0). \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

(3) ①若抛物线沿其对称轴向上平移, 设向上平移 $b(b > 0)$ 个单位.

可设函数表达式为 $y = x^2 + 2x - 3 + b$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 + b, \\ y = x - 3 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } x^2 + x + b = 0.$$

∴ 要使抛物线与线段 NQ 总有交点, 必须

$$\Delta = 1 - 4b \geq 0, \text{ 即 } b \leq \frac{1}{4}. \therefore 0 < b \leq \frac{1}{4}.$$

∴ 若抛物线向上平移, 最多可平移 $\frac{1}{4}$ 个单位长度.2 分

②若抛物线沿其对称轴向下平移, 设向下平移 $b(b > 0)$ 个单位.

可设函数表达式为 $y = x^2 + 2x - 3 - b$.

∴ 当 $x = -3$ 时, $y = -b$; 当 $x = 3$ 时, $y = 12 - b$.

易求得 $Q(-3, -6)$, 又 $N(3, 0)$.

∴ 要使抛物线与线段 NQ 总有交点, 必须

$$-b \geq -6 \text{ 或 } 12 - b \geq 0, \text{ 即 } b \leq 6 \text{ 或 } 6 \leq 12.$$

$$\therefore 0 < b \leq 12.$$

∴ 若抛物线向下平移, 最多可平移 12 个单位长度.1 分

[或: 若抛物线沿其对称轴向下平移, 设平移 $b(b > 0)$ 个单位.

则 $y_1 = x^2 + 2x - 3 - b, y_2 = x - 3$ 在 $-3 \leq x \leq 3$ 总有交点.

即 $y_1 - y_2 = x^2 + 2x - 3 - b - x + 3 = x^2 + x - b = 0$ 在 $-3 \leq x \leq 3$ 总有实数根.

$$\text{令 } y = x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \text{ 在 } -3 \leq x \leq 3 \text{ 时, } -\frac{1}{4} \leq y \leq 12.$$

$$\therefore \text{要使 } x^2 + x - b = 0 \text{ 在 } -3 \leq x \leq 3 \text{ 有解, } b \text{ 必须满足 } -\frac{1}{4} \leq b \leq 12.$$

∴ $0 < b \leq 12$, 即 b 的最大值为 12. ∴ 向下最多可平移 12 个单位长度.]

综上所述, 若将抛物线沿其对称轴上下平移, 使抛物线与线段 NQ 总有公共点,

则向上最多可平移 $\frac{1}{4}$ 个单位长度, 向下最多可平移 12 个单位长度.

.....1 分