

河南省 2019 年中考数学试卷

一、选择题 (每小题 3 分, 共 30 分) 下列各小题均有四个答案, 其中只有一个是正确的。

1. (3 分) $-\frac{1}{2}$ 的绝对值是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

【分析】根据一个负数的绝对值是它的相反数进行解答即可。

【解答】解: $|- \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$,

故选: B.

【点评】本题考查的是绝对值的性质, 掌握一个正数的绝对值是它本身; 一个负数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0 是解题的关键。

2. (3 分) 成人每天维生素 D 的摄入量约为 0.0000046 克. 数据 “0.0000046” 用科学记数法表示为 ()

- A. 46×10^{-7} B. 4.6×10^{-7} C. 4.6×10^{-6} D. 0.46×10^{-5}

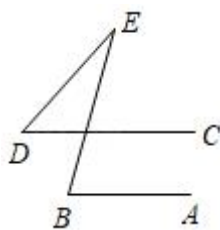
【分析】本题用科学记数法的知识即可解答。

【解答】解: $0.0000046 = 4.6 \times 10^{-6}$.

故选: C.

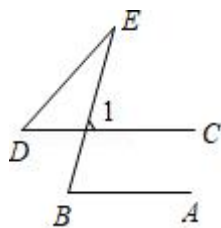
【点评】本题用科学记数法的知识点, 关键是很小的数用科学记数法表示时负指数与 0 的个数的关系要掌握好。

3. (3 分) 如图, $AB \parallel CD$, $\angle B = 75^\circ$, $\angle E = 27^\circ$, 则 $\angle D$ 的度数为 ()



- A. 45° B. 48° C. 50° D. 58°

【分析】根据平行线的性质解答即可。



【解答】解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle B = \angle 1,$$

$$\because \angle 1 = \angle D + \angle E,$$

$$\therefore \angle D = \angle B - \angle E = 75^\circ - 27^\circ = 48^\circ,$$

故选: B.

【点评】此题考查平行线的性质, 关键是根据平行线的性质解答.

4. (3分) 下列计算正确的是 ()

A. $2a+3a=6a$

B. $(-3a)^2=6a^2$

C. $(x-y)^2=x^2-y^2$

D. $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

【分析】根据合并同类项法则, 完全平方公式, 幂的乘方与积的乘方的运算法则进行运算即可;

【解答】解: $2a+3a=5a$, A 错误;

$$(-3a)^2=9a^2, B \text{ 错误};$$

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2, C \text{ 错误};$$

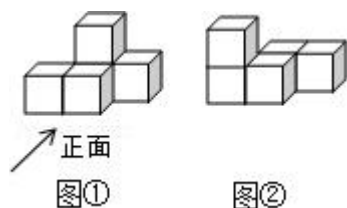
$$3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}, D \text{ 正确};$$

故选: D.

【点评】本题考查整式的运算; 熟练掌握合并同类项法则, 完全平方公式, 幂的乘方与积的乘方的运算法则是解题的关键.

5. (3分) 如图①是由大小相同的小正方体搭成的几何体, 将上层的小正方体平移后得到图

②. 关于平移前后几何体的三视图, 下列说法正确的是 ()



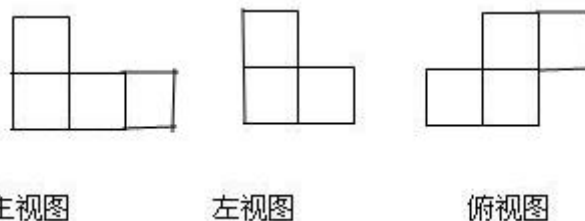
A. 主视图相同

B. 左视图相同

C. 俯视图相同

D. 三种视图都不相同

【分析】根据三视图解答即可.

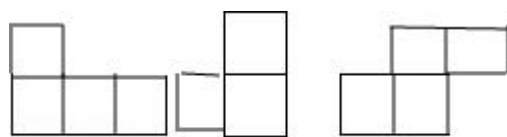


【解答】解: 图①的三视图为:

主视图

左视图

俯视图



图②的三视图为：

主视图

左视图

俯视图

故选：A.

【点评】本题考查了由三视图判断几何体，解题的关键是学生的观察能力和对几何体三种视图的空间想象能力.

6. (3分) 一元二次方程 $(x+1)(x-1) = 2x+3$ 的根的情况是 ()

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

【分析】先化成一般式后，在求根的判别式.

【解答】解：原方程可化为： $x^2 - 2x - 4 = 0$,

$$\therefore a = 1, b = -2, c = -4,$$

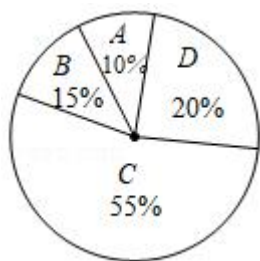
$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 20 > 0,$$

$\therefore$ 方程由两个不相等的实数根.

故选：A.

【点评】本题运用了根的判别式的知识点，把方程转化为一般式是解决问题的关键.

7. (3分) 某超市销售 A, B, C, D 四种矿泉水，它们的单价依次是 5 元、3 元、2 元、1 元. 某天的销售情况如图所示，则这天销售的矿泉水的平均单价是 ()



A. 1.95 元

B. 2.15 元

C. 2.25 元

D. 2.75 元

【分析】根据加权平均数的定义列式计算可得.

【解答】解：这天销售的矿泉水的平均单价是 $5 \times 10\% + 3 \times 15\% + 2 \times 55\% + 1 \times 20\% = 2.25$ (元),

故选：C.

【点评】本题主要考查加权平均数，解题的关键是掌握加权平均数的定义.

8. (3分) 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + 4$ 经过 $(-2, n)$ 和 $(4, n)$ 两点，则 n 的值为 ()

A. -2

B. -4

C. 2

D. 4

【分析】根据 $(-2, n)$ 和 $(4, n)$ 可以确定函数的对称轴 $x=1$ ，再由对称轴的 $x=\frac{b}{2}$ 即可求解；

【解答】解：抛物线 $y=-x^2+bx+4$ 经过 $(-2, n)$ 和 $(4, n)$ 两点，
可知函数的对称轴 $x=1$ ，

$$\therefore \frac{b}{2}=1,$$

$$\therefore b=2;$$

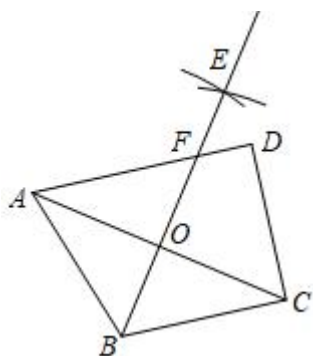
$$\therefore y=-x^2+2x+4,$$

将点 $(-2, n)$ 代入函数解析式，可得 $n=-4$ ；

故选：B.

【点评】本题考查二次函数图象上点的坐标；熟练掌握二次函数图象上点的对称性是解题的关键.

9. (3分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle D=90^\circ$ ， $AD=4$ ， $BC=3$. 分别以点 A ， C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 长为半径作弧，两弧交于点 E ，作射线 BE 交 AD 于点 F ，交 AC 于点 O . 若点 O 是 AC 的中点，则 CD 的长为 ()

A. $2\sqrt{2}$

B. 4

C. 3

D. $\sqrt{10}$

【分析】连接 FC ，根据基本作图，可得 OE 垂直平分 AC ，由垂直平分线的性质得出 $AF=FC$. 再根据 ASA 证明 $\triangle FOA \cong \triangle BOC$ ，那么 $AF=BC=3$ ，等量代换得到 $FC=AF=3$ ，利用线段的和差关系求出 $FD=AD-AF=1$. 然后在直角 $\triangle FDC$ 中利用勾股定理求出 CD 的长.

【解答】解：如图，连接 FC ，则 $AF=FC$.

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle FAO = \angle BCO.$$

在 $\triangle FOA$ 与 $\triangle BOC$ 中,

$$\begin{cases} \angle FAO = \angle BCO \\ OA = OC \\ \angle AOF = \angle COB \end{cases},$$

$\therefore \triangle FOA \cong \triangle BOC$ (ASA),

$\therefore AF = BC = 3$,

$\therefore FC = AF = 3$, $FD = AD - AF = 4 - 3 = 1$.

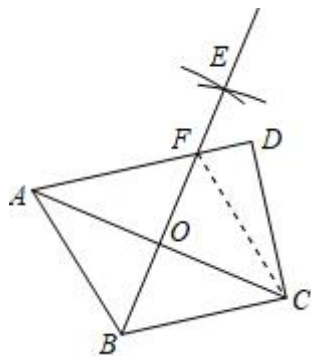
在 $\triangle FDC$ 中, $\because \angle D = 90^\circ$,

$$\therefore CD^2 + DF^2 = FC^2,$$

$$\therefore CD^2 + 1^2 = 3^2,$$

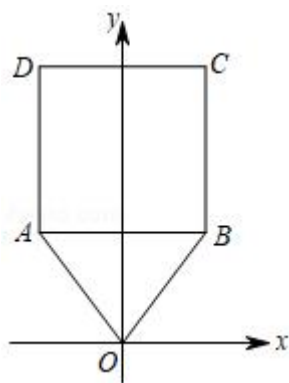
$$\therefore CD = 2\sqrt{2}.$$

故选: A.



【点评】本题考查了作图 - 基本作图, 勾股定理, 线段垂直平分线的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 难度适中. 求出 CF 与 DF 是解题的关键.

10. (3分) 如图, 在 $\triangle OAB$ 中, 顶点 $O(0, 0)$, $A(-3, 4)$, $B(3, 4)$, 将 $\triangle OAB$ 与正方形 $ABCD$ 组成的图形绕点 O 顺时针旋转, 每次旋转 90° , 则第 70 次旋转结束时, 点 D 的坐标为 ()



- A. (10, 3) B. (-3, 10) C. (10, -3) D. (3, -10)

【分析】先求出 $AB=6$ ，再利用正方形的性质确定 $D(-3, 10)$ ，由于 $70=4\times 17+2$ ，所以第 70 次旋转结束时，相当于 $\triangle OAB$ 与正方形 $ABCD$ 组成的图形绕点 O 顺时针旋转 2 次，每次旋转 90° ，此时旋转前后的点 D 关于原点对称，于是利用关于原点对称的点的坐标特征可出旋转后的点 D 的坐标.

【解答】解： $\because A(-3, 4), B(3, 4)$,

$$\therefore AB=3+3=6,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$$\therefore AD=AB=6,$$

$$\therefore D(-3, 10),$$

$$\because 70=4\times 17+2,$$

$\therefore$ 每 4 次一个循环，第 70 次旋转结束时，相当于 $\triangle OAB$ 与正方形 $ABCD$ 组成的图形绕点 O 顺时针旋转 2 次，每次旋转 90° ,

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (3, -10).$$

故选：D.

【点评】本题考查了坐标与图形变化—旋转：图形或点旋转之后要结合旋转的角度和图形的特殊性质来求出旋转后的点的坐标. 常见的是旋转特殊角度如： 30° ， 45° ， 60° ， 90° ， 180° .

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分.）

11. (3 分) 计算： $\sqrt{4}-2^{-1}=\underline{1\frac{1}{2}}$.

【分析】本题涉及二次根式化简、负整数指数幂两个考点. 针对每个考点分别进行计算，然后根据实数的运算法则求得计算结果.

【解答】解： $\sqrt{4}-2^{-1}$

$$=2-\frac{1}{2}$$

$$=1\frac{1}{2}.$$

故答案为： $1\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查实数的综合运算能力，是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟练掌握负整数指数幂、二次根式等考点的运算.

12. (3分) 不等式组 $\begin{cases} \frac{x}{2} \leq -1 \\ -x+7 > 4 \end{cases}$ 的解集是 $x \leq -2$.

【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】解：解不等式 $\frac{x}{2} \leq -1$ ，得： $x \leq -2$ ，

解不等式 $-x+7 > 4$ ，得： $x < 3$ ，

则不等式组的解集为 $x \leq -2$ ，

故答案为： $x \leq -2$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

13. (3分) 现有两个不透明的袋子，一个装有 2 个红球、1 个白球，另一个装有 1 个黄球、2 个红球，这些球除颜色外完全相同. 从两个袋子中各随机摸出 1 个球，摸出的两个球颜色相同的概率是 $\frac{4}{9}$.

【分析】列表得出所有等可能结果，从中找到两个球颜色相同的结果数，利用概率公式计算可得.

【解答】解：列表如下：

	黄	红	红
红	(黄，红)	(红，红)	(红，红)
红	(黄，红)	(红，红)	(红，红)
白	(黄，白)	(红，白)	(红，白)

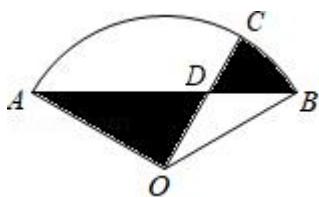
由表知，共有 9 种等可能结果，其中摸出的两个球颜色相同的有 4 种结果，

所以摸出的两个球颜色相同的概率为 $\frac{4}{9}$ ，

故答案为： $\frac{4}{9}$.

【点评】本题考查了列表法与树状图的知识，解题的关键是能够用列表或列树状图将所有等可能的结果列举出来，难度不大.

14. (3分) 如图，在扇形 AOB 中， $\angle AOB = 120^\circ$ ，半径 OC 交弦 AB 于点 D ，且 $OC \perp OA$. 若 $OA = 2\sqrt{3}$ ，则阴影部分的面积为 $\sqrt{3} + \pi$.



【分析】根据题意，作出合适的辅助线，然后根据图形可知阴影部分的面积是 $\triangle AOD$ 的面积与扇形 OBC 的面积之和再减去 $\triangle BDO$ 的面积，本题得以解决.

【解答】解：作 $OE \perp AB$ 于点 F ,

$\therefore$ 在扇形 AOB 中， $\angle AOB = 120^\circ$ ，半径 OC 交弦 AB 于点 D ，且 $OC \perp OA$. $OA = 2\sqrt{3}$,

$\therefore \angle AOD = 90^\circ$ ， $\angle BOC = 90^\circ$ ， $OA = OB$,

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$ ，

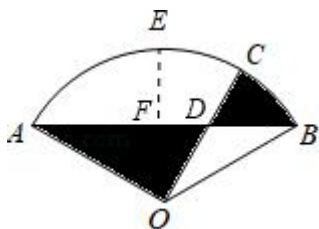
$\therefore OD = OA \cdot \tan 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$ ， $AD = 4$ ， $AB = 2AF = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ ， $OF = \sqrt{3}$,

$\therefore BD = 2$,

$\therefore$ 阴影部分的面积是： $S_{\triangle AOD} + S_{\text{扇形} OBC} - S_{\triangle BDO} = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{2} + \frac{30 \times \pi (2\sqrt{3})^2}{360} - \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} =$

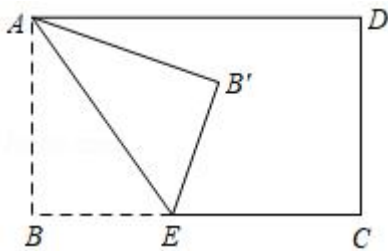
$\sqrt{3} + \pi$ ，

故答案为： $\sqrt{3} + \pi$.



【点评】本题考查扇形面积的计算，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

15. (3分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 1$ ， $BC = a$ ，点 E 在边 BC 上，且 $BE = \frac{3}{5}a$. 连接 AE ，将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠，若点 B 的对应点 B' 落在矩形 $ABCD$ 的边上，则 a 的值为 $\frac{5}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.



【分析】分两种情况：①点 B' 落在 AD 边上，根据矩形与折叠的性质易得 $AB = BE$ ，即可求出 a 的值；②点 B' 落在 CD 边上，证明 $\triangle ADB' \sim \triangle B'CE$ ，根据相似三角形对应边成比例即可求出 a 的值.

【解答】解：分两种情况：

①当点 B' 落在 AD 边上时，如图 1.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle BAD = \angle B = 90^\circ,$$

$\because$ 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠，点 B 的对应点 B' 落在 AD 边上，

$$\therefore \angle BAE = \angle B'AE = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = BE,$$

$$\therefore \frac{3}{5}a = 1,$$

$$\therefore a = \frac{5}{3};$$

②当点 B' 落在 CD 边上时，如图 2.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle BAD = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ, \quad AD = BC = a.$$

$\because$ 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠，点 B 的对应点 B' 落在 CD 边上，

$$\therefore \angle B = \angle AB'E = 90^\circ, \quad AB = AB' = 1, \quad EB = EB' = \frac{3}{5}a,$$

$$\therefore DB' = \sqrt{B'A^2 - AD^2} = \sqrt{1 - a^2}, \quad EC = BC - BE = a - \frac{3}{5}a = \frac{2}{5}a.$$

在 $\triangle ADB'$ 与 $\triangle B'CE$ 中，

$$\begin{cases} \angle B'AD = \angle EB'C = 90^\circ - \angle AB'E \\ \angle D = \angle C = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADB' \sim \triangle B'CE,$$

$$\therefore \frac{DB'}{CE} = \frac{AB'}{B'E}, \quad \text{即} \quad \frac{\sqrt{1-a^2}}{\frac{2}{5}a} = \frac{1}{\frac{3}{5}a},$$

解得 $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $a_2 = 0$ (舍去).

综上, 所求 a 的值为 $\frac{5}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

故答案为 $\frac{5}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

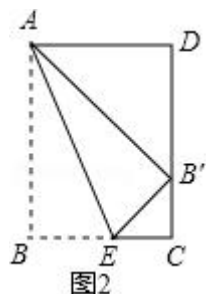


图2

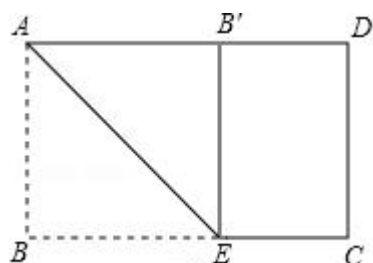


图1

【点评】本题考查了折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。也考查了矩形的性质，勾股定理，相似三角形的判定与性质。进行分类讨论与数形结合是解题的关键。

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 满分 75 分)

16. (8 分) 先化简, 再求值: $(\frac{x+1}{x-2} - 1) \div \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$, 其中 $x = \sqrt{3}$.

【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式, 再将 x 的值代入计算可得.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= (\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-2}{x-2}) \div \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{3}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x} \\ &= \frac{3}{x}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = \sqrt{3} \text{ 时, 原式} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

【点评】本题主要考查分式的化简求值, 解题的关键是熟练掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

17. (9 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BA = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 以 AB 为直径的半圆 O 交 AC 于

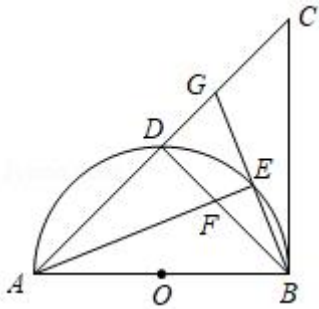
点 D , 点 E 是 $\widehat{BD}$ 上不与点 B, D 重合的任意一点, 连接 AE 交 BD 于点 F , 连接 BE 并延长交 AC 于点 G .

(1) 求证: $\triangle ADF \cong \triangle BDG$;

(2) 填空:

①若 $AB=4$, 且点 E 是 $\widehat{BD}$ 的中点, 则 DF 的长为 $4-2\sqrt{2}$;

②取 $\widehat{AE}$ 的中点 H , 当 $\angle EAB$ 的度数为 30° 时, 四边形 $OBEH$ 为菱形.



【分析】(1) 利用直径所对的圆周角是直角, 可得 $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$, 再应用同角的余角相等可得 $\angle DAF = \angle DBG$, 易得 $AD = BD$, $\triangle ADF \cong \triangle BDG$ 得证;

(2) 作 $FH \perp AB$, 应用等弧所对的圆周角相等得 $\angle BAE = \angle DAE$, 再应用角平分线性质可得结论; 由菱形的性质可得 $BE = OB$, 结合三角函数特殊值可得 $\angle EAB = 30^\circ$.

【解答】解: (1) 证明: 如图 1, $\because BA = BC, \angle ABC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 45^\circ$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle BGD = \angle DBG + \angle BGD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DAF = \angle DBG$$

$$\because \angle ABD + \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BAC = 45^\circ$$

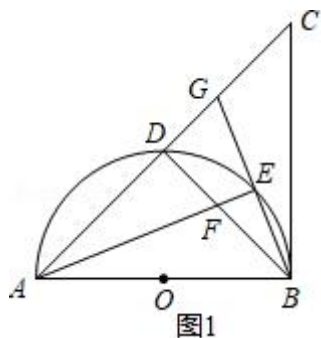
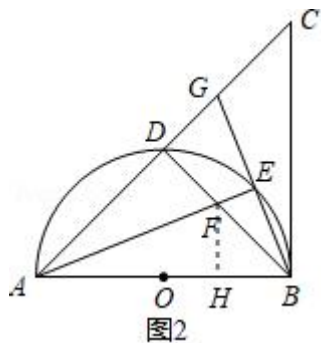
$$\therefore AD = BD$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BDG \text{ (ASA)};$$

(2) ①如图 2, 过 F 作 $FH \perp AB$ 于 H , $\because$ 点 E 是 $\widehat{BD}$ 的中点,

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE$$

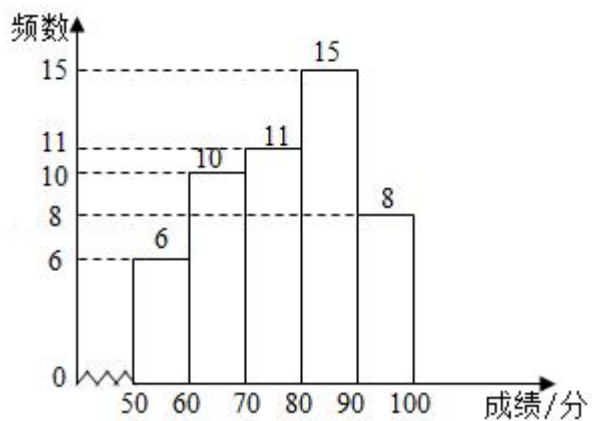
$$\because FD \perp AD, FH \perp AB$$



【点评】本题主要考查了圆的性质，垂径定理，等腰直角三角形的性质，菱形的性质，解直角三角形，特殊角的三角函数值等，关键在灵活应用性质定理.

18. (9分) 某校为了解七、八年级学生对“防溺水”安全知识的掌握情况，从七、八年级各随机抽取 50 名学生进行测试，并对成绩（百分制）进行整理、描述和分析. 部分信息如下：

a. 七年级成绩频数分布直方图：



b. 七年级成绩在 $70 \leq x < 80$ 这一组的是：

70 72 74 75 76 76 77 77 77 78 79

c. 七、八年级成绩的平均数、中位数如下：

年级	平均数	中位数
----	-----	-----

七	76.9	m
八	79.2	79.5

根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 在这次测试中，七年级在 80 分以上（含 80 分）的有 23 人；
- (2) 表中 m 的值为 77.5；
- (3) 在这次测试中，七年级学生甲与八年级学生乙的成绩都是 78 分，请判断两位学生在各自年级的排名谁更靠前，并说明理由；
- (4) 该校七年级学生有 400 人，假设全部参加此次测试，请估计七年级成绩超过平均数 76.9 分的人数.

【分析】(1) 根据条形图及成绩在 $70 \leq x < 80$ 这一组的数据可得；

(2) 根据中位数的定义求解可得；

(3) 将各自成绩与该年级的中位数比较可得答案；

(4) 用总人数乘以样本中七年级成绩超过平均数 76.9 分的人数所占比例可得.

【解答】解：(1) 在这次测试中，七年级在 80 分以上（含 80 分）的有 $15+8=23$ 人，故答案为：23；

(2) 七年级 50 人成绩的中位数是第 25、26 个数据的平均数，而第 25、26 个数据分别为 78、79，

$$\therefore m = \frac{77+78}{2} = 77.5,$$

故答案为：77.5；

(3) 甲学生在该年级的排名更靠前，

$\therefore$ 七年级学生甲的成绩大于中位数 78 分，其名次在该班 25 名之前，

八年级学生乙的成绩小于中位数 78 分，其名次在该班 25 名之后，

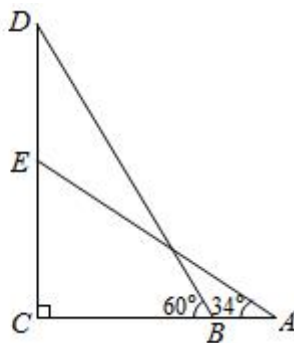
$\therefore$ 甲学生在该年级的排名更靠前.

(4) 估计七年级成绩超过平均数 76.9 分的人数为 $400 \times \frac{5+15+8}{50} = 224$ (人).

【点评】本题主要考查频数分布直方图、中位数及样本估计总体，解题的关键是根据直方图得出解题所需数据及中位数的定义和意义、样本估计总体思想的运用.

19. (9 分) 数学兴趣小组到黄河风景名胜区测量炎帝塑像（塑像中高者）的高度. 如图所示，炎帝塑像 DE 在高 $55m$ 的小山 EC 上，在 A 处测得塑像底部 E 的仰角为 34° ，再沿 AC 方向前进 $21m$ 到达 B 处，测得塑像顶部 D 的仰角为 60° ，求炎帝塑像 DE 的高度.

(精确到 1m. 参考数据: $\sin 34^\circ \approx 0.56$, $\cos 34^\circ = 0.83$, $\tan 34^\circ \approx 0.67$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



【分析】由三角函数求出 $AC = \frac{CE}{\tan 34^\circ} \approx 82.1m$, 得出 $BC = AC - AB = 61.1m$, 在 $Rt\triangle BCD$

中, 由三角函数得出 $CD = \sqrt{3}BC \approx 105.7m$, 即可得出答案.

【解答】解: $\because \angle ACE = 90^\circ$, $\angle CAE = 34^\circ$, $CE = 55m$,

$$\therefore \tan \angle CAE = \frac{CE}{AC},$$

$$\therefore AC = \frac{CE}{\tan 34^\circ} = \frac{55}{0.67} \approx 82.1m,$$

$$\therefore AB = 21m,$$

$$\therefore BC = AC - AB = 61.1m,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BCD \text{ 中, } \tan 60^\circ = \frac{CD}{BC} = \sqrt{3},$$

$$\therefore CD = \sqrt{3}BC \approx 1.73 \times 61.1 \approx 105.7m,$$

$$\therefore DE = CD - EC = 105.7 - 55 \approx 51m,$$

答: 炎帝塑像 DE 的高度约为 51m.

【点评】本题考查了解直角三角形的应用, 解答本题的关键是根据仰角和俯角构造直角三角形, 利用三角函数的知识求解, 难度适中.

20. (9分) 学校计划为“我和我的祖国”演讲比赛购买奖品. 已知购买 3 个 A 奖品和 2 个 B 奖品共需 120 元; 购买 5 个 A 奖品和 4 个 B 奖品共需 210 元.

(1) 求 A, B 两种奖品的单价;

(2) 学校准备购买 A, B 两种奖品共 30 个, 且 A 奖品的数量不少于 B 奖品数量的 $\frac{1}{3}$. 请

设计出最省钱的购买方案, 并说明理由.

【分析】(1) 设 A 的单价为 x 元, B 的单价为 y 元, 根据题意列出方程组 $\begin{cases} 3x+2y=120 \\ 5x+4y=210 \end{cases}$,

即可求解;

(2) 设购买 A 奖品 z 个, 则购买 B 奖品为 $(30 - z)$ 个, 购买奖品的花费为 W 元, 根据

题意得到由题意可知, $z \geq \frac{1}{3}(30 - z)$, $W = 30z + 15(30 - z) = 450 + 15z$, 根据一次函数的性质, 即可求解;

【解答】解: (1) 设 A 的单价为 x 元, B 的单价为 y 元,

根据题意, 得

$$\begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ 5x + 4y = 210 \end{cases}, \therefore \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \end{cases},$$

$\therefore A$ 的单价 30 元, B 的单价 15 元;

(2) 设购买 A 奖品 z 个, 则购买 B 奖品为 $(30 - z)$ 个, 购买奖品花费为 W 元,

由题意可知, $z \geq \frac{1}{3}(30 - z)$,

$$\therefore z \geq \frac{15}{2},$$

$$W = 30z + 15(30 - z) = 450 + 15z,$$

当 $z = 8$ 时, W 有最小值为 570 元,

即购买 A 奖品 8 个, 购买 B 奖品 22 个, 花费最少;

【点评】本题考查二元一次方程组的应用, 一次函数的应用; 能够根据条件列出方程组, 将最优方案转化为一次函数性质解题是关键.

21. (10 分) 模具厂计划生产面积为 4, 周长为 m 的矩形模具. 对于 m 的取值范围, 小亮已经能用“代数”的方法解决, 现在他又尝试从“图形”的角度进行探究, 过程如下:

(1) 建立函数模型

设矩形相邻两边的长分别为 x , y , 由矩形的面积为 4, 得 $xy = 4$, 即 $y = \frac{4}{x}$; 由周长为 m ,

得 $2(x + y) = m$, 即 $y = -x + \frac{m}{2}$. 满足要求的 (x, y) 应是两个函数图象在第 一 象限内交点的坐标.

(2) 画出函数图象

函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象如图所示, 而函数 $y = -x + \frac{m}{2}$ 的图象可由直线 $y = -x$ 平移得到. 请在同一直角坐标系中直接画出直线 $y = -x$.

(3) 平移直线 $y = -x$, 观察函数图象

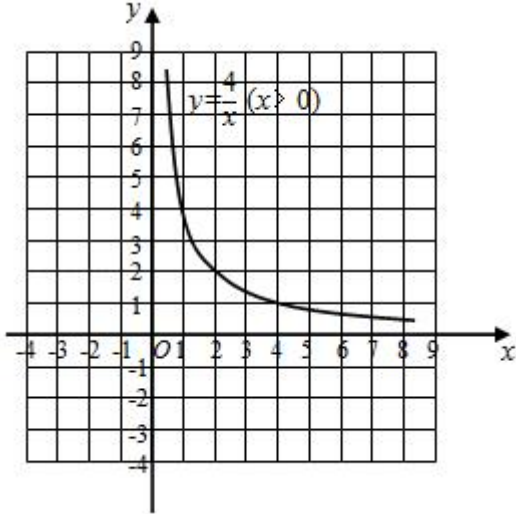
①当直线平移到与函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象有唯一交点 $(2, 2)$ 时, 周长 m 的值为 8;

②在直线平移过程中, 交点个数还有哪些情况? 请写出交点个数及对应的周长 m 的取值

范围.

(4) 得出结论

若能生产出面积为 4 的矩形模具，则周长 m 的取值范围为 $m \geq 8$.



【分析】(1) x, y 都是边长，因此，都是正数，即可求解；

(2) 直接画出图象即可；

(3) ①把点 $(2, 2)$ 代入 $y = -x + \frac{m}{2}$ 即可求解；②在直线平移过程中，交点个数有：0 个、1 个、2 个三种情况，联立 $y = \frac{4}{x}$ 和 $y = -x + \frac{m}{2}$ 并整理得： $x^2 - \frac{1}{2}mx + 4 = 0$ ，即可求解；

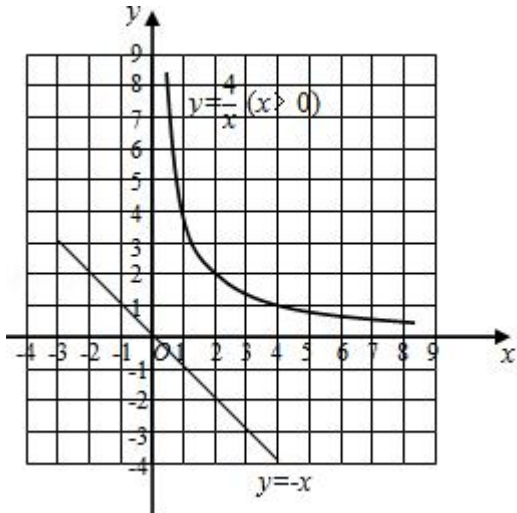
(4) 由 (3) 可得.

【解答】解：(1) x, y 都是边长，因此，都是正数，

故点 (x, y) 在第一象限，

答案为：一；

(2) 图象如下所示：



(3) ①把点 $(2, 2)$ 代入 $y = -x + \frac{m}{2}$ 得:

$$2 = -2 + \frac{m}{2}, \text{ 解得: } m = 8,$$

即: 0 个交点时, $m < 8$; 1 个交点时, $m = 8$; 2 个交点时, $m > 8$;

②在直线平移过程中, 交点个数有: 0 个、1 个、2 个三种情况,

$$\text{联立 } y = \frac{4}{x} \text{ 和 } y = -x + \frac{m}{2} \text{ 并整理得: } x^2 - \frac{1}{2}mx + 4 = 0,$$

$$\Delta = \frac{1}{4}m^2 - 4 \times 4 \geq 0 \text{ 时, 两个函数有交点,}$$

解得: $m \geq 8$;

(4) 由 (3) 得: $m \geq 8$.

【点评】本题为反比例函数综合运用题, 涉及到一次函数、一元二次方程、函数平移等知识点, 此类探究题, 通常按照题设条件逐次求解, 一般难度不大.

22. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $CA = CB$, $\angle ACB = \alpha$. 点 P 是平面内不与点 A, C 重合的任意一点. 连接 AP , 将线段 AP 绕点 P 逆时针旋转 α 得到线段 DP , 连接 AD, BD, CP .

(1) 观察猜想

如图 1, 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $\frac{BD}{CP}$ 的值是 1, 直线 BD 与直线 CP 相交所成的较小角的度数是 60° .

(2) 类比探究

如图 2, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 请写出 $\frac{BD}{CP}$ 的值及直线 BD 与直线 CP 相交所成的小角的度数, 并就图 2 的情形说明理由.

(3) 解决问题

当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 若点 E, F 分别是 CA, CB 的中点, 点 P 在直线 EF 上, 请直接写出点 C, P, D 在同一直线上时 $\frac{AD}{CP}$ 的值.

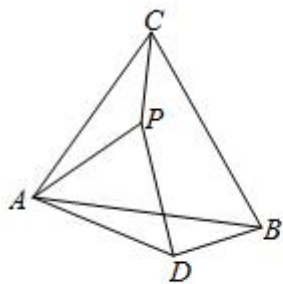


图1

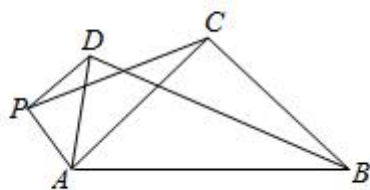
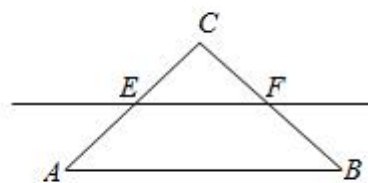


图2



备用图

【分析】(1) 如图 1 中, 延长 CP 交 BD 的延长线于 E , 设 AB 交 EC 于点 O . 证明 $\triangle CAP \cong \triangle BAD$ (SAS), 即可解决问题.

(2) 如图 2 中, 设 BD 交 AC 于点 O , BD 交 PC 于点 E . 证明 $\triangle DAB \sim \triangle PAC$, 即可解决问题.

(3) 分两种情形: ①如图 3-1 中, 当点 D 在线段 PC 上时, 延长 AD 交 BC 的延长线于 H . 证明 $AD = DC$ 即可解决问题.

②如图 3-2 中, 当点 P 在线段 CD 上时, 同法可证: $DA = DC$ 解决问题.

【解答】解: (1) 如图 1 中, 延长 CP 交 BD 的延长线于 E , 设 AB 交 EC 于点 O .

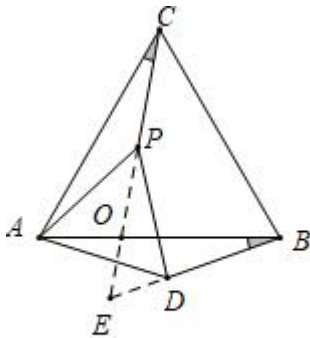


图1

$$\because \angle PAD = \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAP = \angle BAD,$$

$$\because CA = BA, PA = DA,$$

$$\therefore \triangle CAP \cong \triangle BAD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore PC = BD, \angle ACP = \angle ABD,$$

$$\because \angle AOC = \angle BOE,$$

$$\therefore \angle BEO = \angle CAO = 60^\circ,$$

$$\therefore \frac{BD}{PC} = 1, \text{ 线 } BD \text{ 与直线 } CP \text{ 相交所成的较小角的度数是 } 60^\circ,$$

故答案为 1, 60° .

(2) 如图 2 中, 设 BD 交 AC 于点 O , BD 交 PC 于点 E .

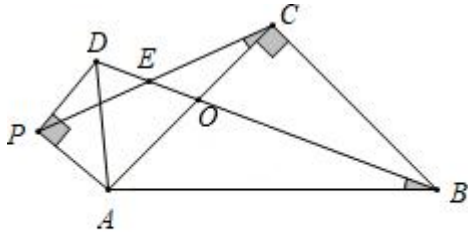


图2

$\because \angle PAD = \angle CAB = 45^\circ$,
 $\therefore \angle PAC = \angle DAB$,
 $\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AP} = \sqrt{2}$,
 $\therefore \triangle DAB \sim \triangle PAC$,
 $\therefore \angle PCA = \angle DBA$, $\frac{BD}{PC} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$,
 $\because \angle EOC = \angle AOB$,
 $\therefore \angle CEO = \angle OAB = 45^\circ$,
 $\therefore$ 直线 BD 与直线 CP 相交所成的小角的度数为 45° .

(3) 如图 3-1 中, 当点 D 在线段 PC 上时, 延长 AD 交 BC 的延长线于 H .

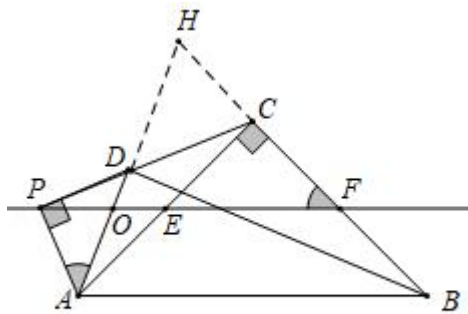


图3-1

$\because CE = EA, CF = FB$,
 $\therefore EF \parallel AB$,
 $\therefore \angle EFC = \angle ABC = 45^\circ$,
 $\because \angle PAO = 45^\circ$,
 $\therefore \angle PAO = \angle OFH$,
 $\because \angle POA = \angle FOH$,

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle H = \angle APO, \\
&\because \angle APC = 90^\circ, \quad EA = EC, \\
&\therefore PE = EA = EC, \\
&\therefore \angle EPA = \angle EAP = \angle BAH, \\
&\therefore \angle H = \angle BAH, \\
&\therefore BH = BA, \\
&\because \angle ADP = \angle BDC = 45^\circ, \\
&\therefore \angle ADB = 90^\circ, \\
&\therefore BD \perp AH, \\
&\therefore \angle DBA = \angle DBC = 22.5^\circ, \\
&\because \angle ADB = \angle ACB = 90^\circ, \\
&\therefore A, D, C, B \text{ 四点共圆}, \\
&\angle DAC = \angle DBC = 22.5^\circ, \quad \angle DCA = \angle ABD = 22.5^\circ, \\
&\therefore \angle DAC = \angle DCA = 22.5^\circ, \\
&\therefore DA = DC, \text{ 设 } AD = a, \text{ 则 } DC = AD = a, \quad PD = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \\
&\therefore \frac{AD}{CP} = \frac{a}{a + \frac{\sqrt{2}}{2}a} = 2 - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

如图 3-2 中, 当点 P 在线段 CD 上时, 同法可证: $DA = DC$, 设 $AD = a$, 则 $CD = AD = a$, $PD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

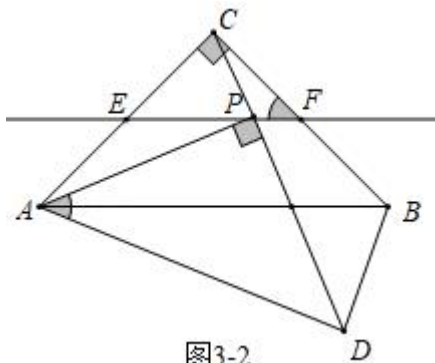


图3-2

$$\therefore PC = a - \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$\therefore \frac{AD}{PC} = \frac{a}{a - \frac{\sqrt{2}}{2}a} = 2 + \sqrt{2}.$$

【点评】本题属于相似形综合题，考查了旋转变换，等边三角形的性质，等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.

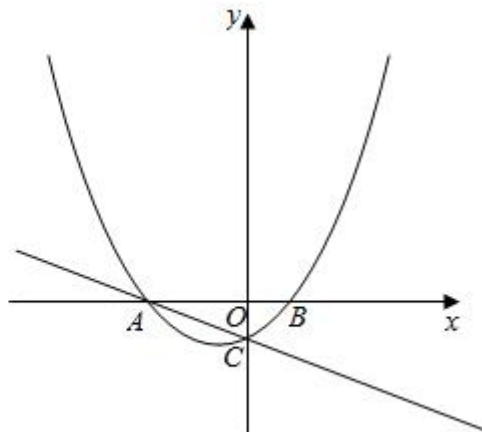
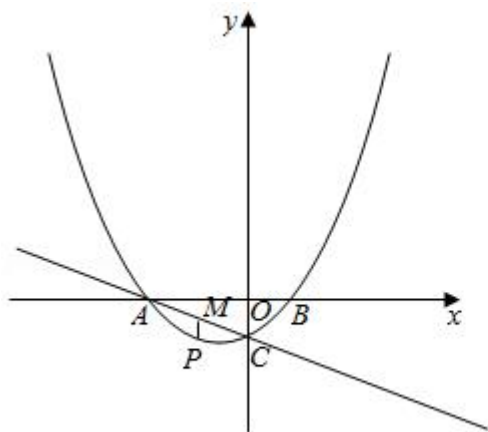
23. (11分) 如图，抛物线 $y = ax^2 + \frac{1}{2}x + c$ 交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于点 C . 直线 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 经过点 A, C .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 P 是抛物线上一动点，过点 P 作 x 轴的垂线，交直线 AC 于点 M ，设点 P 的横坐标为 m .

①当 $\triangle PCM$ 是直角三角形时，求点 P 的坐标;

②作点 B 关于点 C 的对称点 B' ，则平面内存在直线 l ，使点 M, B, B' 到该直线的距离都相等. 当点 P 在 y 轴右侧的抛物线上，且与点 B 不重合时，请直接写出直线 $l: y = kx + b$ 的解析式. (k, b 可用含 m 的式子表示)



备用图

【分析】(1) 利用一次函数图象上点的坐标特征可求出点 A, C 的坐标，根据点 A, C 的坐标，利用待定系数法可求出二次函数解析式;

(2) ①由 $PM \perp x$ 轴可得出 $\angle PMC \neq 90^\circ$ ，分 $\angle MPC = 90^\circ$ 及 $\angle PCM = 90^\circ$ 两种情况考虑:

(i) 当 $\angle MPC = 90^\circ$ 时， $PC \parallel x$ 轴，利用二次函数图象上点的坐标特征可求出点 P 的坐标; (ii) 当 $\angle PCM = 90^\circ$ 时，设 PC 与 x 轴交于点 D ，易证 $\triangle AOC \sim \triangle COD$ ，利用相似三角形的性质可求出点 D 的坐标，根据点 C, D 的坐标，利用待定系数法可求出直线 PC 的

解析式, 联立直线 PC 和抛物线的解析式成方程组, 通过解方程组可求出点 P 的坐标. 综上所述, 此问得解;

②利用二次函数图象上点的坐标特征可得出点 B , P 的坐标, 根据点 P , B 的坐标, 利用待定系数法可求出直线 PB 的解析式, 结合题意可知: 直线 l 过点 C , 且直线 $l \parallel$ 直线 PB , 再结合点 C 的坐标即可求出直线 l 的解析式.

【解答】解: (1) 当 $x=0$ 时, $y = -\frac{1}{2}x - 2 = -2$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, -2)$;

当 $y=0$ 时, $-\frac{1}{2}x - 2 = 0$,

解得: $x = -4$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-4, 0)$.

将 $A(-4, 0)$, $C(0, -2)$ 代入 $y = ax^2 + \frac{1}{2}x + c$, 得:

$$\begin{cases} 16a - 2 + c = 0 \\ c = -2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ c = -2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$.

(2) ① $\because PM \perp x$ 轴,

$\therefore \angle PMC \neq 90^\circ$,

$\therefore$ 分两种情况考虑, 如图 1 所示.

(i) 当 $\angle MPC = 90^\circ$ 时, $PC \parallel x$ 轴,

$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 -2 .

当 $y = -2$ 时, $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = -2$,

解得: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-2, -2)$;

(ii) 当 $\angle PCM = 90^\circ$ 时, 设 PC 与 x 轴交于点 D .

$\because \angle OAC + \angle OCA = 90^\circ$, $\angle OCA + \angle OCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAC = \angle OCD$.

又 $\because \angle AOC = \angle COD = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AOC \sim \triangle COD$,

$$\therefore \frac{OD}{OC} = \frac{OC}{OA}, \text{ 即 } \frac{OD}{2} = \frac{2}{4},$$

$$\therefore OD = 1,$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1, 0)$.

设直线 PC 的解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

将 $C(0, -2)$, $D(1, 0)$ 代入 $y = kx + b$, 得:

$$\begin{cases} b = -2 \\ k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 2 \\ b = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 PC 的解析式为 $y = 2x - 2$.

$$\text{联立直线 } PC \text{ 和抛物线的解析式成方程组, 得: } \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = 10 \end{cases},$$

点 P 的坐标为 $(6, 10)$.

综上所述: 当 $\triangle PCM$ 是直角三角形时, 点 P 的坐标为 $(-2, -2)$ 或 $(6, 10)$.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = -4, x_2 = 2,$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2, 0)$.

$\because$ 点 C 的坐标为 $(0, -2)$, 点 B, B' 关于点 C 对称,

$\therefore$ 点 B' 的坐标为 $(-2, -4)$.

$\because$ 点 P 的横坐标为 m ($m > 0$ 且 $m \neq 0$),

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(m, 0)$.

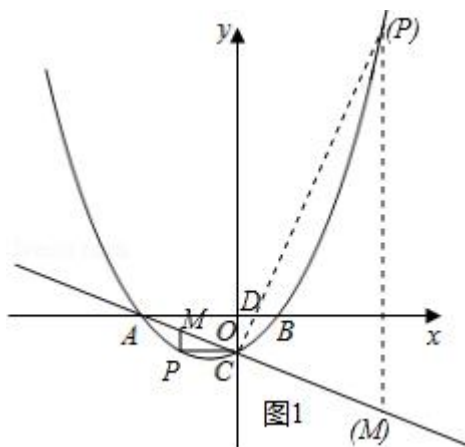
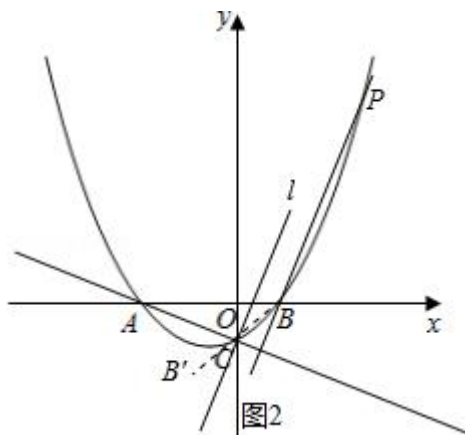
分三种情况考虑, 如图 2 所示:

$$\therefore \text{ 直线 } PB \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{4}(m+4)x - \frac{1}{2}(m+4) \text{ (可利用待定系数求出).}$$

$\because$ 点 B, B' 关于点 C 对称, 点 B, B' , P 到直线 l 的距离都相等,

$\therefore$ 直线 l 过点 C , 且直线 $l \parallel$ 直线 PB ,

$$\therefore \text{ 直线 } l \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{4}(m+4)x - 2.$$



【点评】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征、待定系数法二次函数解析式、二次函数图象上点的坐标特征、待定系数法求一次函数解析式、相似三角形的判定与性质以及平行线的性质，解题的关键是：(1) 根据点的坐标，利用待定系数法求出二次函数解析式；(2) ①分 $\angle MPC = 90^\circ$ 及 $\angle PCM = 90^\circ$ 两种情况求出点 P 的坐标；②利用待定系数法及平行线的性质，求出直线 l 的解析式.

会员升级服务第一拨 · 清北季



神马，有清华北大学霸方法论课；还有清华学霸向所有的父母亲述自己求学之路；

衡水名校试卷悄悄的上线了；

扫qq领取官网不首发课程，很多人我没告诉他啊！

会员qq专享等你来撩.....