

山东省淄博市 2013 年中考数学试卷

一、选择题：本题共 12 小题，在每小题所给出的四个选项中，只有一个是正确的，每小题 4 分，错选、不选或选出的答案超过一个，均记零分.

1. (4 分) (2013•淄博) 9 的算术平方根是 ()

- A $\sqrt{3}$ B $\pm\sqrt{3}$ C 3 D ± 3

考点: 算术平方根.

分析: 根据算术平方根的定义求解即可.

解答: 解: $\because 3^2=9$,
 $\therefore 9$ 的算术平方根是 3.
 故选 C.

点评: 本题考查了算术平方根的定义，是基础题，熟记概念是解题的关键.

2. (4 分) (2013•淄博) 下列运算错误的是 ()

- A $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}=1$ B $\frac{-a-b}{a+b}=-1$
 C $\frac{0.5a+b}{0.2a-0.3b}=\frac{5a+10b}{2a-3b}$ D $\frac{a-b}{a+b}=\frac{b-a}{b+a}$

考点: 分式的基本性质.

分析: 根据分式的基本性质作答，分子分母同时扩大或缩小相同的倍数，分式的值不变，即可得出答案.

解答: 解: A、 $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=1$ ，故本选项正确；
 B、 $\frac{-a-b}{a+b}=-\frac{(a+b)}{a+b}=-1$ ，故本选项正确；
 C、 $\frac{0.5a+b}{0.2a-0.3b}=\frac{5a+10b}{2a-3b}$ ，故本选项正确；
 D、 $\frac{a-b}{a+b}=-\frac{b-a}{b+a}$ ，故本选项错误；
 故选 D.

点评: 此题考查了分式的基本性质，无论是把分式的分子和分母扩大还是缩小相同的倍数，都不要漏乘（除）分子、分母中的任何一项，且扩大（缩小）的倍数不能为 0.

3. (4 分) (2013•淄博) 把一根长 100cm 的木棍锯成两段，使其中一段的长比另一段的 2 倍少 5cm，则锯出的木棍的长不可能为 ()

- A 70cm B 65cm C 35cm D 35cm 或 65cm

考点: 一元一次方程的应用.

分析: 设一段为 x ，则另一段为 $2x - 5$ ，再由总长为 100cm ，可得出方程，解出即可.

解答: 解：设一段为 x ，则另一段为 $2x - 5$ ，

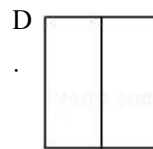
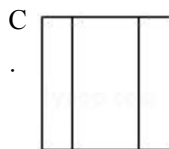
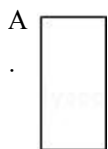
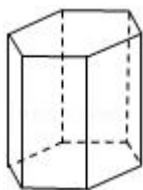
由题意得， $x + 2x - 5 = 100$ ，

解得： $x = 35$ ， $2x - 5 = 65$.

故选 A.

点评: 本题考查了一元一次方程的应用，解答本题的关键是设出未知数，根据总长为 100cm 得出方程，难度一般.

4. (4 分) (2013•淄博) 下面关于正六棱柱的视图 (主视图、左视图、俯视图) 中，画法错误的是 ()



考点: 简单组合体的三视图.

分析: 主视图，左视图，俯视图分别是 从物体的正面，左面，上面看得到的图形.

解答:

解：从上面看易得俯视图为：，

从左面看易得左视图为：

从正面看主视图为：

故选 A.

点评: 本题考查了几何体的三视图，解答本题的关键是掌握三视图的观察方向.

5. (4 分) (2013•淄博) 如果分式 $\frac{x^2 - 1}{2x + 2}$ 的值为 0，则 x 的值是 ()

A 1

B 0

C -1

D ± 1

考点: 分式的值为零的条件.

分析: 根据分式的值为零的条件可以求出 x 的值.

解答: 解: 由分式的值为零的条件得 $x^2 - 1 = 0$, $2x + 2 \neq 0$,

由 $x^2 - 1 = 0$, 得 $x = \pm 1$,

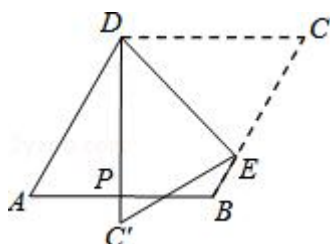
由 $2x + 2 \neq 0$, 得 $x \neq -1$,

综上, 得 $x = 1$.

故选 A.

点评: 本题考查了分式的值为零的条件: (1) 分子为 0; (2) 分母不为 0. 这两个条件缺一不可.

6. (4 分) (2013•淄博) 如图, 菱形纸片 ABCD 中, $\angle A = 60^\circ$, 折叠菱形纸片 ABCD, 使点 C 落在 DP (P 为 AB 中点) 所在的直线上, 得到经过点 D 的折痕 DE. 则 $\angle DEC$ 的大小为 ()



A 78°

B 75°

C 60°

D 45°

考点: 翻折变换 (折叠问题); 菱形的性质.

专题: 计算题.

分析: 连接 BD, 由菱形的性质及 $\angle A = 60^\circ$, 得到三角形 ABD 为等边三角形, P 为 AB 的中点, 利用三线合一得到 DP 为角平分线, 得到 $\angle ADP = 30^\circ$, $\angle ADC = 120^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, 进而求出 $\angle PDC = 90^\circ$, 由折叠的性质得到 $\angle CDE = \angle PDE = 45^\circ$, 利用三角形的内角和定理即可求出所求角的度数.

解答: 解: 连接 BD,

$\because$ 四边形 ABCD 为菱形, $\angle A = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形, $\angle ADC = 120^\circ$, $\angle C = 60^\circ$,

$\because$ P 为 AB 的中点,

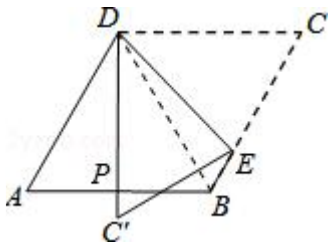
$\therefore$ DP 为 $\angle ADB$ 的平分线, 即 $\angle ADP = \angle BDP = 30^\circ$,

$\therefore \angle PDC = 90^\circ$,

$\therefore$ 由折叠的性质得到 $\angle CDE = \angle PDE = 45^\circ$,

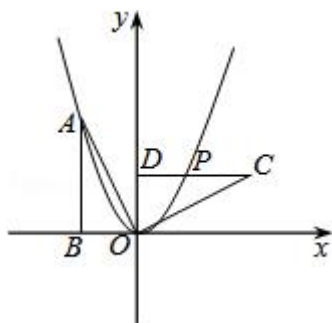
在 $\triangle DEC$ 中, $\angle DEC = 180^\circ - (\angle CDE + \angle C) = 75^\circ$.

故选 B.



点评: 此题考查了翻折变换 (折叠问题), 菱形的性质, 等边三角形的性质, 以及内角和定理, 熟练掌握折叠的性质是解本题的关键.

7. (4分) (2013•淄博) 如图, $\text{Rt}\triangle OAB$ 的顶点 $A(-2, 4)$ 在抛物线 $y=ax^2$ 上, 将 $\text{Rt}\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle OCD$, 边 CD 与该抛物线交于点 P , 则点 P 的坐标为 ()



- A $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ B $(2, 2)$ C $(\sqrt{2}, 2)$ D $(2, \sqrt{2})$

考点: 二次函数综合题.

专题: 综合题.

分析: 首先根据点 A 在抛物线 $y=ax^2$ 上求得抛物线的解析式和线段 OB 的长, 从而求得点 D 的坐标, 根据点 P 的纵坐标和点 D 的纵坐标相等得到点 P 的坐标即可;

解答: 解: $\because \text{Rt}\triangle OAB$ 的顶点 $A(-2, 4)$ 在抛物线 $y=ax^2$ 上,

$$\therefore 4=ax \cdot (-2)^2,$$

解得: $a=1$

$$\therefore \text{解析式为 } y=x^2,$$

$$\because \text{Rt}\triangle OAB \text{ 的顶点 } A(-2, 4),$$

$$\therefore OB=OD=2,$$

$\because \text{Rt}\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle OCD$,

$$\therefore CD \parallel x \text{ 轴},$$

$\therefore$ 点 D 和点 P 的纵坐标均为 2,

$$\therefore \text{令 } y=2, \text{ 得 } 2=x^2,$$

$$\text{解得: } x=\pm\sqrt{2},$$

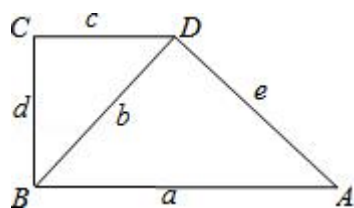
$\because$ 点 P 在第一象限,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为: } (\sqrt{2}, 2)$$

故选: C.

点评: 本题考查了二次函数的综合知识, 解题过程中首先求得直线的解析式, 然后再求得点 D 的纵坐标, 利用点 P 的纵坐标与点 D 的纵坐标相等代入函数的解析式求解即可.

8. (4分) (2013•淄博) 如图, 直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle C=90^\circ$, $\angle BDA=90^\circ$, $AB=a$, $BD=b$, $CD=c$, $BC=d$, $AD=e$, 则下列等式成立的是 ()



A $b^2=ac$

B $b^2=ce$

C $be=ac$

D $bd=ae$

考点: 相似三角形的判定与性质; 直角梯形.

分析: 根据 $\angle CDB = \angle DBA$, $\angle C = \angle BDA = 90^\circ$, 可判定 $\triangle CDB \sim \triangle DBA$, 利用对应边成比例, 即可判断各选项.

解答: 解: $\because CD \parallel AB$,

$$\therefore \angle CDB = \angle DBA,$$

$$\text{又} \because \angle C = \angle BDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CDB \sim \triangle DBA,$$

$$\therefore \frac{CD}{DB} = \frac{BC}{AD} = \frac{BD}{AB}, \text{ 即 } \frac{c}{b} = \frac{d}{e} = \frac{b}{a},$$

A、 $b^2 = ac$, 成立, 故本选项正确;

B、 $b^2 = ac$, 不是 $b^2 = ce$, 故本选项错误;

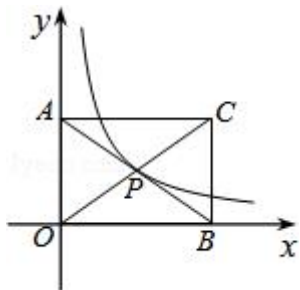
C、 $be = ad$, 不是 $be = ac$, 故本选项错误;

D、 $bd = ac$, 不是 $bd = ae$, 故本选项错误.

故选 A.

点评: 本题考查了相似三角形的判定与性质, 解答本题的关键是判断 $\triangle CDB \sim \triangle DBA$, 注意掌握相似三角形的对应边成比例.

9. (4分) (2013•淄博) 如图, 矩形 AOBC 的面积为 4, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象的一支经过矩形对角线的交点 P, 则该反比例函数的解析式是 ()



A $y = \frac{4}{x}$

B $y = \frac{2}{x}$

C $y = \frac{1}{x}$

D $y = \frac{1}{2x}$

考点: 反比例函数系数 k 的几何意义.

专题: 计算题.

分析: 作 $PE \perp x$ 轴, $PF \perp y$ 轴, 根据矩形的性质得矩形 OEPF 的面积 $= \frac{1}{4}$ 矩形 AOBC 的面积

$= \frac{1}{4} \times 4 = 1$, 然后根据反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 系数 k 的几何意义即可得到 $k = 1$.

解答: 解: 作 $PE \perp x$ 轴, $PF \perp y$ 轴, 如图,

$\because$ 点 P 为矩形 AOBC 对角线的交点,

$\therefore$ 矩形 OEPF 的面积 $= \frac{1}{4}$ 矩形 AOBC 的面积 $= \frac{1}{4} \times 4 = 1$,

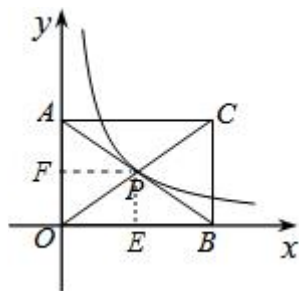
$$\therefore |k| = 1,$$

而 $k > 0$,

$$\therefore k = 1,$$

∴过 P 点的反比例函数的解析式为 $y = \frac{1}{x}$.

故选 C.



点评: 本题考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 系数 k 的几何意义: 从反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 图象上任意一点向 x 轴和 y 轴作垂线, 垂线与坐标轴所围成的矩形面积为 $|k|$.

10. (4 分) (2013•淄博) 如果 m 是任意实数, 则点 $P(m-4, m+1)$ 一定不在 ()
 A 第一象限 B 第二象限 C 第三象限 D 第四象限

考点: 点的坐标.

分析: 求出点 P 的纵坐标一定大于横坐标, 然后根据各象限的点的坐标特征解答.

解答: 解: ∵ $(m+1) - (m-4) = m+1 - m+4 = 5$,

∴点 P 的纵坐标一定大于横坐标,

∴第四象限的点的横坐标是正数, 纵坐标是负数,

∴第四象限的点的横坐标一定大于纵坐标,

∴点 P 一定不在第四象限.

故选 D.

点评: 本题考查了点的坐标, 记住各象限内点的坐标的符号是解决的关键, 四个象限的符号特点分别是: 第一象限 $(+, +)$; 第二象限 $(-, +)$; 第三象限 $(-, -)$; 第四象限 $(+, -)$.

11. (4 分) (2013•淄博) 假定鸟卵孵化后, 雏鸟为雌与雄的概率相同. 如果三枚卵全部成功孵化, 则三只雏鸟中恰有两只雌鸟的概率是 ()

A $\frac{1}{6}$

B $\frac{3}{8}$

C $\frac{5}{8}$

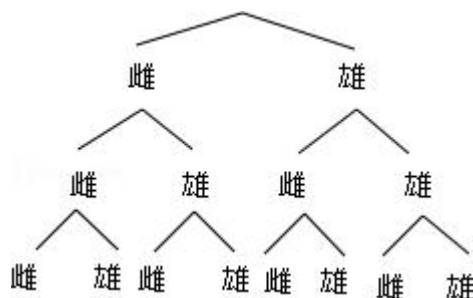
D $\frac{2}{3}$

考点: 列表法与树状图法.

专题: 计算题.

分析: 画树状图得出所有等可能的情况数, 找出恰有两只雌鸟的情况数, 即可求出所求的概率.

解答: 解: 画树状图, 如图所示:



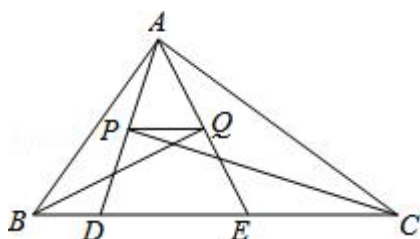
所有等可能的情况数有 8 种，其中三只雏鸟中恰有两只雌鸟的情况数有 3 种，

$$\text{则 } P = \frac{3}{8}.$$

故选 B.

点评: 此题考查了列表法与树状图法，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

12. (4 分) (2013•淄博) 如图， $\triangle ABC$ 的周长为 26，点 D, E 都在边 BC 上， $\angle ABC$ 的平分线垂直于 AE，垂足为 Q， $\angle ACB$ 的平分线垂直于 AD，垂足为 P，若 $BC=10$ ，则 PQ 的长为 ()



A $\frac{3}{2}$

B $\frac{5}{2}$

C 3

D 4

考点: 三角形中位线定理；等腰三角形的判定与性质.

分析: 首先判断 $\triangle BAE$ 、 $\triangle CAD$ 是等腰三角形，从而得出 $BA=BE$ ， $CA=CD$ ，由 $\triangle ABC$ 的周长为 26，及 $BC=10$ ，可得 $DE=6$ ，利用中位线定理可求出 PQ.

解答: 解：∵ BQ 平分 $\angle ABC$ ， $BQ \perp AE$ ，

∴ $\triangle BAE$ 是等腰三角形，

同理 $\triangle CAD$ 是等腰三角形，

∴ 点 Q 是 AE 中点，点 P 是 AD 中点 (三线合一)，

∴ PQ 是 $\triangle ADE$ 的中位线，

∵ $BE+CD=AB+AC=26 - BC=26 - 10=16$ ，

∴ $DE=BE+CD - BC=6$ ，

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}DE = 3.$$

故选 C.

点评: 本题考查了三角形的中位线定理，解答本题的关键是判断出 $\triangle BAE$ 、 $\triangle CAD$ 是等腰三角形，利用等腰三角形的性质确定 PQ 是 $\triangle ADE$ 的中位线.

二、填空题: 本题共 5 小题，满分 20 分. 只要求填写最后结果，每小题填对得 4 分.

13. (4 分) (2013•淄博) 当实数 $a < 0$ 时， $6+a$ < $6-a$ (填“<”或“>”).

考点: 不等式的性质.

分析: $a < 0$ 时, 则 $a < -a$, 在不等式两边同时加上 6 即可得到.

解答: 解: $\because a < 0$,

$$\therefore a < -a,$$

在不等式两边同时加上 6, 得: $6+a < 6-a$.

故答案是: $<$.

点评: 本题考查了不等式的基本性质, 理解 $6+a < 6-a$ 是如何变化得到的是关键.

14. (4 分) (2013•淄博) 请写出一个概率小于 $\frac{1}{2}$ 的随机事件: 掷一个骰子, 向上一面的点数为 2.

考点: 概率公式.

专题: 开放型.

分析: 根据概率公式 $P(A) = \frac{n}{n}$, 再结合本题题意, 写出符合要求的事件即可, 答案不唯一.

解答: 解: 根据题意得:

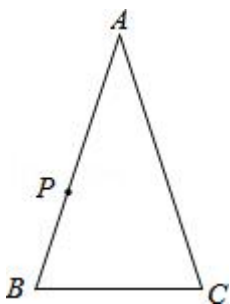
概率小于 $\frac{1}{2}$ 的随机事件如:

掷一个骰子, 向上一面的点数为 2;

故答案为: 掷一个骰子, 向上一面的点数为 2.

点评: 此题考查了概率公式, 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

15. (4 分) (2013•淄博) 在 $\triangle ABC$ 中, P 是 AB 上的动点 (P 异于 A, B), 过点 P 的一条直线截 $\triangle ABC$, 使截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 我们不妨称这种直线为过点 P 的 $\triangle ABC$ 的相似线. 如图, $\angle A = 36^\circ$, $AB = AC$, 当点 P 在 AC 的垂直平分线上时, 过点 P 的 $\triangle ABC$ 的相似线最多有 3 条.



考点: 相似三角形的判定; 线段垂直平分线的性质.

专题: 新定义.

分析: 根据相似三角形的判定方法分别利用平行线以及垂直平分线的性质得出对应角相等即可得出.

解答: 解: 当 $PD \parallel BC$ 时, $\triangle APD \sim \triangle ABC$,

当 $PE \parallel AC$ 时, $\triangle BPE \sim \triangle BAC$,

连接 PC,

$\because \angle A = 36^\circ$, $AB = AC$, 点 P 在 AC 的垂直平分线上,

$\therefore AP = PC$, $\angle ABC = \angle ACB = 72^\circ$,

$\therefore \angle ACP = \angle PAC = 36^\circ$,

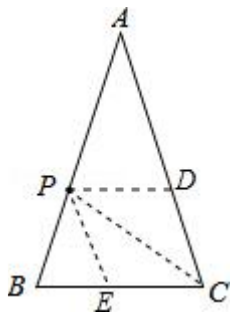
$\therefore \angle PCB = 36^\circ$,

$\therefore \angle B = \angle B$, $\angle PCB = \angle A$,

$\therefore \triangle CPB \sim \triangle ACB$,

故过点 P 的 $\triangle ABC$ 的相似线最多有 3 条.

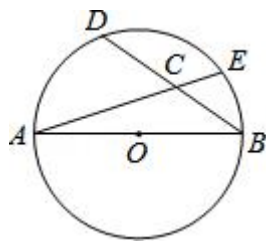
故答案为: 3.



点评: 此题主要考查了相似三角形的判定, 正确掌握相似三角形的判定方法作出辅助线是解题关键.

16. (4 分) (2013·淄博) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\widehat{AD} = \widehat{DE}$, $AB = 5$, $BD = 4$, 则 $\sin \angle ECB =$

$\frac{4}{5}$.



考点: 相似三角形的判定与性质; 圆周角定理; 锐角三角函数的定义

分析: 连接 AD, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中利用勾股定理求出 AD, 证明 $\triangle DAC \sim \triangle DBA$, 利用对应边成比例的知识, 可求出 CD、AC, 继而根据 $\sin \angle ECB = \sin \angle DCA = \frac{AD}{AC}$ 即可得出答案.

解答: 解: 连接 AD, 则 $\angle ADB = 90^\circ$,
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB = 5$, $BD = 4$,

$$\text{则 } AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 3,$$

$$\because \widehat{AD} = \widehat{DE},$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DBA,$$

$$\therefore \triangle DAC \sim \triangle DBA,$$

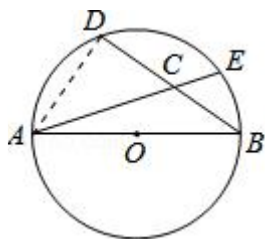
$$\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore CD = \frac{9}{4},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \frac{15}{4},$$

$$\therefore \sin \angle ECB = \sin \angle DCA = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{5}.$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.



点评: 本题考查了相似三角形的判定与性质, 解答本题的关键是作出辅助线, 证明 $\triangle DAC \sim \triangle DBA$, 求出 CD、AD 的长度, 难度一般.

17. (4 分) (2013•淄博) 如下表, 从左到右在每个小格中都填入一个整数, 使得任意三个相邻格子所填整数之和都相等, 则第 2013 个格子中的整数是 -2.

-4	a	b	c	6	b			-2		...
----	---	---	---	---	---	--	--	----	--	-----

考点: 规律型: 数字的变化类.

分析: 根据三个相邻格子的整数的和相等列式求出 a、c 的值, 再根据第 9 个数是 -2 可得 $b = -2$, 然后找出格子中的数每 3 个为一个循环组依次循环, 在用 2013 除以 3, 根据余数的情况确定与第几个数相同即可得解.

解答: 解: $\because$ 任意三个相邻格子中所填整数之和都相等,

$$\therefore -4 + a + b = a + b + c,$$

$$\text{解得 } c = -4,$$

$$a + b + c = b + c + 6,$$

$$\text{解得 } a = 6,$$

所以, 数据从左到右依次为 -4、6、b、-4、6、b,

第 9 个数与第三个数相同, 即 $b = -2$,

所以, 每 3 个数“-4、6、-2”为一个循环组依次循环,

$$\therefore 2013 \div 3 = 671,$$

$\therefore$ 第 2013 个格子中的整数与第 3 个格子中的数相同, 为 -2.

故答案为: -2.

点评: 此题主要考查了数字变化规律, 仔细观察排列规律求出 a、b、c 的值, 从而得到其规律是解题的关键.

三、解答题: 本大题共 7 小题, 共 52 分. 解答要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (5 分) (2013•淄博) 解方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$.

考点: 解二元一次方程组.

专题: 计算题.

分析: 先用加减消元法求出 y 的值, 再用代入消元法求出 x 的值即可.

解答: 解: $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \text{ ①} \\ x + 2y = -2 \text{ ②} \end{cases}$,

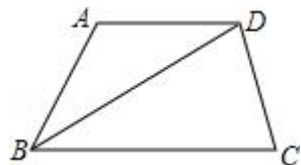
① $- 2 \times$ ② 得, $-7y = 7$, 解得 $y = -1$;

把 $y = -1$ 代入 ② 得, $x + 2 \times (-1) = -2$, 解得 $x = 0$,

故此方程组的解为: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.

点评: 本题考查的是解二元一次方程组, 熟知解二元一次方程组的加减消元法和代入消元法是解答此题的关键.

19. (5 分) (2013•淄博) 如图, $AD \parallel BC$, BD 平分 $\angle ABC$. 求证: $AB = AD$.



考点: 等腰三角形的判定与性质; 平行线的性质.

专题: 证明题.

分析: 根据 $AD \parallel BC$, 可求证 $\angle ADB = \angle DBC$, 利用 BD 平分 $\angle ABC$ 和等量代换可求证 $\angle ABD = \angle ADB$, 然后即可得出结论.

解答: 证明: $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle ADB = \angle DBC$,
 $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore \angle ABD = \angle DBC$,
 $\therefore \angle ABD = \angle ADB$,
 $\therefore AB = AD$.

点评: 此题主要考查学生对等腰三角形的判定与性质和平行线性质的理解和掌握, 此题很简单, 属于基础题.

20. (8 分) (2013•淄博) 某中学积极开展跳绳活动, 体育委员统计了全班同学 1 分钟跳绳的次数, 并列出了频数分布表:

次数	$60 \leq x < 80$	$80 \leq x < 100$	$100 \leq x < 120$	$120 \leq x < 140$	$140 \leq x < 160$	$160 \leq x < 180$
频数	5	6	14	9		4

(1) 跳绳次数 x 在 $120 \leq x < 140$ 范围的同学占全班同学的 20%, 在答题卡中完成上表;

(2) 画出适当的统计图, 表示上面的信息.

考点: 频数（率）分布表；频数（率）分布直方图.

分析: (1) 根据跳绳次数 x 在 $120 \leq x < 140$ 范围的同学占全班同学的 20%，求出总人数，再用总人数减去各段的频数，即可求出在 $140 \leq x < 160$ 的频数；

(2) 根据表中提供的数据，从而画出直方图即可.

解答: 解：(1) $\because$ 跳绳次数 x 在 $120 \leq x < 140$ 范围的同学占全班同学的 20%，

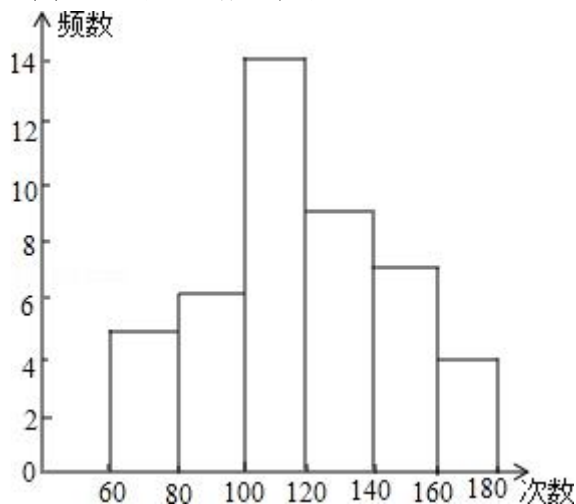
$\therefore$ 总人数是 $9 \div 20\% = 45$ (人)，

$\therefore$ 在 $140 \leq x < 160$ 的频数是： $45 - 5 - 6 - 14 - 9 - 4 = 7$ (人)，

补表如下：

次数	$60 \leq x < 80$	$80 \leq x < 100$	$100 \leq x < 120$	$120 \leq x < 140$	$140 \leq x < 160$	$160 \leq x < 180$
频数	5	6	14	9	7	4

(2) 根据表中的数据，补图如下：



点评: 此题考查了频率分布直方图，解题的关键是根据频数、频率之间的关系，求出总人数，要能从统计表中获得有关信息，列出算式.

21. (8分) (2013•淄博) 关于 x 的一元二次方程 $(a-6)x^2 - 8x + 9 = 0$ 有实根.

(1) 求 a 的最大整数值；

(2) 当 a 取最大整数值时，①求出该方程的根；②求 $2x^2 - \frac{32x-7}{x^2-8x+11}$ 的值.

考点: 根的判别式；解一元二次方程-公式法

分析: (1) 根据一元二次方程的定义和根的判别式得到 $\Delta = 64 - 4 \times (a-6) \times 9 \geq 0$ 且 $a-6 \neq 0$,

解得 $a \leq \frac{70}{9}$ 且 $a \neq 6$ ，然后在次范围内找出最大的整数；

(2) ①把 a 的值代入方程得到 $x^2 - 8x + 9 = 0$ ，然后利用求根公式法求解；

②由于 $x^2 - 8x + 9 = 0$ 则 $x^2 - 8x = -9$ ，然后把 $x^2 - 8x = -9$ 整体代入所求的代数式中得到原式 $= 2x^2 - \frac{32x-7}{-9+11} = 2x^2 - 16x + \frac{7}{2}$ ，再变形得到 $2(x^2 - 8x) + \frac{7}{2}$ ，再利用整体思想计算即可.

解答: 解：(1) 根据题意 $\Delta = 64 - 4 \times (a-6) \times 9 \geq 0$ 且 $a-6 \neq 0$,

解得 $a \leq \frac{70}{9}$ 且 $a \neq 6$,

所以 a 的最大整数值为 7;

(2) ①当 $a=7$ 时, 原方程变形为 $x^2 - 8x + 9 = 0$,

$$\Delta = 64 - 4 \times 9 = 28,$$

$$\therefore x = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2},$$

$$\therefore x_1 = 4 + \sqrt{7}, \quad x_2 = 4 - \sqrt{7};$$

$$\textcircled{2} \because x^2 - 8x + 9 = 0,$$

$$\therefore x^2 - 8x = -9,$$

$$\text{所以原式} = 2x^2 - \frac{32x - 7}{-9 + 11}$$

$$= 2x^2 - 16x + \frac{7}{2}$$

$$= 2(x^2 - 8x) + \frac{7}{2}$$

$$= 2 \times (-9) + \frac{7}{2}$$

$$= -\frac{29}{2}.$$

点评: 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$: 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根. 也考查了一元二次方程的定义和解法以及整体思想.

22. (8 分) (2013·淄博) 分别以 $\square ABCD$ ($\angle CDA \neq 90^\circ$) 的三边 AB , CD , DA 为斜边作等腰直角三角形, $\triangle ABE$, $\triangle CDG$, $\triangle ADF$.

(1) 如图 1, 当三个等腰直角三角形都在该平行四边形外部时, 连接 GF , EF . 请判断 GF 与 EF 的关系 (只写结论, 不需证明);

(2) 如图 2, 当三个等腰直角三角形都在该平行四边形内部时, 连接 GF , EF , (1) 中结论还成立吗? 若成立, 给出证明; 若不成立, 说明理由.

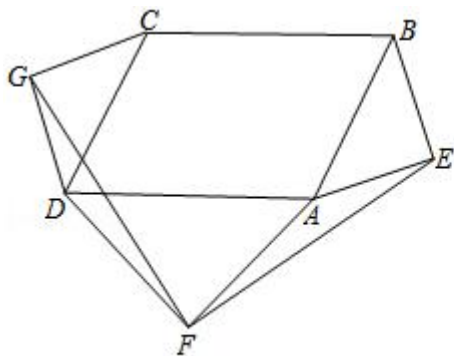


图 1

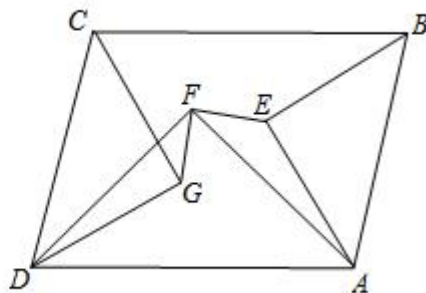


图 2

考点: 平行四边形的性质; 全等三角形的判定与性质; 等腰直角三角形

分析: (1) 根据等腰直角三角形的性质以及平行四边形的性质得出 $\angle FDG = \angle EAF$, 进而得出 $\triangle EAF \cong \triangle GDF$ 即可得出答案;

(2) 根据等腰直角三角形的性质以及平行四边形的性质得出 $\angle FDG = \angle EAF$, 进而得

出 $\triangle EAF \cong \triangle GDF$ 即可得出答案.

解答: 解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB=CD, \angle DAB+\angle ADC=180^\circ,$$

$\because \triangle ABE, \triangle CDG, \triangle ADF$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore DG=CG=AE=BE, DF=AF, \angle CDG=\angle ADF=\angle BAE=45^\circ,$$

$$\therefore \angle GDF=\angle GDC+\angle CDA+\angle ADF=90^\circ+\angle CDA,$$

$$\angle EAF=360^\circ-\angle BAE-\angle DAF-\angle BAD=270^\circ-(180^\circ-\angle CDA)=90^\circ+\angle CDA,$$

$$\therefore \angle FDG=\angle EAF,$$

$\because$ 在 $\triangle EAF$ 和 $\triangle GDF$ 中,

$$\begin{cases} DF=AF \\ \angle FDG=\angle FAE, \\ DG=AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle GDF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF=FG, \angle EFA=\angle DFG, \text{ 即 } \angle GFD+\angle GFA=\angle EFA+\angle GFA,$$

$$\therefore \angle GFE=90^\circ,$$

$$\therefore GF \perp EF;$$

(2) $GF \perp EF, GF=EF$ 成立;

理由: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB=CD, \angle DAB+\angle ADC=180^\circ,$$

$\because \triangle ABE, \triangle CDG, \triangle ADF$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore DG=CG=AE=BE, DF=AF, \angle CDG=\angle ADF=\angle BAE=45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE+\angle FDA+\angle EAF+\angle ADF+\angle FDC=180^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF+\angle CDF=45^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF+\angle GDF=45^\circ,$$

$$\therefore \angle FDG=\angle EAF,$$

$\because$ 在 $\triangle EAF$ 和 $\triangle GDF$ 中,

$$\begin{cases} DF=AF \\ \angle FDG=\angle FAE, \\ DG=AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle GDF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF=FG, \angle EFA=\angle DFG, \text{ 即 } \angle GFD+\angle GFA=\angle EFA+\angle GFA,$$

$$\therefore \angle GFE=90^\circ,$$

$$\therefore GF \perp EF.$$

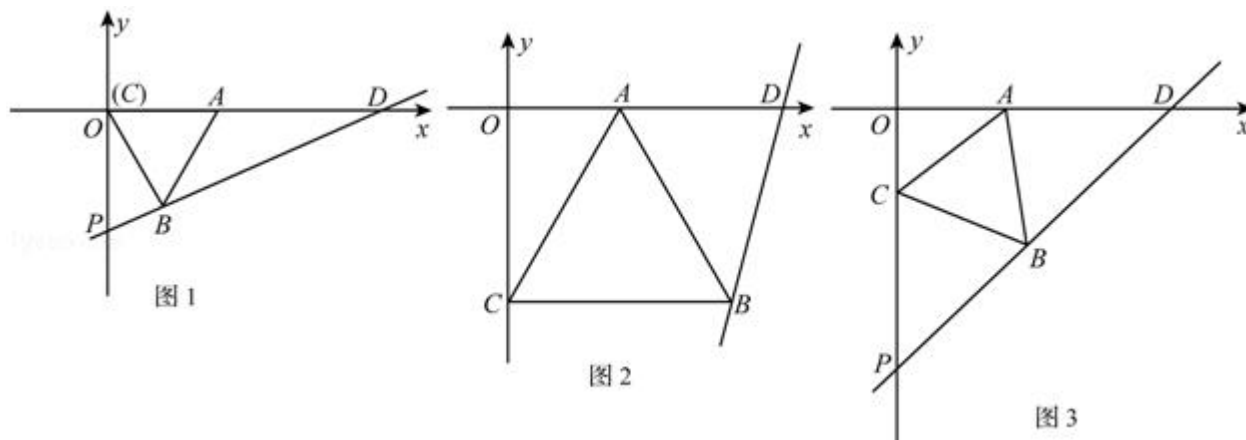
点评: 此题主要考查了平行四边形的性质以及全等三角形的判定与性质和等腰直角三角形的性质等知识, 根据已知得出 $\triangle EAF \cong \triangle GDF$ 是解题关键.

23. (9 分) (2013•淄博) $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 A 与点 D 的坐标分别是 A (4, 0), D (10, 0).

(1) 如图 1, 当点 C 与点 O 重合时, 求直线 BD 的解析式;

(2) 如图 2, 点 C 从点 O 沿 y 轴向下移动, 当以点 B 为圆心, AB 为半径的 $\odot B$ 与 y 轴相切 (切点为 C) 时, 求点 B 的坐标;

(3) 如图 3, 点 C 从点 O 沿 y 轴向下移动, 当点 C 的坐标为 $C(0, -2\sqrt{3})$ 时, 求 $\angle ODB$ 的正切值.



考点: 一次函数综合题.

分析: (1) 先根据等边三角形的性质求出 B 点的坐标, 直接运用待定系数法就可以求出直线 BD 的解析式;

(2) 作 $BE \perp x$ 轴于 E, 就可以得出 $\angle AEB = 90^\circ$, 由圆的切线的性质就可以得出 B 的纵坐标, 由直角三角形的性质就可以求出 B 点的横坐标, 从而得出结论;

(3) 以点 B 为圆心, AB 为半径作 $\odot B$, 交 y 轴于点 C、E, 过点 B 作 $BF \perp CE$ 于 F, 连接 AE. 根据等边三角形的性质圆心角与圆周角之间的关系及勾股定理就可以求出点 B 的坐标, 作 $BQ \perp x$ 轴于点 Q, 根据正切值的意义就可以求出结论.

解答: 解: (1) $\because A(4, 0)$,

$$\therefore OA = 4,$$

$$\therefore \text{等边三角形 } ABC \text{ 的高就为 } 2\sqrt{3},$$

$$\therefore B(2, -2\sqrt{3}).$$

设直线 BD 的解析式为 $y = kx + b$, 由题意, 得

$$\begin{cases} 2k + b = -2\sqrt{3} \\ 10k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ b = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 BD 的解析式为: } y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{5\sqrt{3}}{2};$$

(2) 作 $BE \perp x$ 轴于 E,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ.$$

$\therefore$ 以 AB 为半径的 $\odot S$ 与 y 轴相切于点 C,

$\therefore BC \perp y$ 轴.

$$\therefore \angle OCB = 90^\circ$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle ACB=60^\circ, \\
&\therefore \angle ACO=30^\circ, \\
&\therefore AC=2OA. \\
&\because A(4, 0), \\
&\therefore OA=4, \\
&\therefore AC=8, \\
&\therefore \text{由勾股定理得: } OC=4\sqrt{3}. \\
&\text{作 } BE \perp x \text{ 轴于 } E, \\
&\therefore AE=4, \\
&\therefore OE=8, \\
&\therefore B(8, -4\sqrt{3});
\end{aligned}$$

(3) 如图 3, 以点 B 为圆心, AB 为半径作 $\odot B$, 交 y 轴于点 C、E, 过点 B 作 $BF \perp CE$ 于 F, 连接 AE.

$$\begin{aligned}
&\because \triangle ABC \text{ 是等边三角形,} \\
&\therefore AC=BC=AB, \angle ABC=\angle ACB=\angle BAC=60^\circ, \\
&\therefore \angle OEA=\frac{1}{2}\angle ABC=30^\circ, \\
&\therefore AE=2OA. \\
&\because A(4, 0), \\
&\therefore OA=4, \\
&\therefore AE=8.
\end{aligned}$$

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中, 由勾股定理, 得 $OE=4\sqrt{3}$.

$$\because C(0, -2\sqrt{3}),$$

$$\therefore OC=2\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, 由勾股定理, 得 $AC=2\sqrt{7}$.

$$\therefore CE=OE-OC=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

$$\because BF \perp CE,$$

$$\therefore CF=\frac{1}{2}CE=\sqrt{3},$$

$$\therefore OF=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$$

在 $\text{Rt}\triangle CFB$ 中, 由勾股定理, 得 $BF^2=BC^2-CF^2$,
 $=28-3=25,$

$$\therefore BF=5,$$

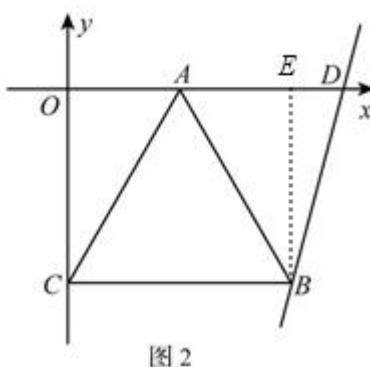
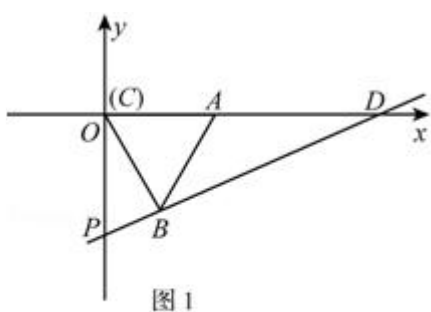
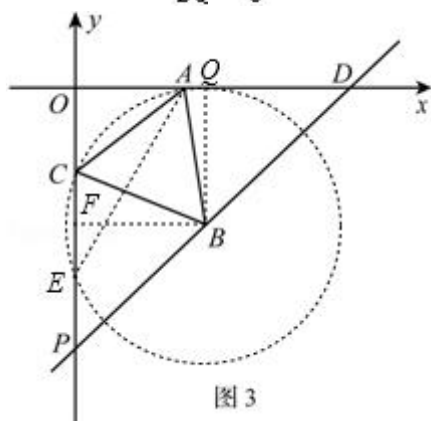
$$\therefore B(5, -3\sqrt{3}).$$

过点 B 作 $BQ \perp x$ 轴于点 Q,

$$\therefore BQ=3\sqrt{3}, OQ=5,$$

$$\therefore DQ=5,$$

$$\therefore \tan \angle ODB = \frac{BQ}{DQ} = \frac{3\sqrt{3}}{5}.$$



点评: 本题考查了等边三角形的性质的运用, 勾股定理的运用, 待定系数法求一次函数的解析式的运用, 圆周角与圆心角的关系定理的运用, 切线的性质的运用及直角三角形的性质的运用, 解答时灵活运用勾股定理求线段的值是关键.

24. (9分) (2013·淄博) 矩形纸片 ABCD 中, $AB=5$, $AD=4$.

(1) 如图 1, 四边形 MNEF 是在矩形纸片 ABCD 中裁剪出的一个正方形. 你能否在该矩形中裁剪出一个面积最大的正方形, 最大面积是多少? 说明理由;

(2) 请用矩形纸片 ABCD 剪拼成一个面积最大的正方形. 要求: 在图 2 的矩形 ABCD 中画出裁剪线, 并在网格中画出用裁剪出的纸片拼成的正方形示意图 (使正方形的顶点都在网格的格点上).

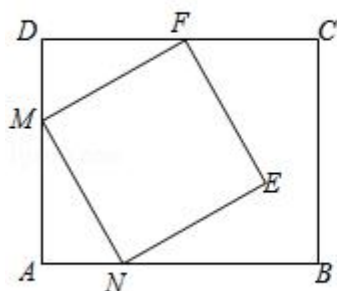


图 1

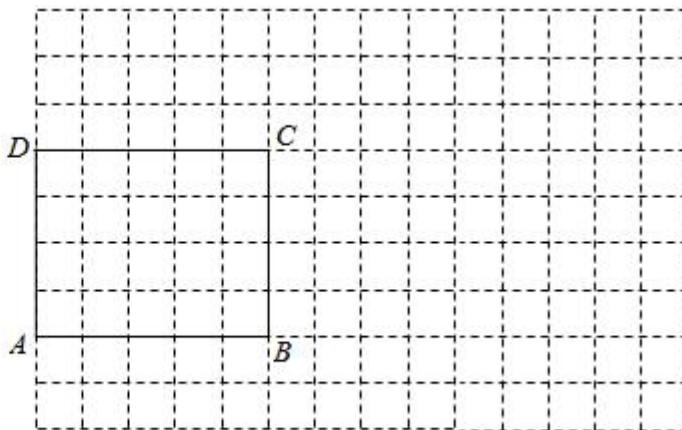


图 2

考点: 四边形综合题.

分析: (1) 设 $AM=x$ ($0 \leq x \leq 4$) 则 $MD=4-x$, 根据正方形的性质就可以得出 $Rt\triangle ANM \cong Rt\triangle DMF$. 根据正方形的面积就可以表示出解析式, 由二次函数的性质就可以求出其最值;

(2) 先将矩形纸片分割成 4 个全等的直角三角形和两个矩形如图, 根据赵爽弦图的构图方法就可以拼成正方形.

解答: 解: (1) 正方形的最大面积是 16. 设 $AM=x$ ($0 \leq x \leq 4$), 则 $MD=4-x$.

$\because$ 四边形 MNEF 是正方形,

$\therefore MN=MF$, $\angle AMN + \angle FMD = 90^\circ$.

$\because \angle AMN + \angle ANM = 90^\circ$,

$\therefore \angle ANM = \angle FMD$.

$\therefore$ 在 $\triangle ANM$ 和 $\triangle DMF$ 中

$$\begin{cases} \angle A = \angle D \\ \angle ANM = \angle FMD, \\ MN = FM \end{cases}$$

$\therefore \triangle ANM \cong \triangle DMF$ (AAS).

$\therefore DM = AN$.

$\therefore S_{\text{正方形 MNEF}} = MN^2 = AM^2 + AN^2$,

$= x^2 + (4-x)^2$,

$= 2(x-2)^2 + 8$

$\because$ 函数 $S_{\text{正方形 MNEF}} = 2(x-2)^2 + 8$ 的开口向上,

对称轴是 $x=2$,

在对称轴的左侧 S 随 x 的增大而减小, 在对称轴的右侧 S 随 x 的增大而增大,

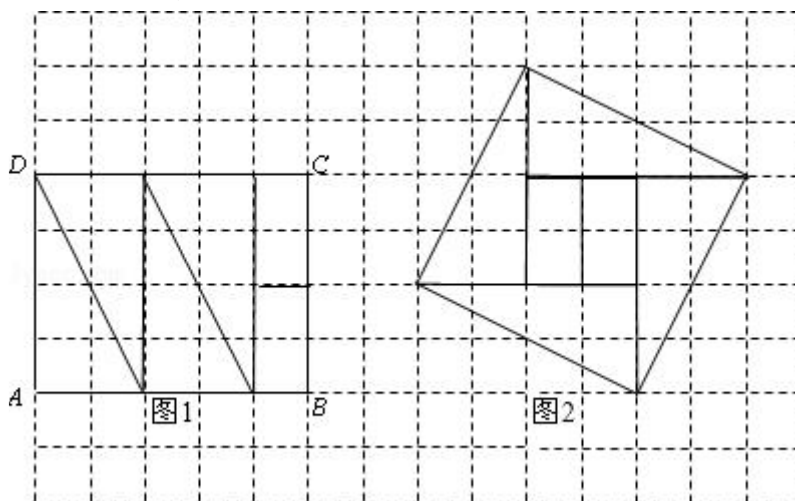
$\because 0 \leq x \leq 4$,

$\therefore$ 当 $x=0$ 或 $x=4$ 时,

正方形 MNEF 的面积最大.

最大值是 16.

(2) 先将矩形纸片 ABCD 分割成 4 个全等的直角三角形和两个矩形如图 1, 然后拼成如图 2 的正方形.



点评: 本题考查了全等三角形的判定及性质的运用, 勾股定理的运用, 二次函数的解析式的

运用，拼图的运用，在解答本题时由正方形的性质建立二次函数是求最值的关键.