

天津市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 计算 $(-3)^2$ 的结果等于（ ）

A. 5 B. -5 C. 9 D. -9

【答案】C

【解析】分析：根据有理数的乘方运算进行计算.

详解： $(-3)^2=9$,

故选 C.

点睛：本题考查了有理数的乘方，比较简单，注意负号.

2. $\cos 30^\circ$ 的值等于（ ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】分析：根据特殊角的三角函数值直接求解即可.

详解： $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：B.

点睛：本题考查特殊角的三角函数值的记忆情况. 特殊角三角函数值计算在中考中经常出现，要熟练掌握.

3. 今年“五一”假期，我市某主题公园共接待游客 77800 人次，将 77800 用科学计数法表示为（ ）

A. 0.778×10^5 B. 7.78×10^4 C. 77.8×10^3 D. 778×10^2

【答案】B

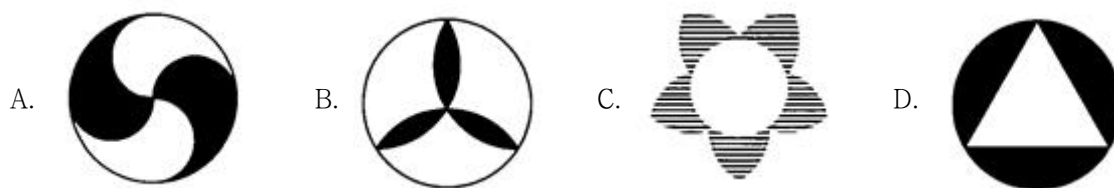
【解析】分析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

详解：将 77800 用科学记数法表示为： 7.78×10^4 .

故选 B.

点睛：本题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 下列图形中，可以看作是中心对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】分析：根据中心对称的定义，结合所给图形即可作出判断.

详解：A、是中心对称图形，故本选项正确；

B、不是中心对称图形，故本选项错误；

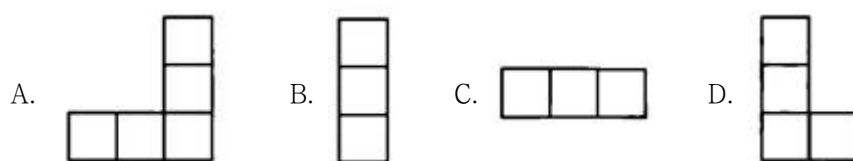
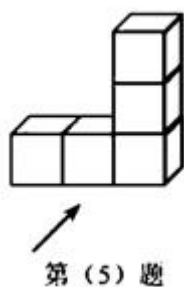
C、不是中心对称图形，故本选项错误；

D、不是中心对称图形，故本选项错误；

故选：A.

点睛：本题考查了中心对称图形的特点，属于基础题，判断中心对称图形的关键是旋转 180° 后能够重合.

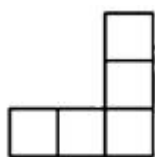
5. 下图是一个由 5 个相同的正方体组成的立体图形，它的主视图是 ()



【答案】A

【解析】分析：画出从正面看到的图形即可得到它的主视图.

详解：这个几何体的主视图为：



故选：A.

点睛：本题考查了简单组合体的三视图：画简单组合体的三视图要循序渐进，通过仔细观察和想象，再画

它的三视图.

6. 估计 $\sqrt{65}$ 的值在 ()

A. 5 和 6 之间 B. 6 和 7 之间

C. 7 和 8 之间 D. 8 和 9 之间

【答案】D

【解析】分析：利用“夹逼法”表示出 $\sqrt{65}$ 的大致范围，然后确定答案.

详解： $\because 64 < 65 < 81$,

$\therefore 8 < \sqrt{65} < 9$,

故选：D.

点睛：本题主要考查了无理数的估算，解题关键是确定无理数的整数部分即可解决问题

7. 计算 $\frac{2x+3}{x+1} - \frac{2x}{x+1}$ 的结果为 ()

A. 1 B. 3 C. $\frac{3}{x+1}$ D. $\frac{x+3}{x+1}$

【答案】C

【解析】分析：根据同分母的分式的运算法则进行计算即可求出答案.

详解：原式 $=\frac{2x+3-2x}{x+1} = \frac{3}{x+1}$.

故选：C.

点睛：本题考查分式的运算法则，解题的关键是熟练运用分式的运算法则，本题属于基础题型.

8. 方程组 $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+y=16 \end{cases}$ 的解是 ()

A. $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$

【答案】A

【解析】分析：根据加减消元法，可得方程组的解.

详解： $\begin{cases} x+y=10 \text{ ①} \\ 2x+y=16 \text{ ②} \end{cases}$ ，

①-②得

$x=6$,

把 $x=6$ 代入①，得

$y=4$,

原方程组的解为 $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$.

故选 A.

点睛：本题考查了解二元一次方程组，利用加减消元法是解题关键.

9. 若点 $A(x_1, -6)$, $B(x_2, -2)$, $C(x_3, 2)$ 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图像上, 则 x_1 , x_2 , x_3 的大小关系是 ()

A. $x_1 < x_2 < x_3$ B. $x_2 < x_1 < x_3$ C. $x_2 < x_3 < x_1$ D. $x_3 < x_2 < x_1$

【答案】B

【解析】分析：先根据反比例函数的解析式判断出函数图象所在的象限，再根据A、B、C三点横坐标的特点判断出三点所在的象限，由函数的增减性及四个象限内点的横纵坐标的特点即可解答.

详解：∵反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 中， $k=12>0$,

∴此函数的图象在一、三象限，在每一象限内 y 随 x 的增大而减小，

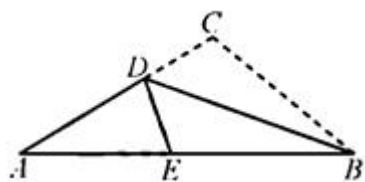
∵ $y_1 < y_2 < 0 < y_3$,

∴ $x_2 < x_1 < x_3$.

故选：B.

点睛：本题比较简单，考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，解答此题的关键是熟知反比例函数的增减性.

10. 如图，将一个三角形纸片ABC沿过点B的直线折叠，使点C落在AB边上的点E处，折痕为BD，则下列结论一定正确的是 ()



A. $AD = BD$ B. $AE = AC$
C. $ED + EB = DB$ D. $AE + CB = AB$

【答案】D

【解析】分析：由折叠的性质知， $BC=BE$. 易得 $AE + CB = AB$.

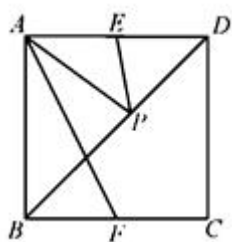
详解：由折叠的性质知， $BC=BE$.

∴ $AE + CB = AB$.

故选：D.

点睛：本题利用了折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，根据轴对称的性质，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等.

11. 如图，在正方形ABCD中，E，F分别为AD，BC的中点，P为对角线BD上的一个动点，则下列线段的长等于AP+EP最小值的是（ ）

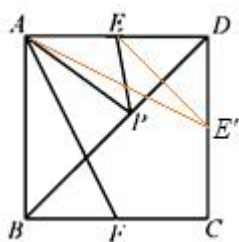


- A. AB B. DE C. BD D. AF

【答案】D

【解析】分析：点E关于BD的对称点E'在线段CD上，得E'为CD中点，连接AE'，它与BD的交点即为点P，PA+PE的最小值就是线段AE'的长度；通过证明直角三角形ADE'≌直角三角形ABF即可得解.

详解：过点E作关于BD的对称点E'，连接AE'，交BD于点P.



∴PA+PE的最小值AE'；

∵E为AD的中点，

∴E'为CD的中点，

∵四边形ABCD是正方形，

∴AB=BC=CD=DA， $\angle ABF = \angle ADE' = 90^\circ$ ，

∴DE'=BF，

∴ $\triangle ABF \cong \triangle ADE'$ ，

∴AE'=AF.

故选D.

点睛：本题考查了轴对称--最短路线问题、正方形的性质. 此题主要是利用“两点之间线段最短”和“任意两边之和大于第三边”. 因此只要作出点A(或点E)关于直线BD的对称点A'(或E')，再连接EA'(或AE')即可.

12. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 经过点 $(-1,0)$, $(0,3)$, 其对称轴在 y 轴右侧, 有下列结论:

①抛物线经过点 $(1,0)$;

②方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 有两个不相等的实数根;

③ $-3 < a + b < 3$.

其中, 正确结论的个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】C

【解析】分析: 根据抛物线的对称性可以判断①错误, 根据条件得抛物线开口向下, 可判断②正确; 根据抛物线与 x 轴的交点及对称轴的位置, 可判断③正确, 故可得解.

详解: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 经过点 $(-1,0)$, 其对称轴在 y 轴右侧, 故抛物线不能经过点 $(1,0)$, 因此①错误;

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 经过点 $(-1,0)$, $(0,3)$, 其对称轴在 y 轴右侧, 可知抛物线开口向下, 与直线 $y=2$ 有两个交点, 因此方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 有两个不相等的实数根, 故②正确;

$\because$ 对称轴在 y 轴右侧,

$$\therefore \frac{b}{2a} > 0$$

$$\because a < 0$$

$$\therefore b > 0$$

$$\because y = ax^2 + bx + c \text{ 经过点 } (-1, 0),$$

$$\therefore a - b + c = 0$$

$$\because y = ax^2 + bx + c \text{ 经过点 } (0, 3),$$

$$\therefore c = 3$$

$$\therefore a - b = -3$$

$$\therefore b = a + 3, \quad a = b - 3$$

$$\therefore -3 < a < 0, \quad 0 < b < 3$$

$$\therefore -3 < a + b < 3. \text{ 故③正确.}$$

故选 C.

点睛: 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征, 二次函数图象与系数的关系, 二次函数与一元二次方程的关系, 不等式的性质等知识, 难度适中.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

13. 计算 $2x^4 \cdot x^3$ 的结果等于_____.

【答案】 $2x^7$

【解析】 分析: 依据单项式乘单项式的运算法则进行计算即可.

详解: 原式 $=2x^{4+3}=2x^7$.

故答案为: $2x^7$.

点睛: 本题主要考查的是单项式乘单项式, 掌握相关运算法则是解题的关键.

14. 计算 $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$ 的结果等于_____.

【答案】 3

【解析】 分析: 先运用平方差公式把括号展开, 再根据二次根式的性质计算可得.

详解: 原式 $= (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2$

$=6-3$

$=3,$

故答案为: 3.

点睛: 本题考查了二次根式的混合运算的应用, 熟练掌握平方差公式与二次根式的性质是关键.

15. 不透明袋子中装有 11 个球, 其中有 6 个红球, 3 个黄球, 2 个绿球, 这些球除颜色外无其他差别. 从袋子中随机取出 1 个球, 则它是红球的概率是_____.

【答案】 $\frac{6}{11}$

【解析】 分析: 根据概率的求法, 找准两点: ①全部情况的总数; ②符合条件的情况数目; 二者的比值就是其发生的概率.

详解: $\because$ 袋子中共有 11 个小球, 其中红球有 6 个,

$\therefore$ 摸出一个球是红球的概率是 $\frac{6}{11}$,

故答案为: $\frac{6}{11}$.

点睛: 此题主要考查了概率的求法, 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

16. 将直线 $y = x$ 向上平移 2 个单位长度, 平移后直线的解析式为_____.

【答案】 $y = x + 2$

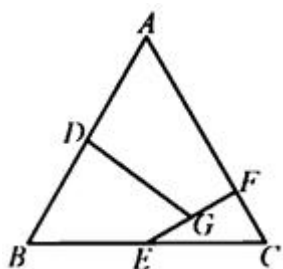
【解析】 分析: 直接根据“上加下减, 左加右减”的平移规律求解即可.

详解：将直线 $y=x$ 先向上平移 2 个单位，所得直线的解析式为 $y=x+2$.

故答案为 $y=x+2$.

点睛：本题考查图形的平移变换和函数解析式之间的关系，在平面直角坐标系中，平移后解析式有这样一个规律“左加右减，上加下减”.

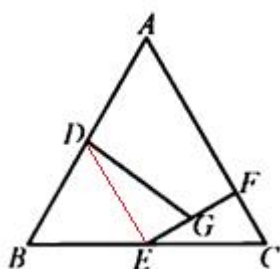
17. 如图，在边长为 4 的等边 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别为 AB、BC 的中点， $EF \perp AC$ 于点 F，G 为 EF 的中点，连接 DG，则 DG 的长为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{19}}{2}$

【解析】分析：连接 DE，根据题意可得 $\triangle DEG$ 是直角三角形，然后根据勾股定理即可求解 DG 的长.

详解：连接 DE，



$\because$ D、E 分别是 AB、BC 的中点，

$\therefore DE \parallel AC$ ， $DE = \frac{1}{2}AC$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，且 $BC=4$

$\therefore \angle DEB = 60^\circ$ ， $DE=2$

$\because EF \perp AC$ ， $\angle C = 60^\circ$ ， $EC=2$

$\therefore \angle FEC = 30^\circ$ ， $EF = \sqrt{3}$

$\therefore \angle DEG = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

$\because$ G 是 EF 的中点，

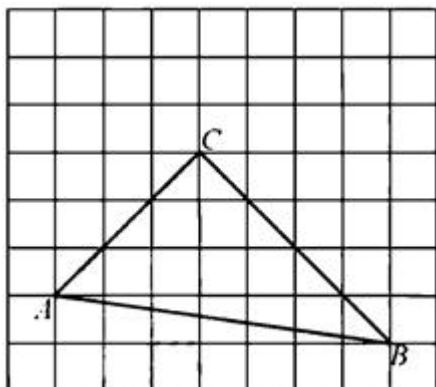
$\therefore EG = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{在 Rt}\triangle DEG \text{ 中, } DG=\sqrt{DE^2+EG^2}=\sqrt{2^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

点睛: 本题主要考查了等边三角形的性质, 勾股定理以及三角形中位线性性质定理, 记住和熟练运用性质是解题的关键.

18. 如图, 在每个小正方形的边长为 1 的网格中, $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 均在格点上.



(1) $\angle ACB$ 的大小为_____ (度);

(2) 在如图所示的网格中, P 是 BC 边上任意一点. A 为中心, 取旋转角等于 $\angle BAC$, 把点 P 逆时针旋转, 点 P 的对应点为 P'. 当 CP' 最短时, 请用无刻度的直尺, 画出点 P', 并简要说明点 P' 的位置是如何找到的 (不要求证明)

_____.

【答案】 (1). 90° ; (2). 见解析

【解析】 分析: (1) 利用勾股定理即可解决问题;

(2) 如图, 取格点 D, E, 连接 DE 交 AB 于点 T; 取格点 M, N, 连接 MN 交 BC 延长线于点 G; 取格点 F, 连接 FG 交 TC 延长线于点 P', 则点 P' 即为所求.

详解: (1) $\because$ 每个小正方形的边长为 1,

$$\therefore AC=3\sqrt{2}, BC=4\sqrt{2}, AB=5\sqrt{2},$$

$$\therefore (3\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 50 = (5\sqrt{2})^2$$

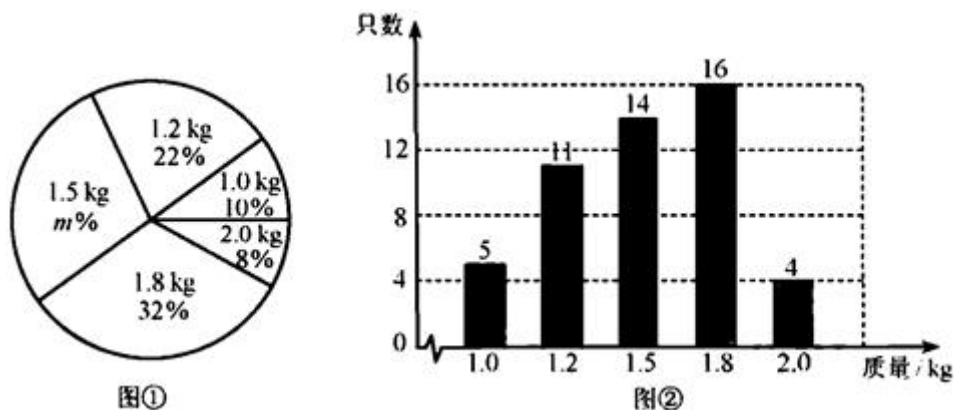
$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle C=90^\circ$

故答案为 90° ;

(2) 如图, 即为所求.

20. 某养鸡场有 2500 只鸡准备对外出售.从中随机抽取了一部分鸡, 根据它们的质量 (单位: kg), 绘制出如下的统计图①和图②.请根据相关信息, 解答下列问题:



(I) 图①中m的值为_____;

(II) 求统计的这组数据的平均数、众数和中位数;

(III) 根据样本数据, 估计这 2500 只鸡中, 质量为2.0kg的约有多少只?

【答案】(I) 28. (II) 平均数是 1.52. 众数为 1.8. 中位数为 1.5. (III) 280 只.

【解析】分析: (I) 用整体 1 减去所有已知的百分比即可求出 m 的值;

(II) 根据众数、中位数、加权平均数的定义计算即可;

(III) 用总数乘以样本中 2.0kg 的鸡所占的比例即可得解.

解: (I) $m\% = 1 - 22\% - 10\% - 8\% - 32\% = 28\%$. 故 $m = 28$;

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{1.0 \times 5 + 1.2 \times 11 + 1.5 \times 14 + 1.8 \times 16 + 2.0 \times 4}{5 + 11 + 14 + 16 + 4} = 1.52,$$

$\therefore$ 这组数据的平均数是 1.52.

$\therefore$ 在这组数据中, 1.8 出现了 16 次, 出现的次数最多,

$\therefore$ 这组数据的众数为 1.8.

$\therefore$ 将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个数都是 1.5, 有 $\frac{1.5 + 1.5}{2} = 1.5$,

$\therefore$ 这组数据的中位数为 1.5.

(III) $\therefore$ 在所抽取的样本中, 质量为2.0kg的数量占8%.

$\therefore$ 由样本数据, 估计这 2500 只鸡中, 质量为2.0kg的数量约占8%.

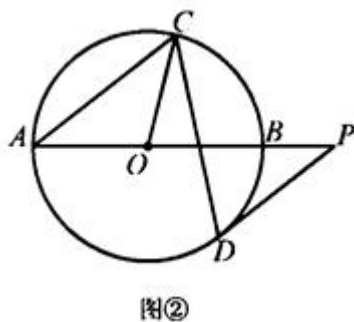
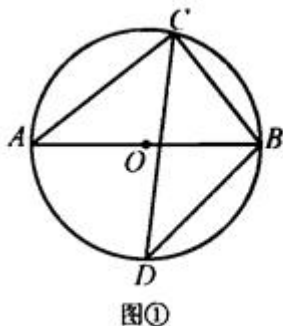
有 $2500 \times 8\% = 200$.

$\therefore$ 这 2500 只鸡中, 质量为2.0kg的约有 200 只.

点睛: 此题主要考查了平均数、众数、中位数的统计意义以及利用样本估计总体等知识. 找中位数要把数

据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数或两个数的平均数为中位数；众数是一组数据中出现次数最多的数据，注意众数可以不止一个；平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数.

21. 已知AB是 $\odot O$ 的直径，弦CD与AB相交， $\angle BAC = 38^\circ$.



(I) 如图①，若D为AB的中点，求 $\angle ABC$ 和 $\angle ABD$ 的大小；

(II) 如图②，过点D作 $\odot O$ 的切线，与AB的延长线交于点P，若 $DP \parallel AC$ ，求 $\angle OCD$ 的大小.

【答案】(1) 52° , 45° ; (2) 26°

【解析】分析：(I) 运用直径所对的圆周角是直角以及圆周角的度数等于它所对弧的度数求解即可；

(II) 运用圆周角定理求解即可.

详解：(I) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径， $\therefore \angle ACB = 90^\circ$.

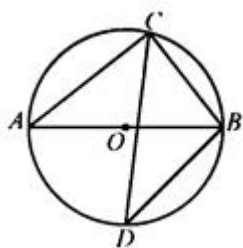
$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle BAC = 38^\circ, \therefore \angle ABC = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ.$$

由D为AB的中点，得 $\overline{AD} = \overline{BD}$.

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD = 45^\circ.$$



(II) 如图，连接OD.

$\because DP$ 切 $\odot O$ 于点D,

$$\therefore OD \perp DP, \text{ 即 } \angle ODP = 90^\circ.$$

由 $DP \parallel AC$ ，又 $\angle BAC = 38^\circ$,

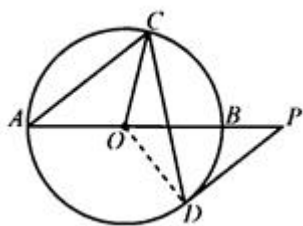
$\therefore \angle AOD$ 是 $\triangle ODP$ 的外角,

$$\therefore \angle AOD = \angle ODP + \angle P = 128^\circ.$$

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = 64^\circ.$$

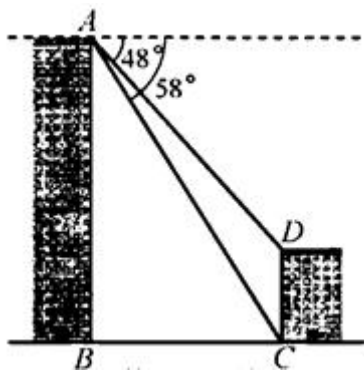
又 $OA = OC$, 得 $\angle ACO = \angle A = 38^\circ$.

$$\therefore \angle OCD = \angle ACD - \angle ACO = 64^\circ - 38^\circ = 26^\circ.$$



点睛：本题考查了圆周角定理，切线的性质以及等腰三角形的性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

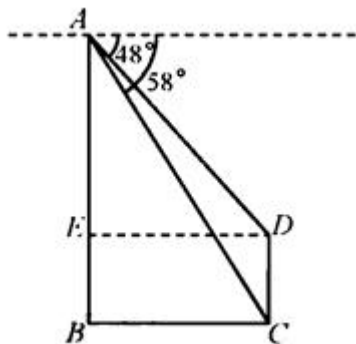
22. 如图，甲、乙两座建筑物的水平距离 BC 为 78m ，从甲的顶部 A 处测得乙的顶部 D 处的俯角为 48° ，测得底部 C 处的俯角为 58° ，求甲、乙建筑物的高度 AB 和 DC （结果取整数）. 参考数据： $\tan 48^\circ \approx 1.11$ ， $\tan 58^\circ \approx 1.60$.



【答案】甲建筑物的高度 AB 约为 125m ，乙建筑物的高度 DC 约为 38m .

【解析】分析：首先分析图形：根据题意构造直角三角形；本题涉及两个直角三角形，应利用其公共边构造关系式，进而可求出答案.

详解：如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，垂足为 E .



则 $\angle AED = \angle BED = 90^\circ$.

由题意可知, $BC = 78$, $\angle ADE = 48^\circ$, $\angle ACB = 58^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle DCB = 90^\circ$.

可得四边形BCDE为矩形.

$$\therefore ED = BC = 78, DC = EB.$$

$$\text{在Rt} \triangle ABC \text{中}, \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC},$$

$$\therefore AB = BC \cdot \tan 58^\circ \approx 78 \times 1.60 \approx 125.$$

$$\text{在Rt} \triangle AED \text{中}, \tan \angle ADE = \frac{AE}{ED},$$

$$\therefore AE = ED \cdot \tan 48^\circ.$$

$$\therefore EB = AB - AE = BC \cdot \tan 58^\circ \approx 78 \times 1.60 - 78 \times 1.11 \approx 38.$$

$$\therefore DC = EB \approx 38.$$

答: 甲建筑物的高度AB约为125m, 乙建筑物的高度DC约为38m.

点睛: 本题考查解直角三角形的应用--仰角俯角问题, 首先构造直角三角形, 再借助角边关系、三角函数的定义解题, 难度一般.

23. 某游泳馆每年夏季推出两种游泳付费方式. 方式一: 先购买会员证, 每张会员证 100 元, 只限本人当年使用, 凭证游泳每次再付费 5 元; 方式二: 不购买会员证, 每次游泳付费 9 元.

设小明计划今年夏季游泳次数为 x (x 为正整数).

(I) 根据题意, 填写下表:

游泳次数	10	15	20	...	x
方式一的总费用 (元)	150	175		...	
方式二的总费用 (元)	90	135		...	

(II) 若小明计划今年夏季游泳的总费用为 270 元, 选择哪种付费方式, 他游泳的次数比较多?

(III) 当 $x > 20$ 时, 小明选择哪种付费方式更合算? 并说明理由.

【答案】(I) 200, $5x + 100$, 180, $9x$. (II) 小明选择方式一游泳次数比较多. (III) 当 $20 < x < 25$ 时, 有 $y > 0$, 小明选择方式二更合算; 当 $x > 25$ 时, 有 $y < 0$, 小明选择方式一更合算.

【解析】分析: (I) 根据题意得两种付费方式, 进行填表即可;

(II) 根据(1)知两种方式的关系, 列出方程求解即可;

(III) 当 $x > 20$ 时, 作差比较即可得解.

详解: (I) 200, $5x + 100$, 180, $9x$.

(II) 方式一: $5x + 100 = 270$, 解得 $x = 34$.

方式二: $9x = 270$, 解得 $x = 30$.

$\therefore 34 > 30$,

$\therefore$ 小明选择方式一游泳次数比较多.

(III) 设方式一与方式二的总费用的差为 y 元.

则 $y = (5x + 100) - 9x$, 即 $y = -4x + 100$.

当 $y = 0$ 时, 即 $-4x + 100 = 0$, 得 $x = 25$.

$\therefore$ 当 $x = 25$ 时, 小明选择这两种方式一样合算.

$\therefore -4 < 0$,

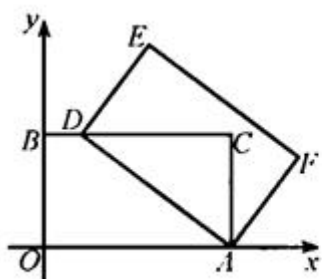
$\therefore y$ 随 x 的增大而减小.

$\therefore$ 当 $20 < x < 25$ 时, 有 $y > 0$, 小明选择方式二更合算;

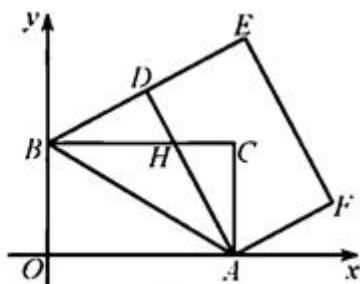
当 $x > 25$ 时, 有 $y < 0$, 小明选择方式一更合算.

点睛: 本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用一次函数的性质解答.

24. 在平面直角坐标系中, 四边形 $AOBC$ 是矩形, 点 $O(0,0)$, 点 $A(5,0)$, 点 $B(0,3)$. 以点 A 为中心, 顺时针旋转矩形 $AOBC$, 得到矩形 $ADEF$, 点 O, B, C 的对应点分别为 D, E, F .



图①



图②

(I) 如图①, 当点 D 落在 BC 边上时, 求点 D 的坐标;

(II) 如图②, 当点 D 落在线段 BE 上时, AD 与 BC 交于点 H .

①求证 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$;

②求点 H 的坐标.

(III) 记 K 为矩形 $AOBC$ 对角线的交点, S 为 $\triangle KDE$ 的面积, 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可).

【答案】(I) 点 D 的坐标为 $(1,3)$. (II) ①证明见解析; ②点 H 的坐标为 $(\frac{17}{5}, 3)$. (III) $\frac{30-3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30+3\sqrt{34}}{4}$.

【解析】分析：（Ⅰ）根据旋转的性质得 $AD=AO=5$ ，设 $CD=x$ ，在直角三角形 ACD 中运用勾股定理可 CD 的值，从而可确定 D 点坐标；

（Ⅱ）①根据直角三角形全等的判定方法进行判定即可；

②由①知 $\angle BAD = \angle BAO$ ，再根据矩形的性质得 $\angle CBA = \angle OAB$ ，从而 $\angle BAD = \angle CBA$ ，故 $BH=AH$ ，在 $Rt\triangle ACH$ 中，运用勾股定理可求得 AH 的值，进而求得答案；

$$(III) \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4}.$$

详解：（Ⅰ） $\because$ 点 $A(5,0)$ ，点 $B(0,3)$ ，

$$\therefore OA = 5, OB = 3.$$

$\therefore$ 四边形 $AOBC$ 是矩形，

$$\therefore AC = OB = 3, BC = OA = 5, \angle OBC = \angle C = 90^\circ.$$

$\therefore$ 矩形 $ADEF$ 是由矩形 $AOBC$ 旋转得到的，

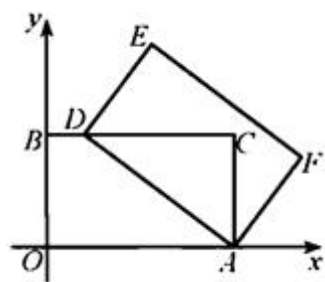
$$\therefore AD = AO = 5.$$

在 $Rt\triangle ADC$ 中，有 $AD^2 = AC^2 + DC^2$ ，

$$\therefore DC = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

$$\therefore BD = BC - DC = 1.$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1,3)$.



（Ⅱ）①由四边形 $ADEF$ 是矩形，得 $\angle ADE = 90^\circ$ 。

又点 D 在线段 BE 上，得 $\angle ADB = 90^\circ$ 。

由（Ⅰ）知， $AD = AO$ ，又 $AB = AB$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ，

$$\therefore Rt\triangle ADB \cong Rt\triangle AOB.$$

②由 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$ ，得 $\angle BAD = \angle BAO$ 。

又在矩形 $AOBC$ 中， $OA \parallel BC$ ，

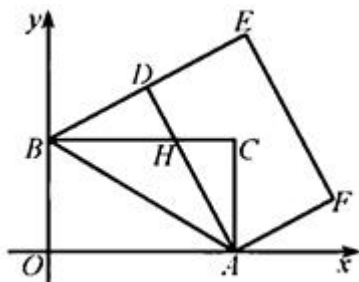
$$\therefore \angle CBA = \angle OAB. \therefore \angle BAD = \angle CBA. \therefore BH = AH.$$

设 $BH = t$, 则 $AH = t$, $HC = BC - BH = 5 - t$.

在 $Rt \triangle AHC$ 中, 有 $AH^2 = AC^2 + HC^2$,

$$\therefore t^2 = 3^2 + (5 - t)^2. \text{解得 } t = \frac{17}{5}. \therefore BH = \frac{17}{5}.$$

$\therefore$ 点 H 的坐标为 $(\frac{17}{5}, 3)$.



$$(III) \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4}.$$

点睛: 本大题主要考查了等腰三角形的判定和性质, 勾股定理以及旋转变换的性质等知识, 灵活运用勾股定理求解是解决本题的关键.

25. 在平面直角坐标系中, 点 $O(0,0)$, 点 $A(1,0)$. 已知抛物线 $y = x^2 + mx - 2m$ (m 是常数), 定点为 P .

(I) 当抛物线经过点 A 时, 求定点 P 的坐标;

(II) 若点 P 在 x 轴下方, 当 $\angle AOP = 45^\circ$ 时, 求抛物线的解析式;

(III) 无论 m 取何值, 该抛物线都经过定点 H . 当 $\angle AHP = 45^\circ$ 时, 求抛物线的解析式.

【答案】(I) $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$; (II) $y = x^2 - 10x + 20$; (III) $y = x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{28}{5}$ 或 $y = x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{44}{3}$.

【解析】分析: (I) 把点 $A(1, 0)$ 代入 $y = x^2 + mx - 2m$ 求出 m 的值, 从而确定二次函数解析式, 进而求出顶点 P 的坐标;

(II) 先由函数解析式得出顶点坐标为 $(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2 + 8m}{4})$. 再结合已知条件可知 $IPQ = OQ$, 从而求出 $m_1 = 0$, $m_2 = -10$. 再进行分类讨论得到抛物线解析式为 $y = x^2 - 10x + 20$;

(III) 由 $y = x^2 + mx - 2m = (x - 2)m + x^2$ 可知, 定点 H 的坐标为 $(2, 4)$, 过点 A 作 $AD \perp AH$, 交射线 HP 于点 D , 分别过点 D, H 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 E, G , 则可证 $\triangle ADE \cong \triangle HAG$. 得点 D 的坐标为 $(-3, 1)$ 或 $(5, -1)$. 然后进行分类讨论即可求解.

详解: (I) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + mx - 2m$ 经过点 $A(1, 0)$,

$$\therefore 0 = 1 + m - 2m, \text{解得 } m = 1.$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 + x - 2.$$

$$\because y = x^2 + x - 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4},$$

$$\therefore \text{顶点P的坐标为}(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}).$$

$$(\text{II}) \text{ 抛物线 } y = x^2 + mx - 2m \text{ 的顶点P的坐标为 } (-\frac{m}{2}, -\frac{m^2 + 8m}{4}).$$

由点A(1,0)在x轴正半轴上, 点P在x轴下方, $\angle AOP = 45^\circ$, 知点P在第四象限.

过点P作PQ $\perp$ x轴于点Q, 则 $\angle POQ = \angle OPQ = 45^\circ$.

$$\text{可知 } PQ = OQ, \text{ 即 } \frac{m^2 + 8m}{4} = -\frac{m}{2}, \text{ 解得 } m_1 = 0, m_2 = -10.$$

当 $m = 0$ 时, 点P不在第四象限, 舍去.

$$\therefore m = -10.$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = x^2 - 10x + 20.$$

$$(\text{III}) \text{ 由 } y = x^2 + mx - 2m = (x - 2)m + x^2 \text{ 可知,}$$

当 $x = 2$ 时, 无论 m 取何值, y 都等于4.

得点H的坐标为(2,4).

过点A作AD $\perp$ AH, 交射线HP于点D, 分别过点D, H作x轴的垂线, 垂足分别为E, G, 则 $\angle DEA = \angle AGH = 90^\circ$.

$$\because \angle DAH = 90^\circ, \angle AHD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADH = 45^\circ. \therefore AH = AD.$$

$$\because \angle DAE + \angle HAG = \angle AHG + \angle HAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AHG.$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle HAG.$$

$$\therefore DE = AG = 1, AE = HG = 4.$$

可得点D的坐标为(-3,1)或(5,-1).

$$\text{当点D的坐标为}(-3,1)\text{时, 可得直线DH的解析式为 } y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}.$$

$$\because \text{点P}(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2 + 8m}{4})\text{在直线 } y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}\text{上,}$$

$$\therefore -\frac{m^2 + 8m}{4} = \frac{3}{5} \times (-\frac{m}{2}) + \frac{14}{5}. \text{解得 } m_1 = -4, m_2 = -\frac{14}{5}.$$

$$\text{当 } m = -4 \text{ 时, 点P与点H重合, 不符合题意, } \therefore m = -\frac{14}{5}.$$

当点D的坐标为(5,-1)时,

$$\text{可得直线DH的解析式为 } y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3}.$$

$\therefore$ 点 $P(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2+8m}{4})$ 在直线 $y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3}$ 上,

$$\therefore -\frac{m^2+8m}{4} = -\frac{5}{3} \times (-\frac{m}{2}) + \frac{22}{3} \text{ 解得 } m_1 = -4 \text{ (舍)}, m_2 = -\frac{22}{3}.$$

$$\therefore m = -\frac{22}{3}.$$

综上, $m = -\frac{14}{5}$ 或 $m = -\frac{22}{3}$.

故抛物线解析式为 $y = x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{28}{5}$ 或 $y = x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{44}{3}$.

点睛: 这是一道关于二次函数的综合题. 解题的关键是学会用待定系数法求二次函数关系式以及用分类讨论的思想思考问题.