

2015 年山东省青岛市中考数学试卷

一、选择题（本题满分 24 分，共有 8 小题，每小题 3 分）下列每小题都给出标号为 A, B, C, D 的四个结论，其中只有一个是正确的

1. (3 分) (2015•青岛) $\sqrt{2}$ 的相反数是 ()

- A. $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. 2

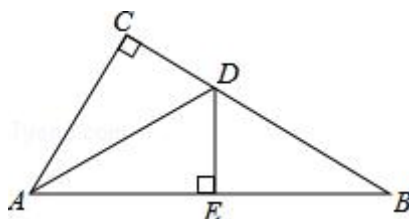
2. (3 分) (2015•青岛) 某种计算机完成一次基本运算的时间约为 0.000 000 001s. 把 0.000 000 001s 用科学记数法可表示为 ()

- A. $0.1 \times 10^{-8}s$ B. $0.1 \times 10^{-9}s$ C. $1 \times 10^{-8}s$ D. $1 \times 10^{-9}s$

3. (3 分) (2015•青岛) 下列四个图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



4. (3 分) (2015•青岛) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ ，垂足为 E ， $DE=1$ ，则 $BC=$ ()



- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. $\sqrt{3}+2$

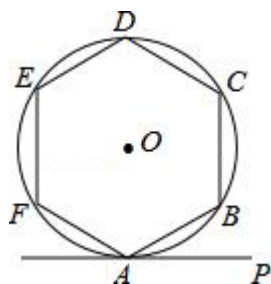
5. (3 分) (2015•青岛) 小刚参加射击比赛，成绩统计如下表：

成绩 (环)	6	7	8	9	10
次数	1	3	2	3	1

关于他的射击成绩，下列说法正确的是 ()

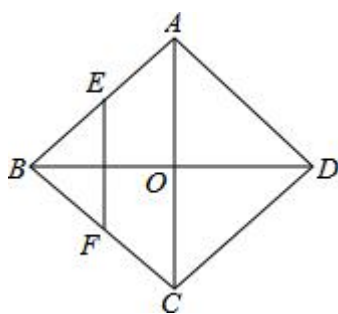
- A. 极差是 2 环 B. 中位数是 8 环
C. 众数是 9 环 D. 平均数是 9 环

6. (3 分) (2015•青岛) 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ，若直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ，则 $\angle PAB=$ ()



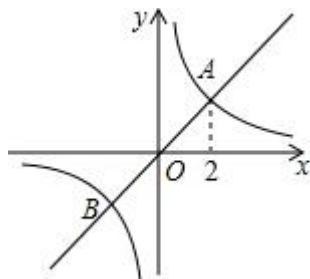
- A. 30° B. 35° C. 45° D. 60°

7. (3分) (2015•青岛) 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于 O 点, E , F 分别是 AB , BC 边上的中点, 连接 EF . 若 $EF=\sqrt{3}$, $BD=4$, 则菱形 $ABCD$ 的周长为 ()



- A. 4 B. $4\sqrt{6}$ C. $4\sqrt{7}$ D. 28

8. (3分) (2015•青岛) 如图, 正比例函数 $y_1=k_1x$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 A , B 两点, 其中点 A 的横坐标为 2, 当 $y_1 > y_2$ 时, x 的取值范围是 ()

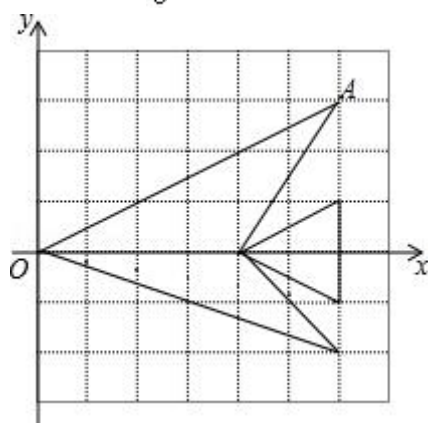


- A. $x < -2$ 或 $x > 2$ B. $x < -2$ 或 $0 < x < 2$
C. $-2 < x < 0$ 或 $0 < x < -2$ D. $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$

二、填空题 (本题满分 18 分, 共有 6 小题, 每小题 3 分)

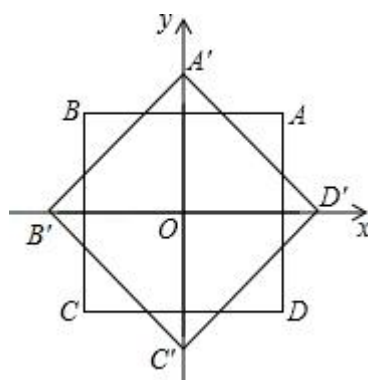
9. (3分) (2015•青岛) 计算: $3a^3 \cdot a^2 - 2a^7 \div a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. (3 分) (2015•青岛) 如图, 将平面直角坐标系中“鱼”的每个“顶点”的纵坐标保持不变, 横坐标分别变为原来的 $\frac{1}{3}$, 那么点 A 的对应点 A' 的坐标是_____.

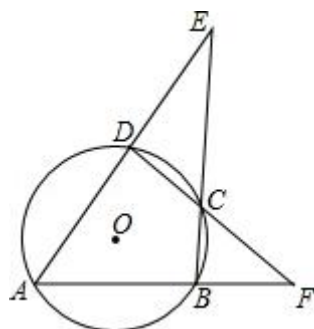


11. (3 分) (2015•青岛) 把一个长、宽、高分别为 3cm , 2cm , 1cm 的长方体铜块铸成一个圆柱体铜块, 则该圆柱体铜块的底面积 s (cm^2) 与高 h (cm) 之间的函数关系式为_____.

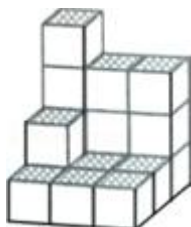
12. (3 分) (2015•青岛) 如图, 平面直角坐标系的原点 O 是正方形 $ABCD$ 的中心, 顶点 A , B 的坐标分别为 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, 把正方形 $ABCD$ 绕原点 O 逆时针旋转 45° 得正方形 $A'B'C'D'$, 则正方形 $ABCD$ 与正方形 $A'B'C'D'$ 重叠部分所形成的正八边形的边长为_____.



13. (3 分) (2015•青岛) 如图, 圆内接四边形 $ABCD$ 两组对边的延长线分别相交于点 E , F , 且 $\angle A=55^\circ$, $\angle E=30^\circ$, 则 $\angle F=$ _____.



14. (3 分) (2015•青岛) 如图, 在一次数学活动课上, 张明用 17 个边长为 1 的小正方形搭成了一个几何体, 然后他请王亮用其他同样的小正方体在旁边再搭一个几何体, 使王亮所搭几何体恰好可以和张明所搭几何体拼成一个无缝隙的大长方体 (不改变张明所搭几何体的形状), 那么王亮至少还需要_____个小立方体, 王亮所搭几何体的表面积为_____.



三、作图题 (本题满分 4 分) 用圆规、直尺作图, 不写作法, 但要保留作图痕迹

15. (4 分) (2015•青岛) 用圆规、直尺作图, 不写作法, 但要保留作图痕迹.

已知: 线段 c , 直线 l 及 l 外一点 A .

求作: $Rt\triangle ABC$, 使直角边为 AC ($AC \perp l$, 垂足为 C), 斜边 $AB=c$.

• A

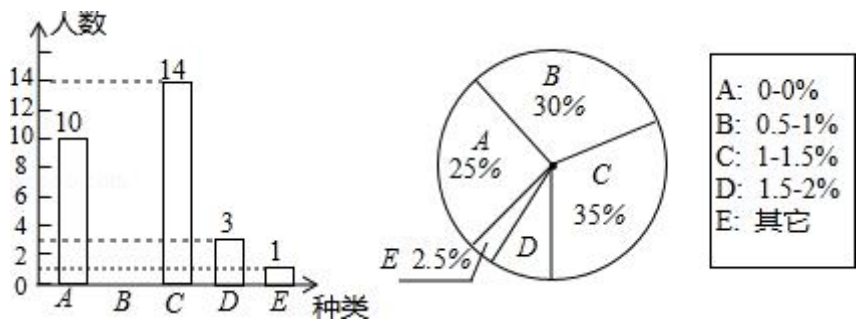


四、解答题 (本题满分 74 分, 共有 9 道小题)

16. (8 分) (2015•青岛) (1) 化简: $(\frac{2n+1}{n}+n) \div \frac{n^2-1}{n}$;

(2) 关于 x 的一元二次方程 $2x^2+3x-m=0$ 有两个不相等的实数根, 求 m 的取值范围.

17. (6 分) (2015•青岛) 某小学为了了解学生每天完成家庭作业所用时间的情况, 从每班抽取相同数量的学生进行调查, 并将所得数据进行整理, 制成条形统计图和扇形统计图如下:

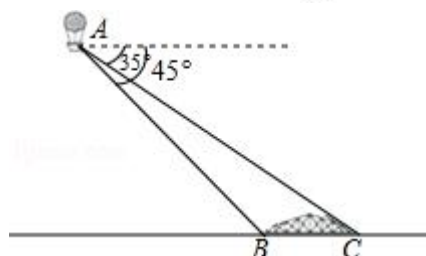


- (1) 补全条形统计图;
- (2) 求扇形统计图扇形 D 的圆心角的度数;
- (3) 若该中学有 2000 名学生, 请估计其中有多少名学生能在 1.5 小时内完成家庭作业?

18. (6 分) (2015•青岛) 小颖和小丽做“摸球”游戏: 在一个不透明的袋子中装有编号为 1-4 的四个球 (除编号外都相同), 从中随机摸出一个球, 记下数字后放回, 再从中摸出一个球, 记下数字. 若两次数之和大于 5, 则小颖胜, 否则小丽胜, 这个游戏对双方公平吗? 请说明理由.

19. (6分) (2015•青岛) 小明在热气球 A 上看到正前方横跨河流两岸的大桥 BC , 并测得 B, C 两点的俯角分别为 $45^\circ, 35^\circ$. 已知大桥 BC 与地面在同一水平面上, 其长度为 $100m$, 请求出热气球离地面的高度. (结果保留整数)

(参考数据: $\sin 35^\circ \approx \frac{7}{12}$, $\cos 35^\circ \approx \frac{5}{6}$, $\tan 35^\circ \approx \frac{7}{10}$)



20. (8分) (2015•青岛) 某厂制作甲、乙两种环保包装盒, 已知同样用 $6m$ 材料制成甲盒的个数比制成乙盒的个数少 2 个, 且制成一个甲盒比制成一个乙盒需要多用 20% 的材料.

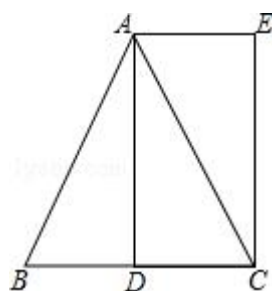
(1) 求制作每个甲盒、乙盒各用多少米材料?

(2) 如果制作甲、乙两种包装盒共 3000 个, 且甲盒的数量不少于乙盒数量的 2 倍, 那么请写出所需要材料的总长度 l (m) 与甲盒数量 n (个) 之间的函数关系式, 并求出最少需要多少米材料?

21. (8分) (2015•青岛) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AD 是 BC 边上的中线, $AE \parallel BC$, $CE \perp AE$, 垂足为 E .

(1) 求证: $\triangle ABD \cong \triangle CAE$;

(2) 连接 DE , 线段 DE 与 AB 之间有怎样的位置和数量关系? 请证明你的结论.

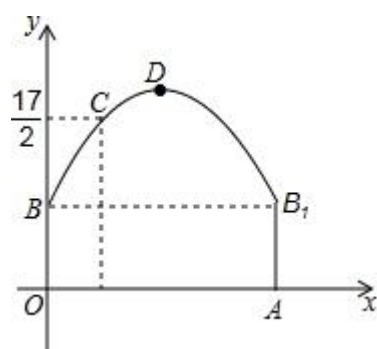


22. (10 分) (2015•青岛) 如图, 隧道的截面由抛物线和长方形构成, 长方形的长是 $12m$, 宽是 $4m$. 按照图中所示的直角坐标系, 抛物线可以用 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 表示, 且抛物线时的点 C 到墙面 OB 的水平距离为 $3m$, 到地面 OA 的距离为 $\frac{17}{2}m$.

(1) 求该抛物线的函数关系式, 并计算出拱顶 D 到地面 OA 的距离;

(2) 一辆货运汽车载一长方体集装箱后高为 $6m$, 宽为 $4m$, 如果隧道内设双向行车道, 那么这辆货车能否安全通过?

(3) 在抛物线型拱壁上需要安装两排灯, 使它们离地面的高度相等, 如果灯离地面的高度不超过 $8m$, 那么两排灯的水平距离最小是多少米?



23. (10 分) (2015•青岛) 【问题提出】用 n 根相同的木棒搭一个三角形 (木棒无剩余), 能搭成多少种不同的等腰三角形?

【问题探究】不妨假设能搭成 m 种不同的等腰三角形, 为探究 m 与 n 之间的关系, 我们可以先从特殊入手, 通过试验、观察、类比、最后归纳、猜测得出结论.

【探究一】

(1) 用 3 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的等腰三角形?

此时, 显然能搭成一种等腰三角形.

所以, 当 $n=3$ 时, $m=1$.

(2) 用 4 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的等腰三角形?

只可分成 1 根木棒、1 根木棒和 2 根木棒这种情况, 不能搭成三角形.

所以, 当 $n=4$ 时, $m=0$.

(3) 用 5 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的等腰三角形?

若分成 1 根木棒、1 根木棒和 3 根木棒, 则不能搭成三角形.

若分成 2 根木棒、2 根木棒和 1 根木棒, 则能搭成一种等腰三角形.

所以，当 $n=5$ 时， $m=1$.

(4) 用 6 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的等腰三角形？

若分成 1 根木棒、1 根木棒和 4 根木棒，则不能搭成三角形.

若分成 2 根木棒、2 根木棒和 2 根木棒，则能搭成一种等腰三角形.

所以，当 $n=6$ 时， $m=1$.

综上所述，可得：表①

n	3	4	5	6
m	1	0	1	1

【探究二】

(1) 用 7 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的三角形？

(仿照上述探究方法，写出解答过程，并将结果填在表②中)

(2) 用 8 根、9 根、10 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的等腰三角形？

(只需把结果填在表②中)

表②

n	7	8	9	10
m	_____	_____	_____	_____

你不妨分别用 11 根、12 根、13 根、14 根相同的木棒继续探究，...

【问题解决】：用 n 根相同的木棒搭一个三角形（木棒无剩余），能搭成多少种不同的等腰三角形？（设 n 分别等于 $4k-1$ ， $4k$ ， $4k+1$ ， $4k+2$ ，其中 k 是正整数，把结果填在表③中）

表③

n	$4k-1$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$
m	_____	_____	_____	_____

【问题应用】：用 2016 根相同的木棒搭一个三角形（木棒无剩余），能搭成多少种不同的等腰三角形？（写出解答过程），其中面积最大的等腰三角形每腰用了_____根木棒。（只填结果）

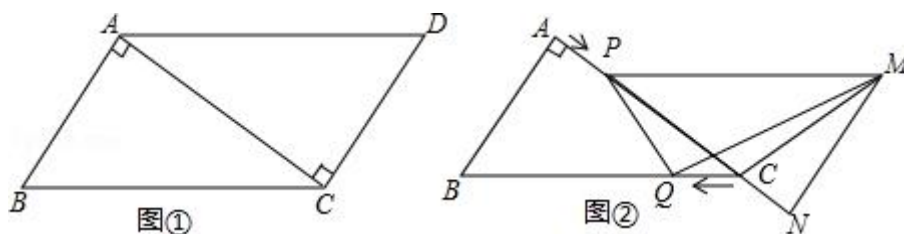
24. (12分) (2015•青岛) 已知, 如图①, 在 $\square ABCD$ 中, $AB=3\text{cm}$, $BC=5\text{cm}$, $AC \perp AB$, $\triangle ACD$ 沿 AC 的方向匀速平移得到 $\triangle PNM$, 速度为 1cm/s ; 同时, 点 Q 从点 C 出发, 沿 CB 方向匀速移动, 速度为 1cm/s , 当 $\triangle PNM$ 停止平移时, 点 Q 也停止移动, 如图②, 设移动时间为 t (s) ($0 < t < 4$), 连接 PQ , MQ , MC , 解答下列问题:

(1) 当 t 为何值时, $PQ \parallel MN$?

(2) 设 $\triangle QMC$ 的面积为 y (cm^2), 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(3) 是否存在某一时刻 t , 使 $S_{\triangle QMC} : S_{\text{四边形}ABQP} = 1 : 4$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

(4) 是否存在某一时刻 t , 使 $PQ \perp MQ$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



2015 年山东省青岛市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题满分 24 分，共有 8 小题，每小题 3 分）下列每小题都给出标号为 A, B, C, D 的四个结论，其中只有一个是正确的

1. (3 分) (2015•青岛) $\sqrt{2}$ 的相反数是 ()

- A. $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. 2

考点：实数的性质.

分析：根据相反数的含义，可得求一个数的相反数的方法就是在这个数的前边添加“ $-$ ”，据此解答即可.

解答：解：根据相反数的含义，可得

$\sqrt{2}$ 的相反数是： $-\sqrt{2}$.

故选：A.

点评：此题主要考查了相反数的含义以及求法，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：相反数是成对出现的，不能单独存在；求一个数的相反数的方法就是在这个数的前边添加“ $-$ ”.

2. (3 分) (2015•青岛) 某种计算机完成一次基本运算的时间约为 0.000 000 001s. 把 0.000 000 001s 用科学记数法可表示为 ()

- A. $0.1 \times 10^{-8}s$ B. $0.1 \times 10^{-9}s$ C. $1 \times 10^{-8}s$ D. $1 \times 10^{-9}s$

考点：科学记数法—表示较小的数.

分析：绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

解答：解： $0.000\ 000\ 001=1 \times 10^{-9}$,

故选：D.

点评：本题考查用科学记数法表示较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的

个数所决定.

3. (3 分) (2015•青岛) 下列四个图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



考点: 中心对称图形; 轴对称图形.

分析: 根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

解答: 解: A、不是轴对称图形, 是中心对称图形, 故此选项错误;

B、是轴对称图形, 又是中心对称图形, 故此选项正确;

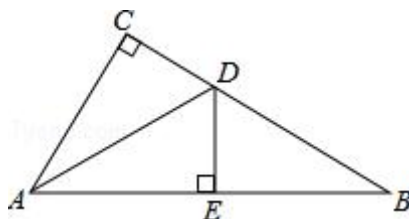
C、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项错误;

D、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项错误.

故选: B.

点评: 此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念: 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合; 中心对称图形是要寻找对称中心, 旋转 180 度后两部分重合.

4. (3 分) (2015•青岛) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle B=30^\circ$, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \perp AB$, 垂足为 E , $DE=1$, 则 $BC=$ ()



- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. $\sqrt{3}+2$

考点: 角平分线的性质; 含 30 度角的直角三角形.

分析: 根据角平分线的性质即可求得 CD 的长, 然后在直角 $\triangle BDE$ 中, 根据 30° 的锐角所对的直角边等于斜边的一半, 即可求得 BD 长, 则 BC 即可求得.

解答： 解： $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ ， $\angle C=90^\circ$ ，

$$\therefore CD=DE=1,$$

又 $\because$ 直角 $\triangle BDE$ 中， $\angle B=30^\circ$ ，

$$\therefore BD=2DE=2,$$

$$\therefore BC=CD+BD=1+2=3.$$

故选 C.

点评： 本题考查了角的平分线的性质以及直角三角形的性质， 30° 的锐角所对的直角边等于斜边的一半，理解性质定理是关键.

5. (3 分) (2015•青岛) 小刚参加射击比赛，成绩统计如下表：

成绩 (环)	6	7	8	9	10
次数	1	3	2	3	1

关于他的射击成绩，下列说法正确的是 ()

A. 极差是 2 环 B. 中位数是 8 环

C. 众数是 9 环 D. 平均数是 9 环

考点： 众数；加权平均数；中位数；极差.

分析： 根据极差反映了一组数据变化范围的大小，求极差的方法是用一组数据中的最大值减去最小值，以及众数是出现次数最多的数，中位数是按大小顺序排列后，最中间的一个即是中位数，所有数据的和除以数据个数即是平均数，分别求出即可.

解答： 解： A、极差是 $10 - 6 = 4$ 环，故本选项错误；

B、把数从小到大排列起来：6，7，7，7，8，8，9，9，9，10，位于中间的两个数都是 8，所以中位数是 $(8+8) \div 2 = 8$ ，故本选项正确；

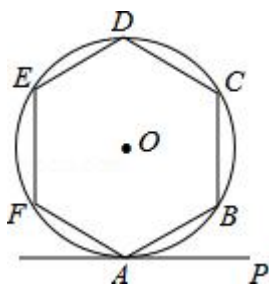
C、7 和 9 都出现了 3 次，次数最多，所以众数是 7 环和 9 环，故本选项错误；

D、平均数 $= \frac{1}{10} (6+7 \times 3+8 \times 2+9 \times 3+10) = 8$ ，故本选项错误；

故选： B.

点评： 此题主要考查了极差，平均数，众数与中位数，解决问题的关键是正确把握这几种数概念的区别与联系.

6. (3 分) (2015•青岛) 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ，若直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ，则 $\angle PAB =$ ()

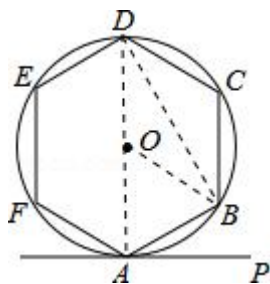


- A. 30° B. 35° C. 45° D. 60°

考点： 切线的性质；正多边形和圆.

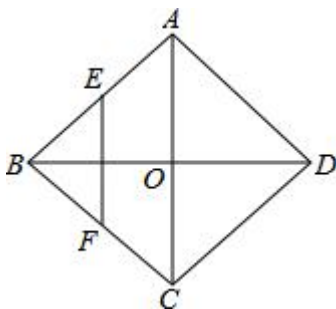
分析： 连接 OB , AD , BD ，由多边形是正六边形可求出 $\angle AOB$ 的度数，再根据圆周角定理即可求出 $\angle ADB$ 的度数，利用弦切角定理 $\angle PAB$.

解答： 解：连接 OB , AD , BD ,
 $\because$ 多边形 $ABCDEF$ 是正多边形,
 $\therefore AD$ 为外接圆的直径,
 $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$.
 $\because$ 直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ,
 $\therefore \angle PAB = \angle ADB = 30^\circ$,
故选 A.



点评: 本题主要考查了正多边形和圆,切线的性质,作出适当的辅助线,利用弦切角定理是解答此题的关键.

7. (3 分) (2015•青岛) 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于 O 点, E , F 分别是 AB , BC 边上的中点, 连接 EF . 若 $EF=\sqrt{3}$, $BD=4$, 则菱形 $ABCD$ 的周长为 ()



- A. 4 B. $4\sqrt{6}$ C. $4\sqrt{7}$ D. 28

考点: 菱形的性质; 三角形中位线定理.

分析: 首先利用三角形的中位线定理得出 AC , 进一步利用菱形的性质和勾股定理求得边长, 得出周长即可.

解答: 解: $\because E, F$ 分别是 AB, BC 边上的中点, $EF=\sqrt{3}$,

$$\therefore AC=2EF=2\sqrt{3},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, \quad OA=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}, \quad OB=\frac{1}{2}BD=2,$$

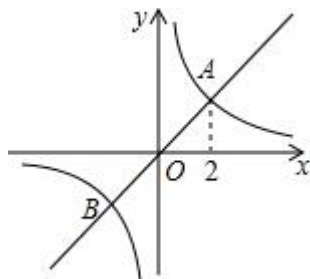
$$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{7},$$

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的周长为 $4\sqrt{7}$.

故选: C.

点评： 此题考查菱形的性质，三角形的中位线定理，勾股定理，掌握菱形的性质是解决问题的关键.

8. (3 分) (2015•青岛) 如图，正比例函数 $y_1=k_1x$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 A, B 两点，其中点 A 的横坐标为 2，当 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围是 ()



- A. $x < -2$ 或 $x > 2$ B. $x < -2$ 或 $0 < x < 2$
C. $-2 < x < 0$ 或 $0 < x < -2$ D. $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$

考点： 反比例函数与一次函数的交点问题.

分析： 先根据反比例函数与正比例函数的性质求出 B 点坐标，再由函数图象即可得出结论.

解答： 解： $\because$ 反比例函数与正比例函数的图象均关于原点对称，

$\therefore A, B$ 两点关于原点对称，

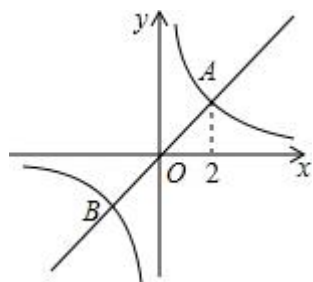
$\because$ 点 A 的横坐标为 2，

$\therefore$ 点 B 的横坐标为 -2 ，

$\because$ 由函数图象可知，当 $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$ 时函数 $y_1=k_1x$ 的图象在 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的上方，

$\therefore$ 当 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围是 $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$.

故选 D.



点评: 本题考查的是反比例函数与一次函数的交点问题, 能根据数形结合求出 $y_1 > y_2$ 时 x 的取值范围是解答此题的关键.

二、填空题 (本题满分 18 分, 共有 6 小题, 每小题 3 分)

9. (3 分) (2015•青岛) 计算: $3a^3 \cdot a^2 - 2a^7 \div a^2 = \underline{a^5}$.

考点: 整式的混合运算.

分析: 根据整式的混合运算顺序, 首先计算乘法和除法, 然后计算减法, 即可求出算式 $3a^3 \cdot a^2 - 2a^7 \div a^2$ 的值是多少.

解答: 解: $3a^3 \cdot a^2 - 2a^7 \div a^2$
 $= 3a^5 - 2a^5$
 $= a^5$

故答案为: a^5 .

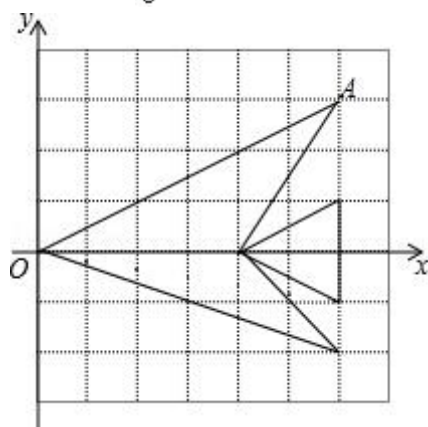
点评: (1) 此题主要考查了整式的混合运算, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: 有乘方、乘除的混合运算中, 要按照先乘方后乘除的顺序运算, 其运算顺序和有理数的混合运算顺序相似.

(2) 此题还考查了同底数幂的乘法法则: 同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: ①底数必须相同; ②按照运算性质, 只有相乘时才是底数不变, 指数相加.

(3) 此题还考查了同底数幂的除法法则: 同底数幂相除, 底数不变, 指数相减, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: ①底数 $a \neq 0$, 因为 0 不能做除数; ②单独的一个字母, 其指数是 1, 而不是 0; ③应用同底数幂除法的法则时, 底数 a 可是单项式,

也可以多项式，但必须明确底数是什么，指数是什么.

10. (3 分) (2015•青岛) 如图，将平面直角坐标系中“鱼”的每个“顶点”的纵坐标保持不变，横坐标分别变为原来的 $\frac{1}{3}$ ，那么点 A 的对应点 A' 的坐标是 (6, 1).



考点：坐标与图形性质.

分析：先写出点 A 的坐标为 $(6, 3)$ ，横坐标保持不变，纵坐标分别变为原来的 $\frac{1}{3}$ ，即可判断出答案.

解答：解：点 A 变化前的坐标为 $(6, 3)$ ，
将横坐标保持不变，纵坐标分别变为原来的 $\frac{1}{3}$ ，则点 A 的对应点的坐标是 $(6, 1)$ ，
故答案为 $(6, 1)$.

点评：此题考查了坐标与图形性质的知识，根据图形得到点 A 的坐标是解答本题的关键.

11. (3 分) (2015•青岛) 把一个长、宽、高分别为 3cm ， 2cm ， 1cm 的长方体铜块铸成一个圆柱体铜块，则该圆柱体铜块的底面积 s (cm^2) 与高 h (cm) 之间的函数关系式为 $s=\frac{6}{h}$.

考点：根据实际问题列反比例函数关系式.

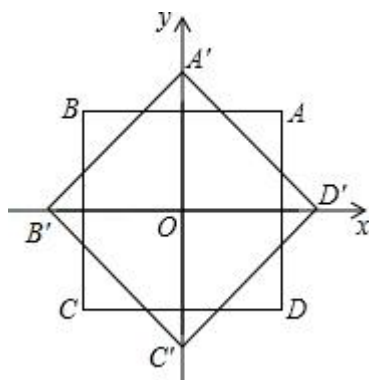
分析：利用长方体的体积=圆柱体的体积，进而得出等式求出即可.

解答：解：由题意可得： $sh=3\times 2\times 1$ ，
则 $s=\frac{6}{h}$.

故答案为: $s=\frac{6}{h}$.

点评: 此题主要考查了根据实际问题列反比例函数解析式, 得出长方体体积是解题关键.

12. (3 分) (2015•青岛) 如图, 平面直角坐标系的原点 O 是正方形 $ABCD$ 的中心, 顶点 A, B 的坐标分别为 $(1, 1), (-1, 1)$, 把正方形 $ABCD$ 绕原点 O 逆时针旋转 45° 得正方形 $A'B'C'D'$, 则正方形 $ABCD$ 与正方形 $A'B'C'D'$ 重叠部分所形成的正八边形的边长为 $2\sqrt{2}-2$.



考 旋转的性质; 坐标与图形性质; 正方形的性质; 正多边形和圆.

点:

分析: 如图, 首先求出正方形的边长、对角线长; 进而求出 OA' 的长; 证明 $\triangle A'MN$ 为等腰直角三角形, 求出 $A'N$ 的长度; 同理求出 $D'M'$ 的长度, 即可解决问题.

解答: 解: 如图, 由题意得:

正方形 $ABCD$ 的边长为 2,

$\therefore$ 该正方形的对角线长为 $2\sqrt{2}$,

$\therefore OA'=\sqrt{2}$; 而 $OM=1$,

$\therefore A'M=\sqrt{2}-1$;

由题意得: $\angle MA'N=45^\circ$, $\angle A'MN=90^\circ$,

$\therefore \angle MNA'=45^\circ$,

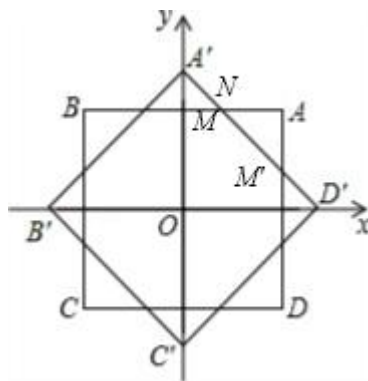
$\therefore MN=A'M=\sqrt{2}-1$;

由勾股定理得: $A'N=2-\sqrt{2}$;

同理可求 $D'M'=2-\sqrt{2}$,

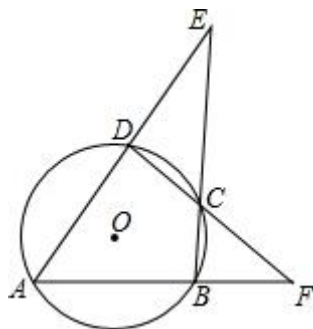
$$\therefore MN=2-(4-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2,$$

$\therefore$ 正八边形的边长为 $2\sqrt{2}-2$.



点评: 该题主要考查了旋转变换的性质、正方形的性质、勾股定理等几何知识点及其应用问题; 应牢固掌握旋转变换的性质、正方形的性质等几何知识点, 这是灵活运用、解题的基础和关键.

13. (3 分) (2015•青岛) 如图, 圆内接四边形 $ABCD$ 两组对边的延长线分别相交于点 E, F , 且 $\angle A=55^\circ$, $\angle E=30^\circ$, 则 $\angle F=$ 40° .



考点: 圆内接四边形的性质; 三角形内角和定理.

专题: 计算题.

分析: 先根据三角形外角性质计算出 $\angle EBF=\angle A+\angle E=85^\circ$, 再根据圆内接四边形的性质计算出 $\angle BCD=180^\circ-\angle A=125^\circ$, 然后再根据三角形外角性质求 $\angle F$.

解答: 解: $\because \angle A=55^\circ$, $\angle E=30^\circ$,

$$\therefore \angle EBF = \angle A + \angle E = 85^\circ,$$

$$\because \angle A + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ,$$

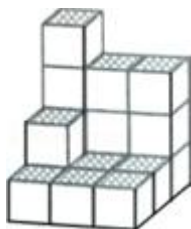
$$\because \angle BCD = \angle F + \angle CBF,$$

$$\therefore \angle F = 125^\circ - 85^\circ = 40^\circ.$$

故答案为 40° .

点评: 本题考查了圆内接四边形的性质：圆内接四边形的对角互补；圆内接四边形的任意一个外角等于它的内对角．也考查了三角形外角性质．

14. (3 分) (2015•青岛) 如图，在一次数学活动课上，张明用 17 个边长为 1 的小正方形搭成了一个几何体，然后他请王亮用其他同样的小正方体在旁边再搭一个几何体，使王亮所搭几何体恰好可以和张明所搭几何体拼成一个无缝隙的大长方体（不改变张明所搭几何体的形状），那么王亮至少还需要 19 个小立方体，王亮所搭几何体的表面积为 48．



考点: 由三视图判断几何体．

分析: 首先确定张明所搭几何体所需的正方体的个数，然后确定两人共搭建几何体所需小立方体的数量，求差即可．

解答: 解：∵ 亮所搭几何体恰好可以和张明所搭几何体拼成一个无缝隙的大长方体，

∴ 该长方体需要小立方体 $4 \times 3^2 = 36$ 个，

∵ 张明用 17 个边长为 1 的小正方形搭成了一个几何体，

∴王亮至少还需 $36 - 17 = 19$ 个小立方体,

表面积为: $2 \times (9+7+8) = 48$,

故答案为 19, 48.

点评: 本题考查了由三视图判断几何体的知识, 能够确定两人所搭几何体的形状是解答本题的关键, 难度不大.

三、作图题 (本题满分 4 分) 用圆规、直尺作图, 不写作法, 但要保留作图痕迹

15. (4 分) (2015•青岛) 用圆规、直尺作图, 不写作法, 但要保留作图痕迹.

已知: 线段 c , 直线 l 及 l 外一点 A .

求作: $Rt\triangle ABC$, 使直角边为 AC ($AC \perp l$, 垂足为 C), 斜边 $AB = c$.



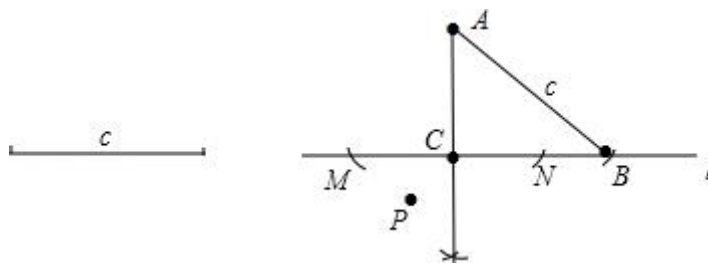


考点: 作图—复杂作图.

专题: 作图题.

分析: 在直线 l 另一侧取点 P , 以点 A 为圆心, AP 为半径画弧交直线 l 于 M 、 N , 再作线段 MN 的垂直平分线交 l 于 C , 然后以点 A 为圆心, c 为半径画弧交 l 于 B , 连结 AB , 则 $\triangle ABC$ 为所作.

解答: 解: 如图, $\triangle ABC$ 为所求.



点评: 本题考查了作图—复杂作图: 复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图, 一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法. 解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质, 结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图, 逐步操作.

四、解答题（本题满分 74 分，共有 9 道小题）

16. (8 分) (2015•青岛) (1) 化简: $(\frac{2n+1}{n}+n) \div \frac{n^2-1}{n}$;

(2) 关于 x 的一元二次方程 $2x^2+3x-m=0$ 有两个不相等的实数根, 求 m 的取值范围.

考点: 分式的混合运算; 根的判别式.

专题: 计算题.

分析: (1) 原式括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分即可得到结果;

(2) 根据方程有两个不相等的实数根, 得到根的判别式大于 0, 求出 m 的范围即可.

解答: 解: (1) 原式

$$= \frac{n^2+2n+1}{n} \cdot \frac{n}{n^2-1} = \frac{(n+1)^2}{n} \cdot \frac{n}{(n+1)(n-1)} = \frac{n+1}{n-1};$$

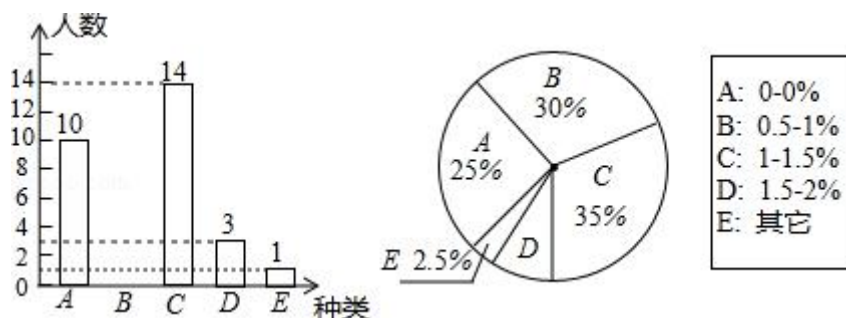
(2) $\because$ 方程 $2x^2+3x-m=0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = 9+8m > 0,$$

$$\text{解得: } m > -\frac{9}{8}.$$

点评: 此题考查了分式的混合运算, 以及根的判别式, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

17. (6 分) (2015•青岛) 某小学为了了解学生每天完成家庭作业所用时间的情况, 从每班抽取相同数量的学生进行调查, 并将所得数据进行整理, 制成条形统计图和扇形统计图如下:



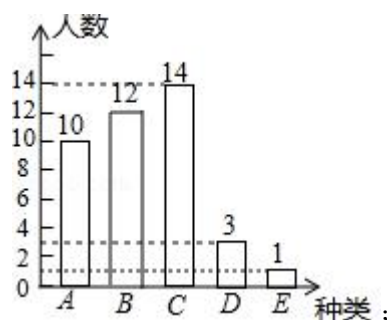
- (1) 补全条形统计图；
- (2) 求扇形统计图扇形 D 的圆心角的度数；
- (3) 若该中学有 2000 名学生，请估计其中有多少名学生能在 1.5 小时内完成家庭作业？

考点： 条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

分析：

- (1) 根据 A 类的人数是 10，所占的百分比是 25%即可求得总人数，然后根据百分比的意义求得 B 类的人数；
- (2) 用 360° 乘以对应的比例即可求解；
- (3) 用总人数乘以对应的百分比即可求解.

解答： 解：(1) 抽取的总人数是： $10 \div 25\% = 40$ (人)，
在 B 类的人数是： $40 \times 30\% = 12$ (人).



(2) 扇形统计图扇形 D 的圆心角的度数是： $360 \times \frac{3}{40} = 27^\circ$;

(3) 能在 1.5 小时内完成家庭作业的人数是： $2000 \times (25\% + 30\% + 35\%) = 1800$ (人).

点评： 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占

总体的百分比大小.

18. (6 分) (2015•青岛) 小颖和小丽做“摸球”游戏: 在一个不透明的袋子中装有编号为 1–4 的四个球 (除编号外都相同), 从中随机摸出一个球, 记下数字后放回, 再从中摸出一个球, 记下数字. 若两次数之和大于 5, 则小颖胜, 否则小丽胜, 这个游戏对双方公平吗? 请说明理由.

考点: 游戏公平性; 列表法与树状图法.

分析: 列表得出所有等可能的情况数, 找出数字之和大于 5 的情况数, 分别求出两人获胜的概率, 比较即可得到游戏公平与否.

解答: 解: 这个游戏对双方不公平.

理由: 列表如下:

	1	2	3
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)

所有等可能的情况有 16 种, 其中数字之和大于 5 的情况有 (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4) 共 6 种,

故小颖获胜的概率为: $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, 则小丽获胜的概率为: $\frac{5}{8}$,

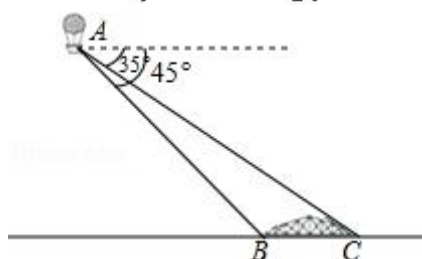
$$\because \frac{3}{8} < \frac{5}{8},$$

$\therefore$ 这个游戏对双方不公平.

点评: 此题考查了游戏公平性, 以及列表法与树状图法, 判断游戏公平性就要计算每个事件的概率, 概率相等就公平, 否则就不公平.

19. (6 分) (2015•青岛) 小明在热气球 A 上看到正前方横跨河流两岸的大桥 BC, 并测得 B, C 两点的俯角分别为 45° , 35° . 已知大桥 BC 与地面在同一水平面上, 其长度为 $100m$, 请求出热气球离地面的高度. (结果保留整数)

(参考数据: $\sin 35^\circ \approx \frac{7}{12}$, $\cos 35^\circ \approx \frac{5}{6}$, $\tan 35^\circ \approx \frac{7}{10}$)



考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析: 作 $AD \perp BC$ 交 CB 的延长线于 D , 设 AD 为 x , 表示出 DB 和 DC , 根据正切的概念求出 x 的值即可.

解答: 解: 作 $AD \perp BC$ 交 CB 的延长线于 D , 设 AD 为 x ,

由题意得, $\angle ABD = 45^\circ$, $\angle ACD = 35^\circ$,

在 $Rt\triangle ADB$ 中, $\angle ABD = 45^\circ$,

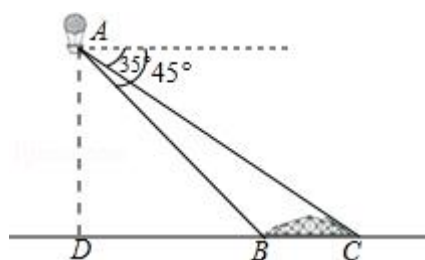
$$\therefore DB = x,$$

在 $Rt\triangle ADC$ 中, $\angle ACD = 35^\circ$,

$$\therefore \tan \angle ACD = \frac{AD}{CD},$$

$$\therefore \frac{x}{x+100} = \frac{7}{10},$$

解得, $x \approx 233m$.



点评: 本题考查的是解直角三角形的应用, 理解仰角和俯角的概念、掌握锐角三角函数的概念是解题的关键, 解答时, 注意正确作出辅助线构造直角三角形.

20. (8 分) (2015•青岛) 某厂制作甲、乙两种环保包装盒, 已知同样用 $6m$ 材料制成甲盒的个数比制成乙盒的个数少 2 个, 且制成一个甲盒比制成一个乙盒需要多用 20% 的材料.

(1) 求制作每个甲盒、乙盒各用多少米材料?

(2) 如果制作甲、乙两种包装盒共 3000 个, 且甲盒的数量不少于乙盒数量的 2 倍, 那么请写出所需要材料的总长度 l (m) 与甲盒数量 n (个) 之间的函数关系式, 并求出最少需要多少米材料?

考点: 一次函数的应用; 分式方程的应用; 一元一次不等式的应用.

分析: (1) 设制作每个乙盒用 x 米材料, 则制作甲盒用 $(1+20\%)x$ 米材料, 根据“同样用 $6m$ 材料制成甲盒的个数比制成乙盒的个数少 2 个”, 列出方程, 即可解答;

(2) 根据所需要材料的总长度 l = 甲盒材料的总长度 + 乙盒材料的总长度, 列出函数关系式; 再根据“甲盒的数量不少于乙盒数量的 2 倍”求出 n 的取值范围, 根据一次函数的性质, 即可解答.

解答: 解: (1) 设制作每个乙盒用 x 米材料, 则制作甲盒用 $(1+20\%)x$ 米材料,

$$\frac{6}{x} - 2 = \frac{6}{(1+20\%)x},$$

解得: $x=0.5$,

经检验 $x=0.5$ 是原方程的解,

$$\therefore (1+20\%)x=0.6 \text{ (米)},$$

答: 制作每个甲盒用 0.6 米材料; 制作每个乙盒用 0.5 米材料.

(2) 根据题意得: $l=0.6n+0.5(3000-n)=0.1n+1500$,

$\therefore$ 甲盒的数量不少于乙盒数量的 2 倍,

$$\therefore n \geq 2(3000 - n)$$

解得: $n \geq 2000$,

$$\therefore 2000 \leq n < 3000,$$

$$\therefore k=0.1 > 0,$$

$\therefore l$ 随 n 增大而增大,

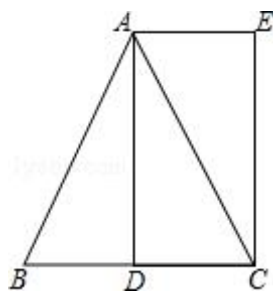
$\therefore$ 当 $n=2000$ 时, l 最小 1700 米.

点评: 本题考查了一次函数的应用, 解决本题的关键是利用一次函数的性质解决实际问题.

21. (8 分) (2015•青岛) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AD 是 BC 边上的中线, $AE \parallel BC$, $CE \perp AE$, 垂足为 E .

(1) 求证: $\triangle ABD \cong \triangle CAE$;

(2) 连接 DE , 线段 DE 与 AB 之间有怎样的位置和数量关系? 请证明你的结论.



考点: 全等三角形的判定与性质; 等腰三角形的性质; 平行四边形的判定与性质.

分析: (1) 运用 AAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle CAE$;

(2) 易证四边形 $ADCE$ 是矩形, 所以 $AC=DE=AB$, 也可证四边形 $ABDE$ 是平行四边形得到 $AB=DE$.

解答: 证明: (1) $\because AB=AC$,

$$\therefore \angle B = \angle ACD,$$

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle B = \angle EAC,$$

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore AD \perp BC$,

$\because CE \perp AE$,

$\therefore \angle ADC = \angle CEA = 90^\circ$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CAE$ 中

$$\begin{cases} \angle B = \angle EAC \\ \angle ADC = \angle CEA \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$ (AAS);

(2) $AB = DE$, 如右图所示,

$\because AD \perp BC$, $AE \parallel BC$,

$\therefore AD \perp AE$,

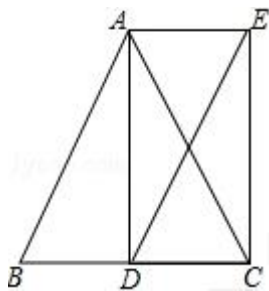
又 $\because CE \perp AE$,

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形,

$\therefore AC = DE$,

$\because AB = AC$,

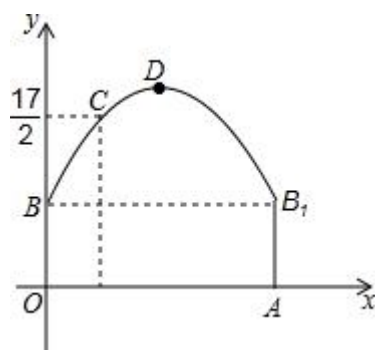
$\therefore AB = DE$.



点评: 本题主要考查了三角形全等的判定与性质, 矩形的判定与性质以及平行四边形的判定与性质, 难度不大, 比较灵活.

22. (10 分) (2015•青岛) 如图, 隧道的截面由抛物线和长方形构成, 长方形的长是 $12m$, 宽是 $4m$. 按照图中所示的直角坐标系, 抛物线可以用 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 表示, 且抛物线时的点 C 到墙面 OB 的水平距离为 $3m$, 到地面 OA 的距离为 $\frac{17}{2}m$.

- (1) 求该抛物线的函数关系式, 并计算出拱顶 D 到地面 OA 的距离;
- (2) 一辆货运汽车载一长方体集装箱后高为 $6m$, 宽为 $4m$, 如果隧道内设双向行车道, 那么这辆货车能否安全通过?
- (3) 在抛物线型拱壁上需要安装两排灯, 使它们离地面的高度相等, 如果灯离地面的高度不超过 $8m$, 那么两排灯的水平距离最小是多少米?



考点: 二次函数的应用.

专题: 应用题.

分析: (1) 先确定 B 点和 C 点坐标, 然后利用待定系数法求出抛物线解析式, 再利用配方法确定顶点 D 的坐标, 从而得到点 D 到地面 OA 的距离;

(2) 由于抛物线的对称轴为直线 $x=6$, 而隧道内设双向行车道, 车宽为 $4m$, 则货运汽车最外侧于地面 OA 的交点为 $(2, 0)$ 或 $(10, 0)$, 然后计算自变量为 2 或 10 的函数值, 再把函数值于 6 进行大小比较即可判断;

(3) 抛物线开口向下, 函数值越大, 对称点之间的距离越小, 于是计算函数值为 8 所对应的自变量的值即可得到两排灯的水平距离最小值.

解答: 解: (1) 根据题意得 $B(0, 4)$, $C(3, \frac{17}{2})$,

把 $B(0, 4)$, $C(3, \frac{17}{2})$ 代入 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 得 $\begin{cases} c=4 \\ -\frac{1}{6} \times 3^2 + 3b + c = \frac{17}{2} \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b=2 \\ c=4 \end{cases}$.

所以抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x + 4$,

则 $y = -\frac{1}{6}(x-6)^2 + 10$,

所以 $D(6, 10)$,

所以拱顶 D 到地面 OA 的距离为 $10m$;

(2) 由题意得货运汽车最外侧于地面 OA 的交点为 $(2, 0)$ 或 $(10, 0)$,

当 $x=2$ 或 $x=10$ 时, $y = \frac{22}{3} > 6$,

所以这辆货车能安全通过;

(3) 令 $y=0$, 则 $-\frac{1}{6}(x-6)^2 + 10 = 8$, 解得 $x_1 = 6 + 2\sqrt{3}$, $x_2 = 6 - 2\sqrt{3}$,

则 $x_1 - x_2 = 4\sqrt{3}$,

所以两排灯的水平距离最小是 $4\sqrt{3}m$.

点评: 本题考查了二次函数的应用: 构建二次函数模型解决实际问题, 利用二次函数解决抛物线形的隧道、大桥和拱门等实际问题时, 要恰当地把这些实际问题中的数据落实到平面直角坐标系中的抛物线上, 从而确定抛物线的解析式, 通过解析式可解决一些测量问题或其他问题.

23. (10 分) (2015•青岛) 【问题提出】用 n 根相同的木棒搭一个三角形 (木棒无剩余), 能搭成多少种不同的等腰三角形?

【问题探究】不妨假设能搭成 m 种不同的等腰三角形, 为探究 m 与 n 之间的关系, 我们可以先从特殊入手, 通过试验、观察、类比、最后归纳、猜测得出结论.

【探究一】

(1) 用 3 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的等腰三角形?

此时, 显然能搭成一种等腰三角形.

所以, 当 $n=3$ 时, $m=1$.

(2) 用 4 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的等腰三角形？
只可分成 1 根木棒、1 根木棒和 2 根木棒这一情况，不能搭成三角形。
所以，当 $n=4$ 时， $m=0$ 。

(3) 用 5 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的等腰三角形？
若分成 1 根木棒、1 根木棒和 3 根木棒，则不能搭成三角形。
若分成 2 根木棒、2 根木棒和 1 根木棒，则能搭成一种等腰三角形。
所以，当 $n=5$ 时， $m=1$ 。

(4) 用 6 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的等腰三角形？
若分成 1 根木棒、1 根木棒和 4 根木棒，则不能搭成三角形。
若分成 2 根木棒、2 根木棒和 2 根木棒，则能搭成一种等腰三角形。
所以，当 $n=6$ 时， $m=1$ 。

综上所述，可得：表①

n	3	4	5	6
m	1	0	1	1

【探究二】

(1) 用 7 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的三角形？
(仿照上述探究方法，写出解答过程，并将结果填在表②中)

(2) 用 8 根、9 根、10 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的等腰三角形？
(只需把结果填在表②中)

表②

n	7	8	9	10
m	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>2</u>

你不妨分别用 11 根、12 根、13 根、14 根相同的木棒继续进行探究，...

【问题解决】：用 n 根相同的木棒搭一个三角形（木棒无剩余），能搭成多少种不同的等腰三角形？（设 n 分别等于 $4k-1$ ， $4k$ ， $4k+1$ ， $4k+2$ ，其中 k 是正整数，把结果填在表③中）

表③

n	$4k-1$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$
m	$\underline{k}$	$\underline{k-1}$	$\underline{k}$	$\underline{k}$

【问题应用】：用 2016 根相同的木棒搭一个三角形（木棒无剩余），能搭成多少种不同的等腰三角形？（写出解答过程），其中面积最大的等腰三角形每腰用了 672 根木棒。（只填结果）

考点： 作图—应用与设计作图；三角形三边关系；等腰三角形的判定与性质.

专题： 分类讨论.

分析： 探究二：仿照探究一的方法进行分析即可；

问题解决：根据探究一、二的结果总结规律填表即可；

问题应用：根据规律进行计算求出 m 的值.

解答： 解：（1）用 7 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的等腰三角形？

此时，能搭成二种等腰三角形，

即分成 2 根木棒、2 根木棒和 3 根木棒，则能搭成一种等腰三角形

分成 3 根木棒、3 根木棒和 1 根木棒，则能搭成一种等腰三角形

当 $n=7$ 时， $m=2$.

（2）用 8 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的等腰三角形？

分成 2 根木棒、2 根木棒和 4 根木棒，则不能搭成一种等腰三角形，

分成 3 根木棒、3 根木棒和 2 根木棒，则能搭成一种等腰三角形，

所以，当 $n=8$ 时， $m=1$.

用 9 根相同的木棒搭一个三角形，能搭成多少种不同的等腰三角形？

分成 3 根木棒、3 根木棒和 3 根木棒，则能搭成一种等腰三角形

分成 4 根木棒、4 根木棒和 1 根木棒，则能搭成一种等腰三角形

所以, 当 $n=9$ 时, $m=2$.

用 10 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的等腰三角形?

分成 3 根木棒、3 根木棒和 4 根木棒, 则能搭成一种等腰三角形

分成 4 根木棒、4 根木棒和 2 根木棒, 则能搭成一种等腰三角形

所以, 当 $n=10$ 时, $m=2$.

故答案为: 2; 1; 2; 2.

问题解决: 由规律可知, 答案为: k ; $k-1$; k ; k .

问题应用: $2016 \div 4 = 504$, $504 - 1 = 503$,

当三角形是等边三角形时, 面积最大,

$2016 \div 3 = 672$,

$\therefore$ 用 2016 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成 503 种不同的等腰三角形, 其中面积最大的等腰三角形每腰用 672 根木棒.

点评: 本题考查的是作图应用与设计作图、三角形三边关系, 首先要理解题意, 弄清问题中对所作图形的要求, 结合对应几何图形的性质和基本作图的方法作图, 根据三角形两边之和大于第三边和等腰三角形的性质进行解答.

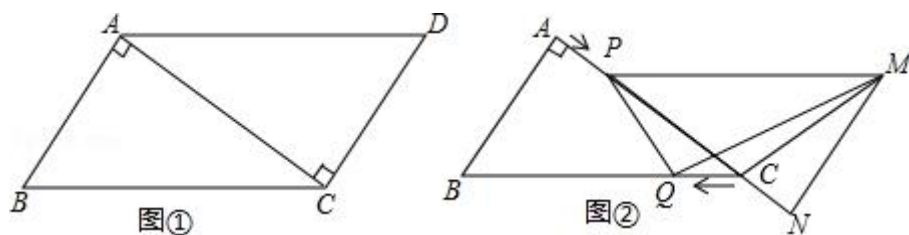
24. (12 分) (2015•青岛) 已知, 如图①, 在 $\square ABCD$ 中, $AB=3\text{cm}$, $BC=5\text{cm}$, $AC \perp AB$, $\triangle ACD$ 沿 AC 的方向匀速平移得到 $\triangle PNM$, 速度为 1cm/s ; 同时, 点 Q 从点 C 出发, 沿 CB 方向匀速移动, 速度为 1cm/s , 当 $\triangle PNM$ 停止平移时, 点 Q 也停止移动, 如图②, 设移动时间为 t (s) ($0 < t < 4$), 连接 PQ , MQ , MC , 解答下列问题:

(1) 当 t 为何值时, $PQ \parallel MN$?

(2) 设 $\triangle QMC$ 的面积为 y (cm^2), 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(3) 是否存在某一时刻 t , 使 $S_{\triangle QMC} : S_{\text{四边形} ABQP} = 1 : 4$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

(4) 是否存在某一时刻 t , 使 $PQ \perp MQ$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



考点: 相似形综合题.

分析: (1) 根据勾股定理求出 AC , 根据 $PQ \parallel AB$, 得出 $\frac{CP}{CA} = \frac{CQ}{CB}$, $\frac{4-t}{4} = \frac{t}{5}$, 求解即可;

(2) 过点 P 作 $PD \perp BC$ 于 D , 根据 $\triangle CPD \sim \triangle CBA$, 得出 $\frac{4-t}{5} = \frac{PD}{3}$, 求出 $PD = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}t$, 再根据 $S_{\triangle QMC} = S_{\triangle QPC}$, 得出 $y = S_{\triangle QMC} = \frac{1}{2}QC \cdot PD$, 再代入计算即可;

(3) 根据 $S_{\triangle QMC} : S_{\text{四边形}ABQP} = 1 : 4$, 得出 $S_{\triangle QPC} : S_{\triangle ABC} = 1 : 5$, 代入得出 $(\frac{6}{5}t - \frac{3}{10}t^2) : 6 = 1 : 5$, 再计算即可;

(4) 根据 $PQ \perp MQ$ 得出 $\triangle PDQ \sim \triangle MQP$, 得出 $PQ^2 = MP \cdot DQ$, 根据勾股定理得出 $PD^2 + DQ^2 = MP \cdot DQ$, 再分别代入得出 $(\frac{12-3t}{5})^2 + (\frac{16-9t}{5})^2 = 5 \times \frac{16-9t}{5}$, 求出 t 即可.

解答: 解: (1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4$,

由平移的性质得 $MN \parallel AB$,

$\therefore PQ \parallel MN$,

$\therefore PQ \parallel AB$,

$\therefore \frac{CP}{CA} = \frac{CQ}{CB}$,

$\therefore \frac{4-t}{4} = \frac{t}{5}$,

$$t = \frac{20}{9},$$

(2) 过点 P 作 $PD \perp BC$ 于 D ,

$$\because \triangle CPD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{CP}{CB} = \frac{PD}{BA},$$

$$\therefore \frac{4-t}{5} = \frac{PD}{3},$$

$$\therefore PD = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}t,$$

$$\because PD \parallel BC,$$

$$\therefore S_{\triangle QMC} = S_{\triangle QPC},$$

$$\therefore y = S_{\triangle QMC} = \frac{1}{2}QC \cdot PD = \frac{1}{2}t \left(\frac{12}{5} - \frac{3}{5}t \right) = \frac{6}{5}t - \frac{3}{10}t^2 \quad (0 < t < 4),$$

$$(3) \because S_{\triangle QMC} : S_{\text{四边形}ABQP} = 1 : 4,$$

$$\therefore S_{\triangle QPC} : S_{\text{四边形}ABQP} = 1 : 4,$$

$$\therefore S_{\triangle QPC} : S_{\triangle ABC} = 1 : 5,$$

$$\therefore \left(\frac{6}{5}t - \frac{3}{10}t^2 \right) : 6 = 1 : 5,$$

$$\therefore t = 2,$$

(4) 若 $PQ \perp MQ$,

则 $\angle PQM = \angle PDQ$,

$$\because \angle MPQ = \angle PQD,$$

$$\therefore \triangle PDQ \sim \triangle MQP,$$

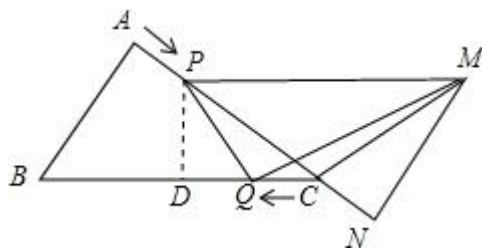
$$\therefore \frac{PQ}{MP} = \frac{DQ}{PQ},$$

$$\therefore PQ^2 = MP \cdot DQ,$$

$$\therefore PD^2 + DQ^2 = MP \cdot DQ,$$

$$\therefore CD = \frac{16 - 4t}{5},$$

$$\begin{aligned}\therefore DQ &= CD - CQ = \frac{16-4t}{5} - t = \frac{16-9t}{5}, \\ \therefore \left(\frac{12-3t}{5}\right)^2 + \left(\frac{16-9t}{5}\right)^2 &= 5 \times \frac{16-9t}{5}, \\ \therefore t_1 &= 0 \text{ (舍去)}, t_2 = \frac{3}{2}, \\ \therefore t &= \frac{3}{2} \text{ 时}, PQ \perp MQ.\end{aligned}$$



点评: 此题考查了相似形综合，用到的知识点是相似三角形的判定与性质、勾股定理、平行线的性质、三角形的面积，关键是根据题意画出图形，作出辅助线，构造相似三角形.