

2014 年辽宁省沈阳市中考数学试卷

一、选择题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. (3 分) (2014•沈阳) 0 这个数是 ()

- A. 正数 B. 负数 C. 整数 D. 无理数

2. (3 分) (2014•沈阳) 2014 年端午节小长假期间, 沈阳某景区接待游客约为 85000 人, 将数据 85000 用科学记数法表示为 ()

- A. 85×10^3 B. 8.5×10^4 C. 0.85×10^5 D. 8.5×10^5

3. (3 分) (2014•沈阳) 某几何体的三视图如图所示, 这个几何体是 ()

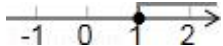
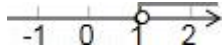


- A. 圆柱 B. 三棱柱 C. 长方体 D. 圆锥

4. (3 分) (2014•沈阳) 已知一组数据: 1, 2, 6, 3, 3, 下列说法正确的是 ()

- A. 众数是 3 B. 中位数是 6 C. 平均数是 4 D. 方差是 5

5. (3 分) (2014•沈阳) 一元一次不等式 $x - 1 \geq 0$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

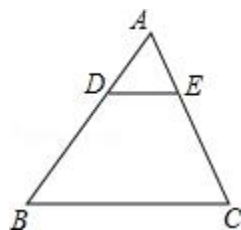
6. (3 分) (2014•沈阳) 正方形是轴对称图形, 它的对称轴有 ()

- A. 2 条 B. 4 条 C. 6 条 D. 8 条

7. (3 分) (2014•沈阳) 下列运算正确的是 ()

- A. $(-x^3)^2 = -x^6$ B. $x^4 + x^4 = x^8$ C. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ D. $xy^4 \div (-xy) = -y^3$

8. (3 分) (2014•沈阳) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $BD = 2AD$, $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E, 若线段 $DE = 5$, 则线段 BC 的长为 ()



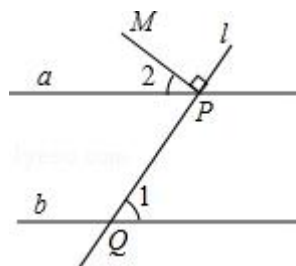
- A. 7.5 B. 10 C. 15 D. 20

二、填空题 (每小题 4 分, 共 32 分)

9. (4 分) (2014•沈阳) 计算: $\sqrt{9}$ = _____.

10. (4 分) (2014•沈阳) 分解因式: $2m^2+10m$ = _____.

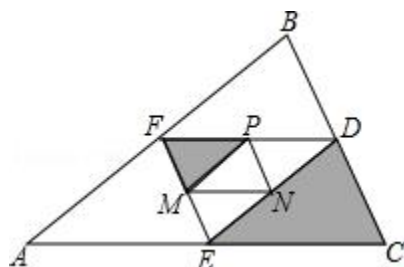
11. (4 分) (2014•沈阳) 如图, 直线 $a \parallel b$, 直线 l 与 a 相交于点 P , 与直线 b 相交于点 Q , $PM \perp l$ 于点 P , 若 $\angle 1 = 50^\circ$, 则 $\angle 2$ = _____ $^\circ$.



12. (4 分) (2014•沈阳) 化简: $(1 + \frac{1}{x-1}) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ = _____.

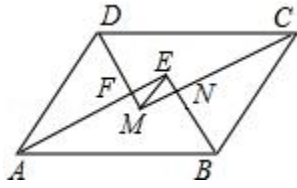
13. (4 分) (2014•沈阳) 已知一次函数 $y=x+1$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象相交, 其中有一个交点的横坐标是 2, 则 k 的值为 _____.

14. (4 分) (2014•沈阳) 如图, $\triangle ABC$ 三边的中点 D, E, F 组成 $\triangle DEF$, $\triangle DEF$ 三边的中点 M, N, P 组成 $\triangle MNP$, 将 $\triangle FPM$ 与 $\triangle ECD$ 涂成阴影. 假设可以随意在 $\triangle ABC$ 中取点, 那么这个点取在阴影部分的概率为 _____.



15. (4 分) (2014•沈阳) 某种商品每件进价为 20 元, 调查表明: 在某段时间内若以每件 x 元 ($20 \leq x \leq 30$, 且 x 为整数) 出售, 可卖出 $(30-x)$ 件. 若使利润最大, 每件的售价应为 _____ 元.

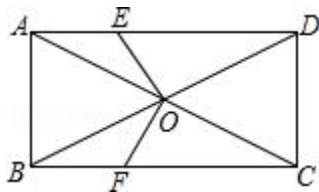
16. (4 分) (2014•沈阳) 如图, $\square ABCD$ 中, $AB > AD$, AE, BE, CM, DM 分别为 $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ 的平分线, AE 与 DM 相交于点 F , BE 与 CM 相交于点 H , 连接 EM . 若 $\square ABCD$ 的周长为 42cm, $FM=3$ cm, $EF=4$ cm, 则 EM = _____ cm, AB = _____ cm.



三、解答题 (17、18 各 8 分, 19 题 10 分, 共 26 分)

17. (8 分) (2014•沈阳) 先化简, 再求值: $\{ (a+b)^2 - (a-b)^2 \} \cdot a$, 其中 $a = -1$, $b = 5$.

18. (8 分) (2014•沈阳) 如图, 在矩形 ABCD 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O, 点 E, F 分别在边 AD, BC 上, 且 $DE = CF$, 连接 OE, OF. 求证: $OE = OF$.



19. (10 分) (2014•沈阳) 在一个不透明的盒子里有红球、白球、黑球各一个, 它们除了颜色外其余都相同. 小明从盒子里随机摸出一球, 记录下颜色后放回盒子里, 充分摇匀后, 再随机摸出一球, 并记录下颜色. 请用列表法或画树状图 (树形图) 法求小明两次摸出的球颜色不同的概率.

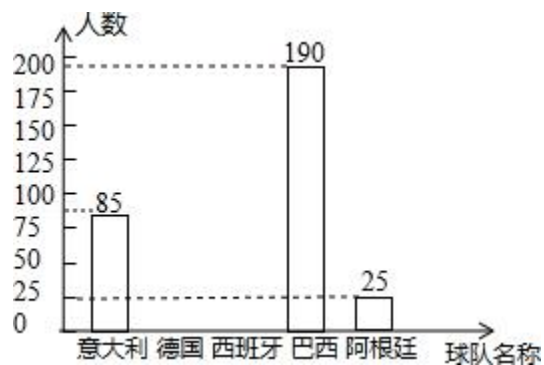
四、每小题 10 分，共 20 分

20. (10 分) (2014·沈阳) 2014 年世界杯足球赛于北京时间 6 月 13 日 2 时在巴西开幕，某媒体足球栏目从参加世界杯球队中选出五支传统强队：意大利队、德国队、西班牙队、巴西队、阿根廷队，对哪支球队最有可能获得冠军进行了问卷调查. 为了使调查结果有效，每位被调查者只能填写一份问卷，在问卷中必须选择这五支球队中的一队作为调查结果，这样的问卷才能成为有效问卷. 从收集到的 4800 份有效问卷中随机抽取部分问卷进行了统计，绘制了统计图表的一部分如下：

球队名称	百分比
意大利	17%
德国	a
西班牙	10%
巴西	38%
阿根廷	b

根据统计图表提供的信息，解答下列问题：

- (1) $a=$ _____， $b=$ _____；
- (2) 根据以上信息，请直接在答题卡中补全条形统计图；
- (3) 根据抽样调查结果，请你估计在提供有效问卷的这 4800 人中有多少人预测德国队最有可能获得冠军.



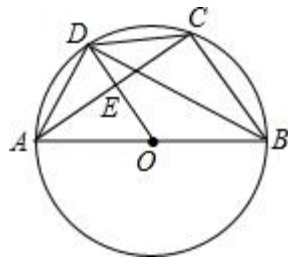
21. (10 分) (2014•沈阳) 某公司今年销售一种产品, 1 月份获得利润 20 万元, 由于产品畅销, 利润逐月增加, 3 月份的利润比 2 月份的利润增加 4.8 万元, 假设该产品利润每月的增长率相同, 求这个增长率.

五、本题 10 分

22. (10 分) (2014•沈阳) 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 为直径, $OD \parallel BC$ 交 $\odot O$ 于点 D , 交 AC 于点 E , 连接 AD , BD , CD .

(1) 求证: $AD=CD$;

(2) 若 $AB=10$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$, 求 $\tan \angle DBC$ 的值.



六、本题 12 分

23. (12 分) (2014·沈阳) 如图, 在平面直角坐标系中, 四边形 OABC 的顶点 O 为坐标原点, 点 C 在 x 轴的正半轴上, 且 $BC \perp OC$ 于点 C, 点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$, $AB=4\sqrt{3}$, $\angle B=60^\circ$, 点 D 是线段 OC 上一点, 且 $OD=4$, 连接 AD.

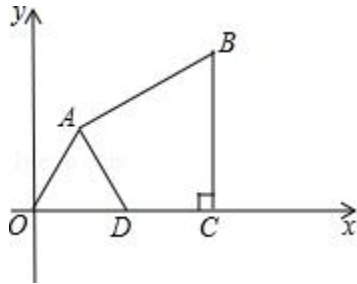
(1) 求证: $\triangle AOD$ 是等边三角形;

(2) 求点 B 的坐标;

(3) 平行于 AD 的直线 l 从原点 O 出发, 沿 x 轴正方向平移. 设直线 l 被四边形 OABC 截得的线段长为 m, 直线 l 与 x 轴交点的横坐标为 t.

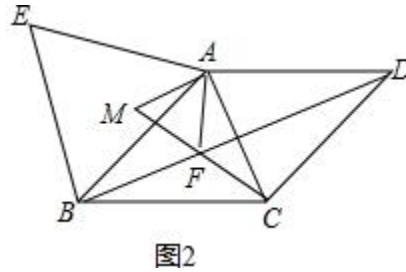
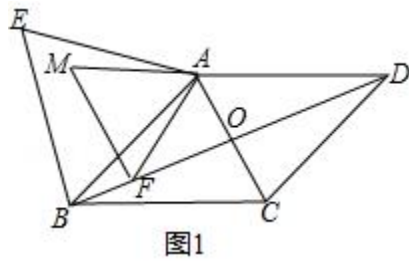
①当直线 l 与 x 轴的交点在线段 CD 上 (交点不与点 C, D 重合) 时, 请直接写出 m 与 t 的函数关系式 (不必写出自变量 t 的取值范围)

②若 $m=2$, 请直接写出此时直线 l 与 x 轴的交点坐标.



七、本题 12 分

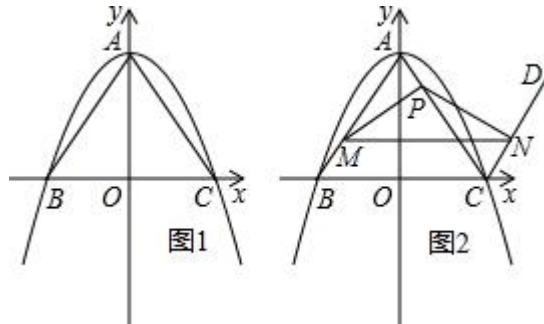
24. (12 分) (2014•沈阳) 如图 1, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AB=13$, $BD=24$, 在菱形 $ABCD$ 的外部以 AB 为边作等边三角形 ABE . 点 F 是对角线 BD 上一动点 (点 F 不与点 B 重合), 将线段 AF 绕点 A 顺时针方向旋转 60° 得到线段 AM , 连接 FM .



- (1) 求 AO 的长;
- (2) 如图 2, 当点 F 在线段 BO 上, 且点 M, F, C 三点在同一条直线上时, 求证: $AC=\sqrt{3}AM$;
- (3) 连接 EM , 若 $\triangle AEM$ 的面积为 40, 请直接写出 $\triangle AFM$ 的周长.

八、本题 14 分

25. (14 分) (2014•沈阳) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y = -\frac{4}{27}x^2 + 12$ 的图象与 y 轴交于点 A, 与 x 轴交于 B, C 两点 (点 B 在点 C 的左侧), 连接 AB, AC.



(1) 点 B 的坐标为 _____, 点 C 的坐标为 _____;

(2) 过点 C 作射线 $CD \parallel AB$, 点 M 是线段 AB 上的动点, 点 P 是线段 AC 上的动点, 且始终满足 $BM = AP$ (点 M 不与点 A, 点 B 重合), 过点 M 作 $MN \parallel BC$ 分别交 AC 于点 Q, 交射线 CD 于点 N (点 Q 不与点 P 重合), 连接 PM, PN, 设线段 AP 的长为 n.

①如图 2, 当 $n < \frac{1}{2}AC$ 时, 求证: $\triangle PAM \cong \triangle NCP$;

②直接用含 n 的代数式表示线段 PQ 的长;

③若 PM 的长为 $\sqrt{97}$, 当二次函数 $y = -\frac{4}{27}x^2 + 12$ 的图象经过平移同时过点 P 和点 N 时, 请直接写出此时的二次函数表达式.

2014 年辽宁省沈阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) (2014•沈阳) 0 这个数是 ()

- A. 正数 B. 负数 C. 整数 D. 无理数

考点: 有理数.

分析: 根据 0 的意义, 可得答案.

解答: 解: A、B、0 不是正数也不是负数, 故 A、B 错误;

C、是整数, 故 C 正确;

D、0 是有理数, 故 D 错误;

故选: C.

点评: 本题考查了有理数, 注意 0 不是正数也不是负数, 0 是有理数.

2. (3 分) (2014•沈阳) 2014 年端午节小长假期间, 沈阳某景区接待游客约为 85000 人, 将数据 85000 用科学记数法表示为 ()

- A. 85×10^3 B. 8.5×10^4 C. 0.85×10^5 D. 8.5×10^5

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: 将 85000 用科学记数法表示为: 8.5×10^4 .

故选: B.

点评: 此题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) (2014•沈阳) 某几何体的三视图如图所示, 这个几何体是 ()



- A. 圆柱 B. 三棱柱 C. 长方体 D. 圆锥

考点: 由三视图判断几何体.

分析: 主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看, 所得到的图形.

解答: 解: 由于主视图和左视图为长方形可得此几何体为柱体,

由俯视图为长方形可得为长方体.

故选 C.

点评: 本题考查了由三视图来判断几何体, 还考查学生对三视图掌握程度和灵活运用能力, 同时也体现了对空间的想象能力.

4. (3 分) (2014•沈阳) 已知一组数据: 1, 2, 6, 3, 3, 下列说法正确的是 ()

- A. 众数是 3 B. 中位数是 6 C. 平均数是 4 D. 方差是 5

考点: 众数; 算术平均数; 中位数; 方差.

分析: 利用众数、算术平均数、中位数及方差的定义分别求解后即可确定正确的选项.

解答: 解: A、数据 3 出现 2 次, 最多, 故众数为 3 正确;

B、排序后位于中间位置的数为 3, 故中位数为 3, 故选项错误;

C、平均数为 3, 故选项错误;

D、方差为 2.4, 故选项错误.

故选 A.

点评: 本题考查了众数、算术平均数、中位数及方差的定义, 属于基础题, 比较简单.

5. (3 分) (2014•沈阳) 一元一次不等式 $x - 1 \geq 0$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()

- A. B. C. D.

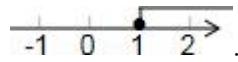
考点: 在数轴上表示不等式的解集; 解一元一次不等式.

分析: 先求出不等式的解集, 再在数轴上表示出来即可.

解答: 解: 移项得, $x \geq 1$,

故此不等式组的解集为: $x \geq 1$.

在数轴上表示为:



故选 A.

点评: 本题考查的是在数轴上表示不等式的解集, 熟知“小于向左, 大于向右”是解答此题的关键.

6. (3 分) (2014•沈阳) 正方形是轴对称图形, 它的对称轴有 ()

- A. 2 条 B. 4 条 C. 6 条 D. 8 条

考点: 轴对称图形.

分析: 正方形既是矩形, 又是菱形, 具有矩形和菱形的轴对称性, 由此可知其对称轴.

解答: 解: 正方形的对称轴是两对角线所在的直线, 两对边中点所在的直线,

对称轴共 4 条.

故选: B.

点评: 本题考查了正方形的轴对称性. 关键是明确正方形既具有矩形的轴对称性, 又具有菱形的轴对称性.

7. (3 分) (2014•沈阳) 下列运算正确的是 ()

- A. $(-x^3)^2 = -x^6$ B. $x^4 + x^4 = x^8$ C. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ D. $xy^4 \div (-xy) = -y^3$

考点: 整式的除法; 合并同类项; 同底数幂的乘法; 幂的乘方与积的乘方.

专题: 计算题.

分析: A、原式利用幂的乘方与积的乘方运算法则计算得到结果, 即可作出判断;

B、原式合并得到结果即可找出判断;

C、原式利用同底数幂的乘法法则计算得到结果, 即可找出判断;

D、原式利用单项式除以单项式法则计算即可得到结果.

解答: 解: A、原式= x^6 , 故选项错误;

B、原式= $2x^4$, 故选项错误;

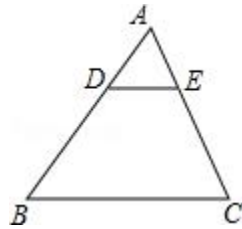
C、原式= x^5 , 故选项错误;

D、原式= $-y^3$, 故选项正确.

故选: D.

点评: 此题考查了整式的除法, 合并同类项, 同底数幂的乘法, 以及幂的乘方与积的乘方, 熟练掌握运算是解本题的关键.

8. (3分) (2014•沈阳) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点D在边AB上, $BD=2AD$, $DE \parallel BC$ 交AC于点E, 若线段 $DE=5$, 则线段BC的长为 ()



A. 7.5

B. 10

C. 15

D. 20

考点: 相似三角形的判定与性质.

分析: 由 $DE \parallel BC$, 可证得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 然后由相似三角形的对应边成比例求得答案.

解答: 解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

$$\because BD=2AD,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\because DE=5,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DE=15.$$

故选 C.

点评: 此题考查了相似三角形的判定与性质. 此题比较简单, 注意掌握数形结合思想的应用.

二、填空题 (每小题 4 分, 共 32 分)

9. (4 分) (2014•沈阳) 计算: $\sqrt{9}$ = 3.

考点: 算术平方根.

分析: 根据算术平方根的定义计算即可.

解答: 解: $\because 3^2=9$,

$$\therefore \sqrt{9}=3.$$

点评: 本题较简单, 主要考查了学生开平方的运算能力.

10. (4 分) (2014•沈阳) 分解因式: $2m^2+10m$ = $2m(m+5)$.

考点: 因式分解-提公因式法.

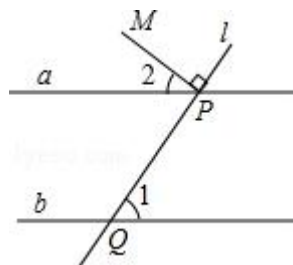
分析: 直接提取公因式 $2m$, 进而得出答案.

解答: 解: $2m^2+10m=2m(m+5)$.

故答案为: $2m(m+5)$.

点评: 此题主要考查了提取公因式法分解因式, 正确提取公因式是解题关键.

11. (4 分) (2014•沈阳) 如图, 直线 $a \parallel b$, 直线 l 与 a 相交于点 P , 与直线 b 相交于点 Q , $PM \perp l$ 于点 P , 若 $\angle 1=50^\circ$, 则 $\angle 2$ = 40 $^\circ$.



考点: 平行线的性质; 垂线.

分析: 根据两直线平行, 内错角相等, 即可求得 $\angle 3=\angle 1$, 根据 $PM \perp l$ 于点 P , 则 $\angle MPQ=90^\circ$, 即可求解.

解答: 解: $\because$ 直线 $a \parallel b$,

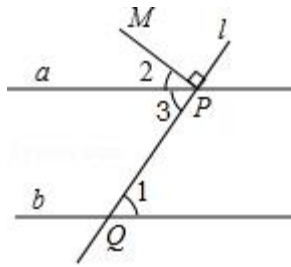
$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 50^\circ,$$

又 $\because PM \perp l$ 于点 P ,

$$\therefore \angle MPQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 90^\circ - \angle 3 = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

故答案是: 40.



点评: 本题重点考查了平行线的性质及垂直的定义, 是一道较为简单的题目.

12. (4 分) (2014•沈阳) 化简: $(1 + \frac{1}{x-1}) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1}$.

考点: 分式的混合运算.

专题: 计算题.

分析: 原式括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算, 约分即可得到结果.

解答: 解: 原式 $= \frac{x-1+1}{x-1} \cdot \frac{1}{x}$
 $= \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{x}$
 $= \frac{1}{x-1}.$

故答案为: $\frac{1}{x-1}.$

点评: 此题考查了分式的混合运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

13. (4 分) (2014•沈阳) 已知一次函数 $y=x+1$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象相交, 其中有一个交点的横坐标是 2, 则 k 的值为 6.

考点: 反比例函数与一次函数的交点问题.

分析: 把 $x=2$ 代入一次函数的解析式, 即可求得交点坐标, 然后利用待定系数法即可求得 k 的值.

解答: 解: 在 $y=x+1$ 中, 令 $x=2$, 解得 $y=3$,

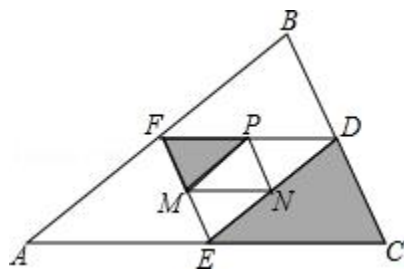
则交点坐标是: $(2, 3)$,

代入 $y=\frac{k}{x}$ 得: $k=6$.

故答案是: 6.

点评: 本题考查了用待定系数法确定函数的解析式, 是常用的一种解题方法. 同学们要熟练掌握这种方法.

14. (4 分) (2014•沈阳) 如图, $\triangle ABC$ 三边的中点 D, E, F 组成 $\triangle DEF$, $\triangle DEF$ 三边的中点 M, N, P 组成 $\triangle MNP$, 将 $\triangle FPM$ 与 $\triangle ECD$ 涂成阴影. 假设可以随意在 $\triangle ABC$ 中取点, 那么这个点取在阴影部分的概率为 $\frac{5}{16}$.



考点: 三角形中位线定理; 几何概率.

分析: 先设阴影部分的面积是 x , 得出整个图形的面积是, 再根据几何概率的求法即可得出答案.

解答: 解: $\because D, E$ 分别是 BC, AC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore ED \parallel AB$, 且 $DE = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBA$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CBA}} = \left(\frac{ED}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{4}S_{\triangle CBA}.$$

$$\text{同理, } S_{\triangle FPM} = \frac{1}{4} S_{\triangle FDE} = \frac{1}{16} S_{\triangle CBA}.$$

$$\therefore S_{\triangle FPM} + S_{\triangle CDE} = \frac{5}{16} S_{\triangle CBA}.$$

$$\text{则 } \frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\triangle CBA}} = \frac{5}{16}.$$

$$\text{故答案是: } \frac{5}{16}.$$

点评: 本题考查了三角形中位线定理和几何概率. 几何概率的求法: 首先根据题意将代数关系用面积表示出来, 一般用阴影区域表示所求事件 (A); 然后计算阴影区域的面积在总面积中占的比例, 这个比例即事件 (A) 发生的概率.

15. (4 分) (2014•沈阳) 某种商品每件进价为 20 元, 调查表明: 在某段时间内若以每件 x 元 ($20 \leq x \leq 30$, 且 x 为整数) 出售, 可卖出 $(30 - x)$ 件. 若使利润最大, 每件的售价应为 25 元.

考点: 二次函数的应用.

分析: 本题是营销问题, 基本等量关系: 利润 = 每件利润 $\times$ 销售量, 每件利润 = 每件售价 - 每件进价. 再根据所列二次函数求最大值.

解答: 解: 设最大利润为 w 元,

$$\text{则 } w = (x - 20)(30 - x) = -(x - 25)^2 + 25,$$

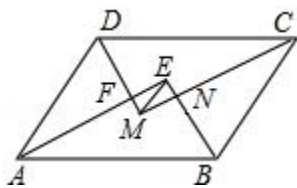
$$\because 20 \leq x \leq 30,$$

$$\therefore \text{当 } x = 25 \text{ 时, 二次函数有最大值 } 25,$$

故答案是: 25.

点评: 本题考查了把实际问题转化为二次函数, 再利用二次函数的性质进行实际应用. 此题为数学建模题, 借助二次函数解决实际问题.

16. (4 分) (2014•沈阳) 如图, $\square ABCD$ 中, $AB > AD$, AE , BE , CM , DM 分别为 $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ 的平分线, AE 与 DM 相交于点 F , BE 与 CM 相交于点 H , 连接 EM . 若 $\square ABCD$ 的周长为 42cm, $FM = 3\text{cm}$, $EF = 4\text{cm}$, 则 $EM =$ 5 cm, $AB =$ 13 cm.



考点: 矩形的判定与性质；勾股定理的应用；平行四边形的性质；相似三角形的应用.

专题: 综合题.

分析: 由条件易证 $\angle AEB = \angle AFD = \angle DMC = 90^\circ$. 进而可证到四边形 EFMN 是矩形及 $\angle EFM = 90^\circ$, 由 $FM = 3\text{cm}$, $EF = 4\text{cm}$ 可求出 EM. 易证 $\triangle ADF \cong \triangle CBN$, 从而得到 $DF = BN$; 易证 $\triangle AFD \sim \triangle AEB$, 从而得到 $4DF = 3AF$. 设 $DF = 3k$, 则 $AF = 4k$. $AE = 4(k+1)$, $BE = 3(k+1)$, 从而有 $AD = 5k$, $AB = 5(k+1)$. 由 $\square ABCD$ 的周长为 42cm 可求出 k , 从而求出 AB 长.

解答: 解: $\because AE$ 为 $\angle DAB$ 的平分线,

$$\therefore \angle DAE = \angle EAB = \frac{1}{2} \angle DAB,$$

$$\text{同理: } \angle ABE = \angle CBE = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$$\angle BCM = \angle DCM = \frac{1}{2} \angle BCD,$$

$$\angle CDM = \angle ADM = \frac{1}{2} \angle ADC.$$

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore \angle DAB = \angle BCD, \angle ABC = \angle ADC, AD = BC.$$

$$\therefore \angle DAF = \angle BCN, \angle ADF = \angle CBN.$$

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CBN$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAF = \angle BCN \\ AD = CB \\ \angle ADF = \angle CBN \end{cases}.$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBN \text{ (ASA)}.$$

$$\therefore DF = BN.$$

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle EAB + \angle EBA = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AEB=90^\circ.$$

同理可得: $\angle AFD=\angle DMC=90^\circ$.

$$\therefore \angle EFM=90^\circ.$$

$$\because FM=3, EF=4,$$

$$\therefore ME=\sqrt{3^2+4^2}=5 \text{ (cm)}.$$

$$\because \angle EFM=\angle FMN=\angle FEN=90^\circ.$$

$\therefore$ 四边形 EFMN 是矩形.

$$\therefore EN=FM=3.$$

$$\because \angle DAF=\angle EAB, \angle AFD=\angle AEB,$$

$$\therefore \triangle AFD \sim \triangle AEB.$$

$$\therefore \frac{DF}{BE} = \frac{AF}{AE}.$$

$$\therefore \frac{DF}{3+DF} = \frac{AF}{4+AF}.$$

$$\therefore 4DF=3AF.$$

设 $DF=3k$, 则 $AF=4k$.

$$\because \angle AFD=90^\circ,$$

$$\therefore AD=5k.$$

$$\because \angle AEB=90^\circ, AE=4(k+1), BE=3(k+1),$$

$$\therefore AB=5(k+1).$$

$$\because 2(AB+AD)=42,$$

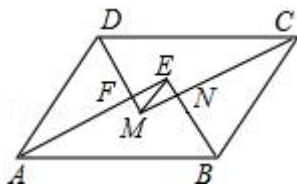
$$\therefore AB+AD=21.$$

$$\therefore 5(k+1)+5k=21.$$

$$\therefore k=1.6.$$

$$\therefore AB=13 \text{ (cm)}.$$

故答案为: 5、13.



点评: 本题考查了平行四边形的性质、平行线的性质、矩形的判定与性质、相似三角形的判

定与性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理等知识，综合性较强.

三、解答题 (17、18 各 8 分, 19 题 10 分, 共 26 分)

17. (8 分) (2014•沈阳) 先化简, 再求值: $\{ (a+b)^2 - (a-b)^2 \} \cdot a$, 其中 $a = -1$, $b = 5$.

考点: 整式的混合运算—化简求值.

分析: 先利用完全平方公式和整式的乘法计算化简, 再进一步代入求得数值即可.

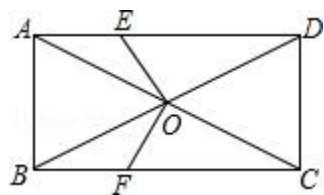
解答: 解: $[(a+b)^2 - (a-b)^2] \cdot a$
 $= (a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2) \cdot a$
 $= 4ab \cdot a$
 $= 4a^2b;$

当 $a = -1$, $b = 5$ 时,

原式 $= 4 \times (-1)^2 \times 5 = 20$.

点评: 此题考查整式的混合运算与化简求值, 注意先利用公式计算化简, 再进一步代入求得数值即可.

18. (8 分) (2014•沈阳) 如图, 在矩形 ABCD 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O, 点 E, F 分别在边 AD, BC 上, 且 $DE = CF$, 连接 OE, OF. 求证: $OE = OF$.



考点: 全等三角形的判定与性质; 矩形的性质.

专题: 证明题.

分析: 欲证明 $OE = OF$, 只需证得 $\triangle ODE \cong \triangle OCF$ 即可.

解答: 证明: 如图, $\because$ 四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$, $AC = BD$, $OD = \frac{1}{2}BD$, $OC = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore OD = OC$,

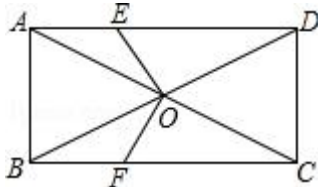
$\therefore \angle ODC = \angle OCD$,

$\therefore \angle ADC - \angle ODC = \angle BCD - \angle OCD$, 即 $\angle EDO = \angle FCO$,

$\therefore$ 在 $\triangle ODE$ 与 $\triangle OCF$ 中,
$$\begin{cases} DE=CF \\ \angle EDO=\angle FCO, \\ OD=OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ODE \cong \triangle OCF$ (SAS),

$\therefore OE=OF$.



点评: 本题考查了全等三角形的判定与性质, 矩形的性质. 全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时, 关键是选择恰当的判定条件.

19. (10 分) (2014•沈阳) 在一个不透明的盒子里有红球、白球、黑球各一个, 它们除了颜色外其余都相同. 小明从盒子里随机摸出一球, 记录下颜色后放回盒子里, 充分摇匀后, 再随机摸出一球, 并记录下颜色. 请用列表法或画树状图 (树形图) 法求小明两次摸出的球颜色不同的概率.

考点: 列表法与树状图法.

分析: 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与小明两次摸出的球颜色不同的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

解答: 解: 画树状图得:



$\therefore$ 共有 9 种等可能的结果, 小明两次摸出的球颜色不同的有 6 种情况,

$\therefore$ 小明两次摸出的球颜色不同的概率为: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

点评: 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以

上完成的事件. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

四、每小题 10 分, 共 20 分

20. (10 分) (2014•沈阳) 2014 年世界杯足球赛于北京时间 6 月 13 日 2 时在巴西开幕, 某媒体足球栏目从参加世界杯球队中选出五支传统强队: 意大利队、德国队、西班牙队、巴西队、阿根廷队, 对哪支球队最有可能获得冠军进行了问卷调查. 为了使调查结果有效, 每位被调查者只能填写一份问卷, 在问卷中必须选择这五支球队中的一队作为调查结果, 这样的问卷才能成为有效问卷. 从收集到的 4800 份有效问卷中随机抽取部分问卷进行了统计, 绘制了统计图表的一部分如下:

球队名称 百分比

意大利 17%

德国 a

西班牙 10%

巴西 38%

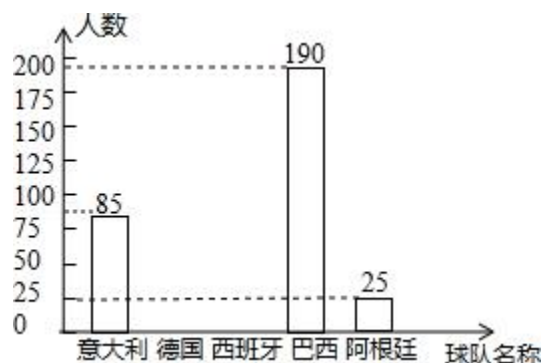
阿根廷 b

根据统计图表提供的信息, 解答下列问题:

(1) $a = \underline{30\%}$, $b = \underline{5\%}$;

(2) 根据以上信息, 请直接在答题卡中补全条形统计图;

(3) 根据抽样调查结果, 请你估计在提供有效问卷的这 4800 人中有多少人预测德国队最有可能获得冠军.



考点: 条形统计图; 用样本估计总体.

分析: (1) 首先根据意大利有 85 人, 占 17%, 据此即可求得总人数, 则根据百分比的定义

求得 b 的值，然后利用 1 减去其它各组的百分比即可求得 a 的值；

(2) 根据百分比的定义求得德国、西班牙的人数，即可解答；

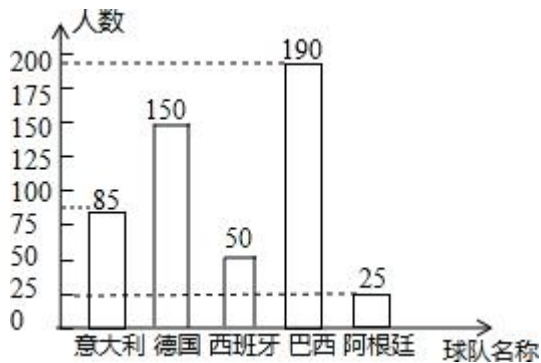
(3) 利用总人数 4800，乘以对应的百分比即可求解.

解答: 解: (1) 总人数是: $85 \div 17\% = 500$ (人),

$$\text{则 } b = \frac{25}{500} = 5\%,$$

$$a = 1 - 17\% - 10\% - 38\% - 5\% = 30\%;$$

(2)



(3) $4800 \times 30\% = 1440$ (人).

点评: 本题考查的是条形统计图的综合运用. 读懂统计图, 从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据.

21. (10 分) (2014•沈阳) 某公司今年销售一种产品, 1 月份获得利润 20 万元, 由于产品畅销, 利润逐月增加, 3 月份的利润比 2 月份的利润增加 4.8 万元, 假设该产品利润每月的增长率相同, 求这个增长率.

考点: 一元二次方程的应用.

专题: 增长率问题.

分析: 设每月获得的利润的增长率是 x , 然后用 x 分别表示出 2 月份和 3 月份, 根据“3 月份的利润比 2 月份的利润增加 4.8 万元”列方程求解.

解答: 解: 设这个增长率为 x .

$$\text{依题意得: } 20(1+x)^2 - 20(1+x) = 4.8,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0.2, x_2 = -1.2 \text{ (不合题意, 舍去).}$$

$$0.2 = 20\%.$$

答：这个增长率是 20%.

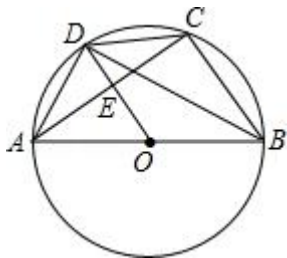
点评： 本题考查了一元二次方程的应用. 此题中要求学生能够根据利润率分别用 x 表示出每一年的利润. 能够熟练运用因式分解法解方程.

五、本题 10 分

22. (10 分) (2014·沈阳) 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 为直径, $OD \parallel BC$ 交 $\odot O$ 于点 D , 交 AC 于点 E , 连接 AD , BD , CD .

(1) 求证: $AD=CD$;

(2) 若 $AB=10$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$, 求 $\tan \angle DBC$ 的值.



考点： 圆周角定理；勾股定理；圆心角、弧、弦的关系；解直角三角形.

分析： (1) 由 AB 为直径, $OD \parallel BC$, 易得 $OD \perp AC$, 然后由垂径定理证得, $\widehat{AD} = \widehat{CD}$, 继而证得结论;

(2) 由 $AB=10$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$, 可求得 OE 的长, 继而求得 DE , AE 的长, 则可求得 $\tan \angle DAE$, 然后由圆周角定理, 证得 $\angle DBC = \angle DAE$, 则可求得答案.

解答： (1) 证明: $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because OD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \perp AC,$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore AD = CD;$$

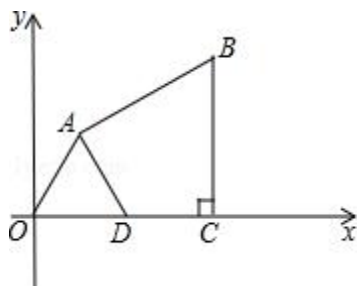
$$\begin{aligned}
(2) \text{ 解: } & \because AB=10, \\
& \therefore OA=OD=\frac{1}{2}AB=5, \\
& \because OD \parallel BC, \\
& \therefore \angle AOE=\angle ABC, \\
& \text{在 Rt}\triangle AEO \text{ 中, } OE=OA \cdot \cos \angle AOE=OA \cdot \cos \angle ABC=5 \times \frac{3}{5}=3, \\
& \therefore DE=OD-OE=5-3=2, \\
& \therefore AE=\sqrt{AO^2-OE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4, \\
& \text{在 Rt}\triangle AED \text{ 中, } \tan \angle DAE=\frac{DE}{AE}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \\
& \because \angle DBC=\angle DAE, \\
& \therefore \tan \angle DBC=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

点评: 此题考查了圆周角定理、垂径定理以及勾股定理. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

六、本题 12 分

23. (12 分) (2014•沈阳) 如图, 在平面直角坐标系中, 四边形 OABC 的顶点 O 为坐标原点, 点 C 在 x 轴的正半轴上, 且 $BC \perp OC$ 于点 C, 点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$, $AB=4\sqrt{3}$, $\angle B=60^\circ$, 点 D 是线段 OC 上一点, 且 $OD=4$, 连接 AD.

- (1) 求证: $\triangle AOD$ 是等边三角形;
- (2) 求点 B 的坐标;
- (3) 平行于 AD 的直线 l 从原点 O 出发, 沿 x 轴正方向平移. 设直线 l 被四边形 OABC 截得的线段长为 m, 直线 l 与 x 轴交点的横坐标为 t.
 - ①当直线 l 与 x 轴的交点在线段 CD 上 (交点不与点 C, D 重合) 时, 请直接写出 m 与 t 的函数关系式 (不必写出自变量 t 的取值范围)
 - ②若 $m=2$, 请直接写出此时直线 l 与 x 轴的交点坐标.



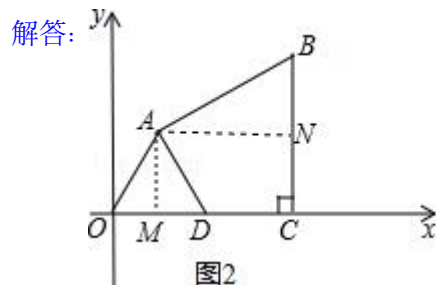
考点: 一次函数综合题.

分析: (1) 过点 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M, 根据已知条件, 依据三角函数求得 $\angle AOM = 60^\circ$, 根据勾股定理求得 $OA = 4$, 即可求得.

(2) 过点 A 作 $AN \perp BC$ 于点 N, 则四边形 AMCN 是矩形, 在 $Rt\triangle ABN$ 中, 根据三角函数求得 AN、BN 的值, 从而求得 OC、BC 的长, 得出点 B 的坐标.

(3) ①如图 3, 因为 $\angle B = 60^\circ$, $BC = 4\sqrt{3}$, 所以 $PC = 12$, $EM = \frac{\sqrt{3}}{2}m$, 因为 $OC = 8$, 所以 $PO = 4$, $OF = t$, $DF = t - \frac{1}{2}m$, 所以 $PD = 4 + (t - \frac{1}{2}m)$, 根据 $\triangle PDE \sim \triangle PCB$ 即可求得 $m = \frac{1}{2}t + 2$;

②如图 4, $\triangle OEF$ 是等边三角形所以 $OF = EF = m = 2$, 在 $Rt\triangle PCF'$ 中 $\angle CF'P = 60^\circ$, $\angle BPE' = \angle CPF' = 30^\circ$, 所以 $BP = PE' \div \sin \angle B = \frac{4}{3}\sqrt{3}$, $PC = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$, 根据勾股定理求得 $CF' = \frac{8}{3}$, 所以 $OF' = 8 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$.



解: (1) 如图 2, 证明: 过点 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$,

$\therefore OM = 2$, $AM = 2\sqrt{3}$

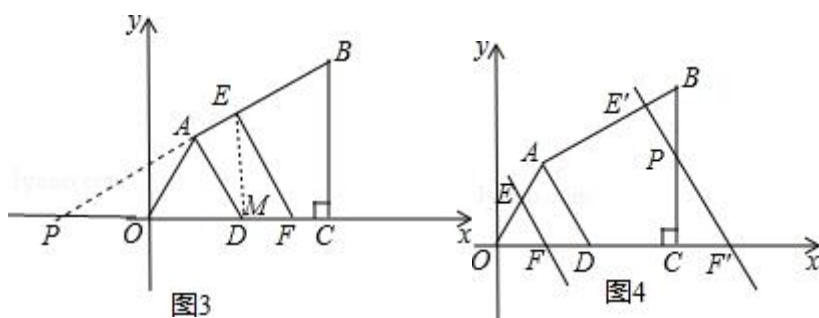
$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOM$ 中, $\tan \angle AOM = \frac{AM}{OM} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\therefore \angle AOM = 60^\circ$

由勾股定理得, $OA = \sqrt{OM^2 + AM^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$\therefore OD=4$,
 $\therefore OA=OD$,
 $\therefore \triangle AOD$ 是等边三角形.

(2) 如图 2, 解: 过点 A 作 $AN \perp BC$ 于点 N,
 $\therefore BC \perp OC$, $AM \perp x$ 轴,
 $\therefore \angle BCM = \angle CMA = \angle ANC = 90^\circ$
 $\therefore$ 四边形 ANCM 为矩形,
 $\therefore AN=MC$, $AM=NC$,
 $\therefore \angle B=60^\circ$, $AB=4\sqrt{3}$,
 $\therefore$ 在 $Rt\triangle ABN$ 中, $AN=AB \cdot \sin B = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$, $BN=AB \cdot \cos B = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$
 $\therefore AN=MC=6$, $CN=AM=2\sqrt{3}$,
 $\therefore OC=OM+MC=2+6=8$,
 $BC=BN+CN=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$,
 $\therefore$ 点 B 的坐标为 $(8, 4\sqrt{3})$.



(3) ①如图 3, $m=\frac{1}{2}t+2$;
 ②如图 4, $(2, 0)$, $(\frac{32}{3}, 0)$.

点评: 本题考查了等边三角形的性质, 矩形的性质, 直角三角函数的应用以及勾股定理的应用.

七、本题 12 分

24. (12 分) (2014•沈阳) 如图 1, 在菱形 ABCD 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O, AB=13, BD=24, 在菱形 ABCD 的外部以 AB 为边作等边三角形 ABE. 点 F 是对角线 BD 上一动点 (点 F 不与点 B 重合), 将线段 AF 绕点 A 顺时针方向旋转 60° 得到线段 AM, 连接 FM.

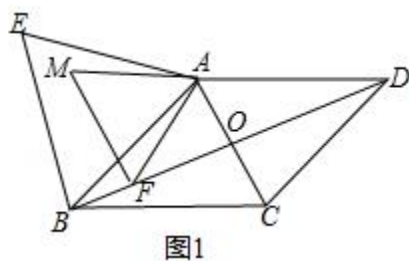


图1

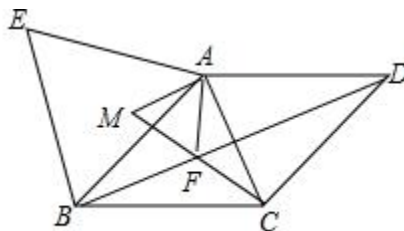


图2

- (1) 求 AO 的长;
- (2) 如图 2, 当点 F 在线段 BO 上, 且点 M, F, C 三点在同一条直线上时, 求证: $AC = \sqrt{3}AM$;
- (3) 连接 EM, 若 $\triangle AEM$ 的面积为 40, 请直接写出 $\triangle AFM$ 的周长.

考点: 四边形综合题.

分析: (1) 在 $\text{RT}\triangle OAB$ 中, 利用勾股定理 $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2}$ 求解,

(2) 由四边形 ABCD 是菱形, 求出 $\triangle AFM$ 为等边三角形, $\angle M = \angle AFM = 60^\circ$, 再求出 $\angle MAC = 90^\circ$, 在 $\text{RT}\triangle ACM$ 中 $\tan \angle M = \frac{AC}{AM}$, 求出 AC.

(3) 求出 $\triangle AEM \cong \triangle ABF$, 利用 $\triangle AEM$ 的面积为 40 求出 BF, 在利用勾股定理

$$AF = \sqrt{AO^2 + FO^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}, \text{ 得出 } \triangle AFM \text{ 的周长为 } 3\sqrt{41}.$$

解答: 解: (1) $\because$ 四边形 ABCD 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, OB = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\because BD = 24,$$

$$\therefore OB = 12,$$

在 $\text{RT}\triangle OAB$ 中,

$$\because AB = 13,$$

$$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

(2) 如图 2,

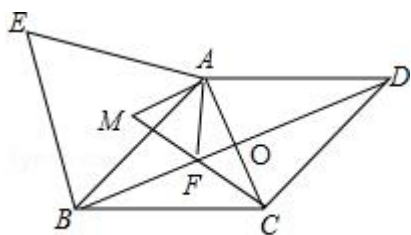


图2

∵ 四边形 ABCD 是菱形,

∴ BD 垂直平分 AC,

∴ FA=FC, $\angle FAC = \angle FCA$,

由已知 AF=AM, $\angle MAF = 60^\circ$,

∴ $\triangle AFM$ 为等边三角形,

∴ $\angle M = \angle AFM = 60^\circ$,

∵ 点 M, F, C 三点在同一条直线上,

∴ $\angle FAC + \angle FCA = \angle AFM = 60^\circ$,

∴ $\angle FAC = \angle FCA = 30^\circ$,

∴ $\angle MAC = \angle MAF + \angle FAC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$,

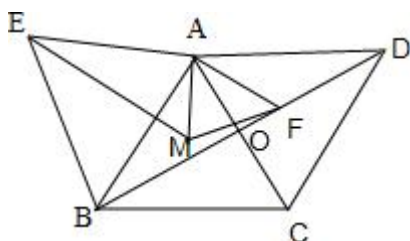
在 $\text{RT}\triangle ACM$ 中

$$\because \tan \angle M = \frac{AC}{AM},$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{AC}{AM},$$

$$\therefore AC = \sqrt{3}AM.$$

(3) 如图, 连接 EM,



∵ $\triangle ABE$ 是等边三角形,

∴ $AE = AB$, $\angle EAB = 60^\circ$,

由 (1) 知 $\triangle AFM$ 为等边三角形,

∴ $AM = AF$, $\angle MAF = 60^\circ$,

∴ $\angle EAM = \angle BAF$,

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle ABF$ 中,

$$\begin{cases} AE=AB \\ \angle EAM=\angle BAF, \\ AM=AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEM \cong \triangle ABF$ (SAS),

$\therefore \triangle AEM$ 的面积为40, $\triangle ABF$ 的高为AO

$$\therefore \frac{1}{2}BF \cdot AO = 40, \quad BF = 16,$$

$$\therefore FO = BF - BO = 16 - 12 = 4$$

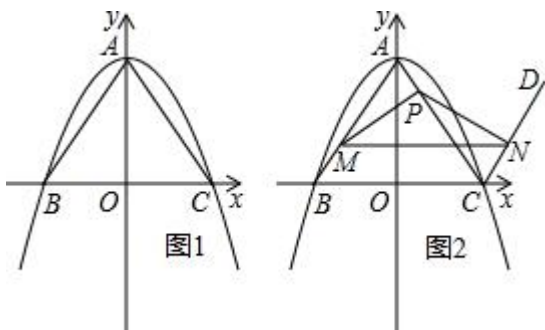
$$AF = \sqrt{AO^2 + FO^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41},$$

$$\therefore \triangle AFM \text{的周长为 } 3\sqrt{41}.$$

点评: 本题主要考查四边形的综合题, 解题的关键是灵活运用等过三角形的性质及菱形的性质.

八、本题 14 分

25. (14 分) (2014·沈阳) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y = -\frac{4}{27}x^2 + 12$ 的图象与 y 轴交于点 A, 与 x 轴交于 B, C 两点 (点 B 在点 C 的左侧), 连接 AB, AC.



(1) 点 B 的坐标为 $(-9, 0)$, 点 C 的坐标为 $(9, 0)$;

(2) 过点 C 作射线 $CD \parallel AB$, 点 M 是线段 AB 上的动点, 点 P 是线段 AC 上的动点, 且始终满足 $BM = AP$ (点 M 不与点 A, 点 B 重合), 过点 M 作 $MN \parallel BC$ 分别交 AC 于点 Q, 交射线 CD 于点 N (点 Q 不与点 P 重合), 连接 PM, PN, 设线段 AP 的长为 n.

①如图 2, 当 $n < \frac{1}{2}AC$ 时, 求证: $\triangle PAM \cong \triangle NCP$;

②直接用含 n 的代数式表示线段 PQ 的长;

③若 PM 的长为 $\sqrt{97}$, 当二次函数 $y = -\frac{4}{27}x^2 + 12$ 的图象经过平移同时过点 P 和点 N 时, 请直接写出此时的二次函数表达式.

考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 由二次函数 $y = -\frac{4}{27}x^2 + 12$ 的图象与 y 轴交于点 A, 与 x 轴交于 B, C 两点, 代入 $y=0$, 即可解出 B, C 坐标.

(2) ①求证三角形全等. 易发现由平行可得对应角相等, 由平行四边形对边相等及已知 $BM=AP$, 可得对应角的两个邻边对应相等, 则利用 SAS 得证.

②上问中以提示 $n < \frac{1}{2}AC$, 则我们可以分 $n < \frac{1}{2}AC$, $n = \frac{1}{2}AC$, $n > \frac{1}{2}AC$ 三种情形讨论. 又已得 $\triangle PAM \cong \triangle NCP$, 顺推易得 PQ 与 n 的关系.

③上问中已得当 $n < \frac{1}{2}AC$ 时, $PQ = 15 - 2n$; 当 $n > \frac{1}{2}AC$ 时, $PQ = 2n - 15$, 则也要分两种情形讨论, 易得两种情形的 P, N. 由图象为二次函数 $y = -\frac{4}{27}x^2 + 12$ 平移后的图形, 所以可设解析式为 $y = -\frac{4}{27}(x+k)^2 + 12 + h$, 代入即得.

解答: (1) 答: $(-9, 0)$, $(9, 0)$.

解: B、C 为抛物线与 x 轴的交点, 故代入 $y=0$, 得 $y = -\frac{4}{27}x^2 + 12 = 0$,

解得 $x = -9$ 或 $x = 9$,

即 B $(-9, 0)$, C $(9, 0)$.

(2) ①证明: $\because AB \parallel CN$,

$\therefore \angle MAP = \angle PCN$,

$\because MN \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 MBCN 为平行四边形,

$\therefore BM = CN$,

$\because AP = BM$,

$\therefore AP = CN$,

$\because BO = OC$, $OA \perp BC$,

$\therefore OA$ 垂直平分 BC ,

$\therefore AB = AC$,

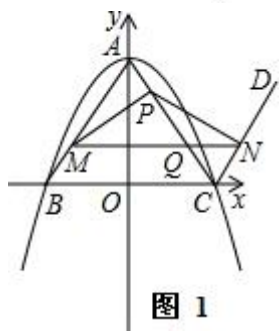
$\therefore AM = AB - BM = AC - AP = CP$.

在 $\triangle MAP$ 和 $\triangle PCN$ 中,

$$\begin{cases} AP=CN \\ \angle MAP=\angle PCN, \\ AM=CP \end{cases}$$

$\therefore \triangle MAP \cong \triangle PCN$ (AAS).

②解: 1. 当 $n < \frac{1}{2}AC$ 时, 如图 1,



$\therefore$ 四边形 MBCN 为平行四边形,

$\therefore \angle MBC = \angle QNC$,

$\therefore AB=AC$, $MN \parallel BC$,

$\therefore \angle MBC = \angle QCB = \angle NQC$,

$\therefore \angle NQC = \angle QNC$,

$\therefore CN=CQ$,

$\therefore \triangle MAP \cong \triangle PCN$,

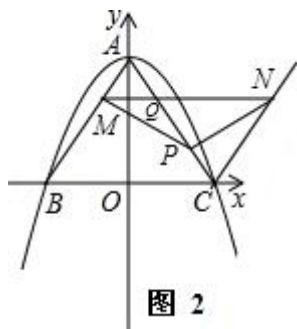
$\therefore AP=CN=CQ$,

$\therefore AP=n$, $AC=\sqrt{AO^2+OC^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15$,

$\therefore PQ=AC-AP-QC=15-2n$.

2. 当 $n=\frac{1}{2}AC$ 时, 显然 P、Q 重合, $PQ=0$.

3. 当 $n > \frac{1}{2}AC$ 时, 如图 2,



∵ 四边形 MBCN 为平行四边形,

∴ $\angle MBC = \angle QNC$, $BM = CN$

∵ $AB = AC$, $MN \parallel BC$,

∴ $\angle MBC = \angle QCB = \angle NQC$,

∴ $\angle NQC = \angle QNC$,

∴ $BM = CN = CQ$,

∴ $AP = BM$,

∴ $AP = CQ$,

∴ $AP = n$, $AC = 15$,

∴ $PQ = AP + QC - AC = 2n - 15$.

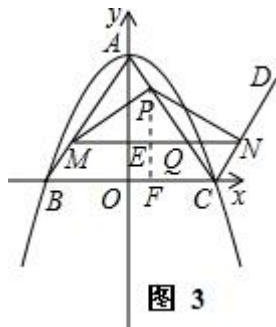
综上所述, 当 $n \leq \frac{1}{2}AC$ 时, $PQ = 15 - 2n$; 当 $n > \frac{1}{2}AC$ 时, $PQ = 2n - 15$.

$$\textcircled{3} y = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{16}{9}x + 4 \text{ 或 } y = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{32}{9}x - 12.$$

分析如下:

1. 当 $n \leq \frac{1}{2}AC$ 时, 如图 3, 过点 P 作 x 轴的垂线, 交 MN 于 E, 交 BC 于 F.

此时 $\triangle PEQ \sim \triangle PFC \sim \triangle AOC$, $PQ = 15 - 2n$.



∴ $PM = PN$,

∴ $ME = EN = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}BC = 9$,

∴ $PE = \sqrt{PM^2 - ME^2} = \sqrt{97 - 81} = 4$,

∴ $OC : OA : AC = 3 : 4 : 5$, $\triangle PEQ \sim \triangle PFC \sim \triangle AOC$,

∴ $PQ = 5$,

∴ $15 - 2n = 5$,

∴ $AP = n = 5$,

$$\therefore PC=10,$$

$$\therefore FC=6, PF=8,$$

$$\therefore OF=OC-FC=9-6=3, EN=9, EF=PF-PE=8-4=4,$$

$$\therefore P(3, 8), N(12, 4).$$

设二次函数 $y=-\frac{4}{27}x^2+12$ 平移后的解析式为 $y=-\frac{4}{27}(x+k)^2+12+h$,

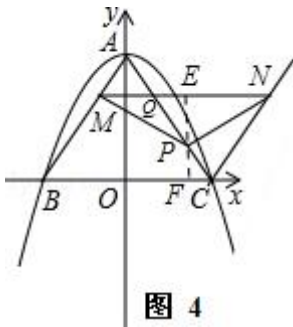
$$\therefore \begin{cases} 8=-\frac{4}{27}(3+k)^2+12+h \\ 4=-\frac{4}{27}(12+k)^2+12+h \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=6 \\ h=8 \end{cases},$$

$$\therefore y=-\frac{4}{27}(x+6)^2+12+8=-\frac{4}{27}x^2+\frac{16}{9}x+4.$$

2. 当 $n>\frac{1}{2}AC$ 时, 如图 4, 过点 P 作 x 轴的垂线, 交 MN 于 E, 交 BC 于 F.

此时 $\triangle PEQ \sim \triangle PFC \sim \triangle AOC$, $PQ=2n-15$.



$$\therefore PM=PN,$$

$$\therefore ME=EN=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}BC=9,$$

$$\therefore PE=\sqrt{PM^2-ME^2}=\sqrt{97-81}=4,$$

$$\therefore OC:OA:AC=3:4:5, \triangle PEQ \sim \triangle PFC \sim \triangle AOC,$$

$$\therefore PQ=5,$$

$$\therefore 2n-15=5,$$

$$\therefore AP=n=10,$$

$$\therefore PC=5,$$

$$\therefore FC=3, PF=4,$$

$$\therefore OF=OC-FC=9-3=6, EN=9, EF=PF+PE=4+4=8,$$

∴ P (6, 4), N (15, 8).

设二次函数 $y = -\frac{4}{27}x^2 + 12$ 平移后的解析式为 $y = -\frac{4}{27}(x+k)^2 + 12+h$,

$$\therefore \begin{cases} 4 = -\frac{4}{27}(6+k)^2 + 12+h \\ 8 = -\frac{4}{27}(15+k)^2 + 12+h \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k = -12 \\ h = -\frac{8}{3} \end{cases},$

$$\therefore y = -\frac{4}{27}(x-12)^2 + 12 - \frac{8}{3} = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{32}{9}x - 12.$$

点评: 本题考查了二次函数的图象与性质, 三角形全等、相似的证明与性质, 函数平移及待定系数法求过定点函数解析式等知识. 回答题目是一定注意多问综合题目问题之间的相关性, 顺着题目思路递推易得思路. 本题计算量稍大, 难度适中, 适合学生训练.