

2012 年四川省南充市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

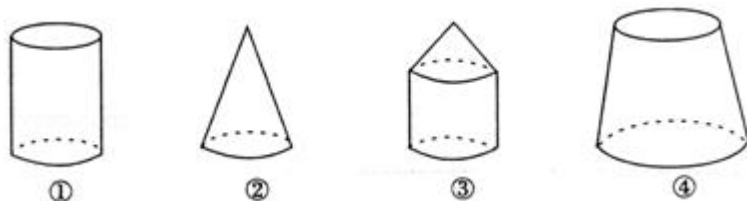
1. (3 分) 计算： $2 - (-3)$ 的结果是 ()

- A. 5 B. 1 C. -1 D. -5

2. (3 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $x^3 + x^3 = x^6$ B. $m^2 \cdot m^3 = m^6$ C. $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$ D. $\sqrt{14} \times \sqrt{7} = 7\sqrt{2}$

3. (3 分) 下列几何体中，俯视图相同的是 ()



- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ②④

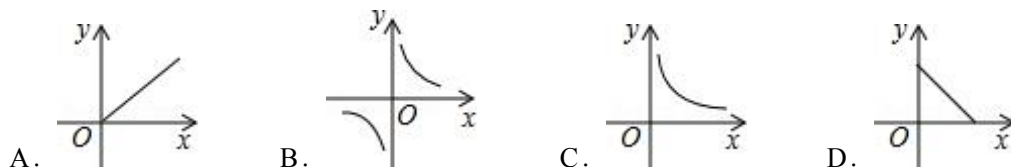
4. (3 分) 下列函数中，是正比例函数的是 ()

- A. $y = -8x$ B. $y = \frac{-8}{x}$ C. $y = 5x^2 + 6$ D. $y = -0.5x - 1$

5. (3 分) 方程 $x(x-2) + x - 2 = 0$ 的解是 ()

- A. 2 B. -2, 1 C. -1 D. 2, -1

6. (3 分) 矩形的长为 x ，宽为 y ，面积为 9，则 y 与 x 之间的函数关系式用图象表示大致为 ()



7. (3 分) 在一次中学生田径运动会上，参加男子跳高的 15 名运动员的成绩如下表所示：

成绩 (m)	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80
人数	1	2	4	3	3	2

这些运动员跳高成绩的中位数和众数分别是 ()

- A. 1.65, 1.70 B. 1.70, 1.70 C. 1.70, 1.65 D. 3, 4

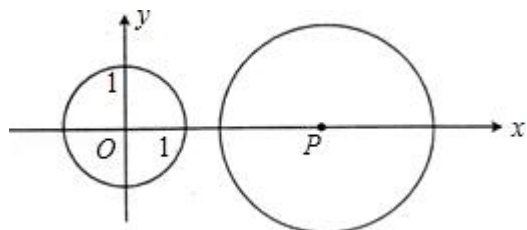
8. (3 分) 在函数 $y = \frac{\sqrt{1-2x}}{x - \frac{1}{2}}$ 中，自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \neq \frac{1}{2}$ B. $x \leq \frac{1}{2}$ C. $x < \frac{1}{2}$ D. $x \geq \frac{1}{2}$

9. (3分) 若一个圆锥的侧面积是底面积的2倍, 则圆锥侧面展开图的扇形的圆心角为()

- A. 120° B. 180° C. 240° D. 300°

10. (3分) 如图, 平面直角坐标系中, $\odot O$ 的半径长为1, 点 $P(a, 0)$, $\odot P$ 的半径长为2, 把 $\odot P$ 向左平移, 当 $\odot P$ 与 $\odot O$ 相切时, a 的值为()



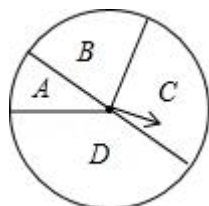
- A. 3 B. 1 C. 1, 3 D. $\pm 1, \pm 3$

二、填空题 (本大题共4个小题, 每小题3分, 共12分) 请将答案直接填在题中横线上

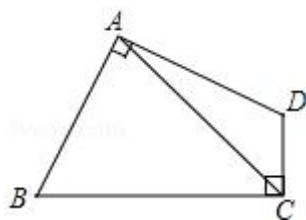
11. (3分) 不等式 $x+2 > 6$ 的解集为_____.

12. (3分) 分解因式: $x^2 - 4x - 12 =$ _____.

13. (3分) 如图, 把一个圆形转盘按 1: 2: 3: 4 的比例分成 A、B、C、D 四个扇形区域, 自由转动转盘, 停止后指针落在 B 区域的概率为_____.



14. (3分) 如图, 四边形 ABCD 中, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = AD$, 若四边形 ABCD 的面积为 24cm^2 , 则 AC 长是_____cm.



三、(本大题共3个小题, 每小题6分, 共18分)

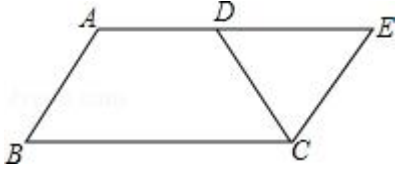
15. (6分) 计算: $\frac{a}{a+1} + \frac{a-1}{a^2-1}$.

16. (6分) 在一个口袋中有4个完全相同的小球, 把它们分别标号为1、2、3、4, 随机地摸取一个小球然后放回, 再随机地摸出一个小球, 求下列事件的概率:

- (1) 两次取的小球的标号相同;
(2) 两次取的小球的标号的和等于4.

17. (6分) 如图, 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 是 AD 延长线上的一点, 且 $CE = CD$.

求证: $\angle B = \angle E$.



四、(本大题共 2 个小题, 每小题 8 分, 共 16 分))

18. (8分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m - 1 = 0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 .

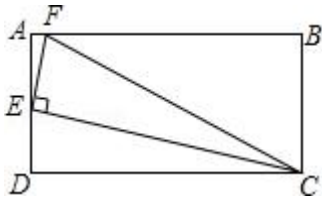
(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 $2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 10 = 0$, 求 m 的值.

19. (8分) 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2AD$, E 为 AD 的中点, $EF \perp EC$ 交 AB 于点 F , 连接 FC .

(1) 求证: $\triangle AEF \sim \triangle DCE$;

(2) 求 $\tan \angle ECF$ 的值.



20. (8分) 学校 6 名教师和 234 名学生集体外出活动, 准备租用 45 座大车或 30 座小车. 若租用 1 辆大车 2 辆小车共需租车费 1000 元; 若租用 2 辆大车一辆小车共需租车费 1100 元.

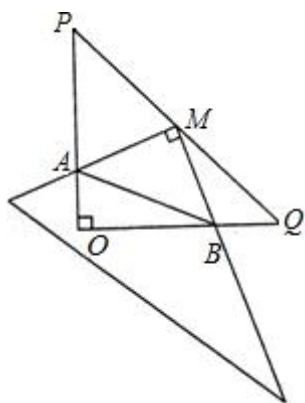
(1) 求大、小车每辆的租车费各是多少元?

(2) 若每辆车上至少要有一名教师, 且总租车费用不超过 2300 元, 求最省钱的租车方案.

21. (8分) 在 $\text{Rt}\triangle POQ$ 中, $OP = OQ = 4$, M 是 PQ 的中点, 把一三角尺的直角顶点放在点 M 处, 以 M 为旋转中心, 旋转三角尺, 三角尺的两直角边与 $\triangle POQ$ 的两直角边分别交于点 A, B .

(1) 求证: $MA = MB$;

(2) 连接 AB , 探究: 在旋转三角尺的过程中, $\triangle AOB$ 的周长是否存在最小值? 若存在, 求出最小值; 若不存在, 请说明理由.



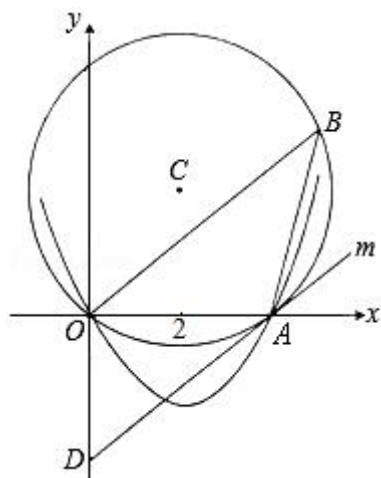
22. (8分) 如图, $\odot C$ 的内接 $\triangle AOB$ 中, $AB = AO = 4$, $\tan \angle AOB = \frac{3}{4}$, 抛物线 $y = ax^2 + bx$

经过点 $A(4, 0)$ 与点 $(-2, 6)$.

(1) 求抛物线的函数解析式;

(2) 直线 m 与 $\odot C$ 相切于点 A , 交 y 轴于点 D . 动点 P 在线段 OB 上, 从点 O 出发向点 B 运动; 同时动点 Q 在线段 DA 上, 从点 D 出发向点 A 运动; 点 P 的速度为每秒一个单位长, 点 Q 的速度为每秒 2 个单位长, 当 $PQ \perp AD$ 时, 求运动时间 t 的值;

(3) 点 R 在抛物线位于 x 轴下方部分的图象上, 当 $\triangle ROB$ 面积最大时, 求点 R 的坐标.



2012 年四川省南充市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 【分析】根据有理数的减法运算法则，减去一个数等于加上这个数的相反数计算．

【解答】解： $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ ．

故选：A．

【点评】本题考查了有理数的减法运算，熟记减去一个数等于加上这个数的相反数是解题的关键．

2. 【分析】根据合并同类项的法则：把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变；同底数幂的乘法法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加；二次根式相加减，先把各个二次根式化成最简二次根式，再把被开方数相同的二次根式进行合并，合并方法为系数相加减，根式不变，进行计算，即可选出答案．

【解答】解： A 、 $x^3 + x^3 = 2x^3$ ，故 A 选项错误；

B 、 $m^2 \cdot m^3 = m^5$ ，故 B 选项错误；

C 、 $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ，故 C 选项错误；

D 、 $\sqrt{14} \times \sqrt{7} = \sqrt{14 \times 7} = 7\sqrt{2}$ ，故 D 选项正确．

故选：D．

【点评】此题主要考查了合并同类项、同底数幂的乘法、二次根式的乘法，关键是熟练掌握各种计算的运算法则．

3. 【分析】根据简单几何体的三视图判断方法，判断圆柱、圆锥、圆柱与圆锥组合体、圆台的俯视图，得出满足题意的几何体即可．

【解答】解：①的三视图中俯视图是圆，但无圆心；

②的俯视图是圆，有圆心；

③的俯视图也都是圆，有圆心；

④的俯视图都是圆环．

故②③的俯视图是相同的；

故选：C．

【点评】本题考查了判断简单几何体的三视图，注意简单几何体的三视图的特征，是中考中常考题型．

4. 【分析】根据正比例函数的定义， $y = kx$ ($k \neq 0$)，对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】解： A 、 $y = -8x$ 是正比例函数，故本选项正确；

B 、 $y = \frac{-8}{x}$ ，自变量 x 在分母上，不是正比例函数，故本选项错误；

C 、 $y = 5x^2 + 6$ ，自变量 x 的指数是 2，不是 1，不是正比例函数，故本选项错误；

D 、 $y = -0.5x - 1$ ，是一次函数，不是正比例函数，故本选项错误.

故选： A .

【点评】本题考查了一次函数的定义，解题关键是掌握正比例函数的定义条件：正比例函数 $y = kx$ 的定义条件是： k 为常数且 $k \neq 0$ ，自变量次数为 1.

5. 【分析】先提取公因式 $x - 2$ ，然后利用因式分解法解一元二次方程求解.

【解答】解： $x(x - 2) + x - 2 = 0$,

$$(x - 2)(x + 1) = 0,$$

所以， $x - 2 = 0$ ， $x + 1 = 0$,

解得 $x_1 = 2$ ， $x_2 = -1$.

故选： D .

【点评】本题考查了因式分解法解一元二次方程，把方程的左边正确进行因式分解是解题的关键.

6. 【分析】根据矩形的面积得到 y 与 x 之间的函数关系式，根据 x 的范围以及函数类型即可作出判断.

【解答】解：矩形的长为 x ，宽为 y ，面积为 9，则 y 与 x 之间的函数关系式是： $y = \frac{9}{x}$ ($x > 0$).

是反比例函数，且图象只在第一象限.

故选： C .

【点评】本题考查了反比例函数的图象，注意 x 的取值范围 $x > 0$ ，容易出现的错误是忽视取值范围，选择 B .

7. 【分析】根据中位数的定义与众数的定义，结合图表信息解答.

【解答】解：15 名运动员，按照成绩从低到高排列，第 8 名运动员的成绩是 1.70，

所以中位数是 1.70，

同一成绩运动员最多的是 1.65，共有 4 人，

所以，众数是 1.65.

因此，中位数与众数分别是 1.70，1.65.

故选：C.

【点评】 本题考查了中位数与众数，确定中位数的时候一定要先排好顺序，然后再根据奇数和偶数个来确定中位数，如果数据有奇数个，则正中间的数字即为所求，如果是偶数个则找中间两位数的平均数，中位数有时不一定是这组数据的数；众数是出现次数最多的数据，众数有时不止一个.

8. **【分析】** 根据被开方数大于等于 0，分母不等于 0 列式计算即可得解.

【解答】 解：根据题意得， $1 - 2x \geq 0$ 且 $x - \frac{1}{2} \neq 0$,

解得 $x \leq \frac{1}{2}$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$,

所以 $x < \frac{1}{2}$.

故选：C.

【点评】 本题考查了函数自变量的取值范围，用到的知识点为：分式有意义，分母不为 0；二次根式的被开方数是非负数.

9. **【分析】** 根据圆锥的侧面积是底面积的 2 倍可得到圆锥底面半径和母线长的关系，利用圆锥侧面展开图的弧长 = 底面周长即可得到该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角度数.

【解答】 解：设母线长为 R ，底面半径为 r ，

$\therefore$ 底面周长 = $2\pi r$ ，底面面积 = πr^2 ，侧面面积 = πrR ，

$\therefore$ 侧面积是底面积的 2 倍，

$\therefore 2\pi r^2 = \pi rR$ ，

$\therefore R = 2r$ ，

设圆心角为 n ，有 $\frac{n\pi R}{180} = 2\pi r = \pi R$ ，

$\therefore n = 180^\circ$.

故选：B.

【点评】 本题综合考查有关扇形和圆锥的相关计算. 解题思路：解决此类问题时要紧紧抓住两者之间的两个对应关系：(1) 圆锥的母线长等于侧面展开图的扇形半径；(2) 圆锥的底面周长等于侧面展开图的扇形弧长，以及利用扇形面积公式求出是解题的关键.

10. **【分析】** 应分两个圆相内切和相外切两种情况进行讨论，求得 P 到 O 的距离，即可得到 a 的值.

【解答】解：当两个圆外切时，圆心距 $d = 1 + 2 = 3$ ，即 P 到 O 的距离是 3，则 $a = \pm 3$ 。

当两圆相内切时，圆心距 $d = 2 - 1 = 1$ ，即 P 到 O 的距离是 1，则 $a = \pm 1$ 。

故 $a = \pm 1$ 或 ± 3 。

故选：D。

【点评】本题考查了圆与圆的位置关系与数量关系，注意两圆相切时应分内切与外切两种情况进行讨论。

二、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 3 分，共 12 分）请将答案直接填在题中横线上

11. 【分析】根据一元一次不等式的解法，移项、合并同类项即可。

【解答】解：移项得， $x > 6 - 2$ ，

合并同类项得， $x > 4$ 。

故答案为： $x > 4$ 。

【点评】本题考查了解一元一次不等式，比较简单，注意移项要变号。

12. 【分析】因为 $-6 \times 2 = -12$ ， $-6 + 2 = -4$ ，所以利用十字相乘法分解因式即可。

【解答】解： $x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x + 2)$ 。

故答案为： $(x - 6)(x + 2)$ 。

【点评】本题考查十字相乘法分解因式，运用十字相乘法分解因式时，要注意观察，尝试，并体会它实质是二项式乘法的逆过程。

13. 【分析】首先确定在图中 B 区域的面积在整个面积中占的比例，根据这个比例即可求出指针指向 B 区域的概率。

【解答】解： $\because$ 一个圆形转盘按 1: 2: 3: 4 的比例分成 A 、 B 、 C 、 D 四个扇形区域，

$\therefore$ 圆被等分成 10 份，其中 B 区域占 2 份，

$\therefore$ 落在 B 区域的概率 $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ 。

故答案为： $\frac{1}{5}$ 。

【点评】本题考查几何概率的求法：首先根据题意将代数关系用面积表示出来，一般用阴影区域表示所求事件（ A ）；然后计算阴影区域的面积在总面积中占的比例，这个比例即事件（ A ）发生的概率；

此题将概率的求解设置于几何图象或游戏中，考查学生对简单几何概型的掌握情况，既避免了单纯依靠公式机械计算的做法，又体现了数学知识在现实生活、甚至娱乐中的运用，体现了数学学科的基础性。

14. 【分析】先根据四边形内角和定理判断出 $\angle 2 + \angle B = 180^\circ$ ，再延长至点 E ，使 $DE = BC$ ，连接 AE ，由全等三角形的判定定理得出 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，故可得出 $\triangle ACE$ 是直角三角形，再根据四边形 $ABCD$ 的面积为 24cm^2 即可得出结论。

【解答】解：延长 CD 至点 E ，使 $DE = BC$ ，连接 AE ，

$$\because \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle B = 180^\circ,$$

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \quad \angle 2 + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle B,$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中，

$$\because \begin{cases} AB=AD \\ \angle 1=\angle B, \\ DE=BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle EAD = \angle BAC, \quad AC = AE, \quad S_{\triangle AEC} = S_{\text{四边形 } ABCD}$$

$$\because \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ACE$ 是等腰直角三角形，

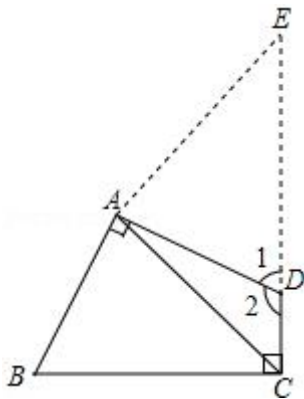
$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 的面积为 } 24\text{cm}^2,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AC^2 = 24, \text{ 解得 } AC = 4\sqrt{3} \text{ 或 } -4\sqrt{3},$$

$$\because AC \text{ 为正数},$$

$$\therefore AC = 4\sqrt{3}.$$

故答案为： $4\sqrt{3}$.



【点评】本题考查的是全等三角形的判定与性质，根据题意作出辅助线，构造出全等三角形及等腰直角三角形，再根据三角形的面积公式进行解答即可。

三、(本大题共 3 个小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

15. 【分析】首先把 $\frac{a-1}{a^2-1}$ 的分母分解因式, 再约分, 然后根据同分母分式加法法则: 同分

母的分式相加, 分母不变, 把分子相加, 进行计算即可.

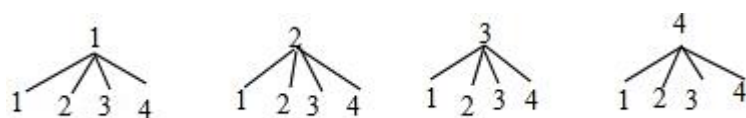
$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= \frac{a}{a+1} + \frac{a-1}{(a-1)(a+1)} \\ &= \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} \\ &= \frac{a+1}{a+1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

【点评】此题主要考查了分式的加减法, 关键是熟练掌握计算法则, 注意观察式子特点, 确定方法后再计算.

16. 【分析】(1) 根据题意画出数形图, 两次取的小球的标号相同的情况有 4 种, 再计算概率;

(2) 先画树状图展示所有 16 种等可能的结果数, 其中两次摸出的小球标号的和等于 4 的占 3 种, 然后根据概率的概念计算即可.

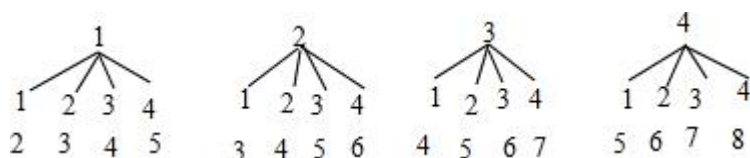
【解答】解: (1) 如图:



两次取的小球的标号相同的情况有 4 种,

$$\text{概率为 } P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

(2) 如图,



随机地摸出一个小球, 然后放回, 再随机地摸出一个小球, 共有 16 种等可能的结果数,

其中两次摸出的小球标号的和等于 4 的占 3 种, 所有两次摸出的小球标号的和等于 4 的

$$\text{概率 } P = \frac{3}{16}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{16}.$$

【点评】 本题考查了列表法或树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果数 n ，再找出某事件所占有的结果数 m ，然后利用概率的概念求得这个事件的概率 $= \frac{m}{n}$ 。

17. 【分析】 先根据等腰梯形的性质得出 $\angle B = \angle BCD$ ，再根据平行线的性质得出 $\angle BCD = \angle CDE$ ， $\angle B = \angle CDE$ ，再根据 $CE = CD$ 即可得出 $\angle CDE = \angle E$ ，进而得出结论。

【解答】 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，

$$\therefore \angle B = \angle BCD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle CDE,$$

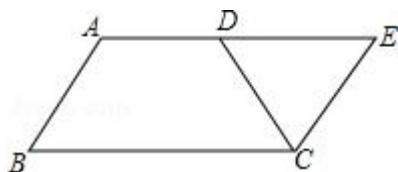
$$\therefore \angle B = \angle CDE.$$

$$\because CE = CD,$$

$$\therefore \triangle CDE \text{ 是等腰三角形},$$

$$\therefore \angle CDE = \angle E,$$

$$\therefore \angle B = \angle E.$$



【点评】 本题考查的是等腰三角形的判定与性质及等腰梯形的性质，熟知等腰梯形的两底角相等是解答此题的关键。

四、(本大题共 2 个小题，每小题 8 分，共 16 分))

18. 【分析】 (1) 因为方程有两个实数根，所以 $\Delta \geq 0$ ，据此即可求出 m 的取值范围；

(2) 根据一元二次方程根与系数的关系，将 $x_1 + x_2 = -3$ ， $x_1 x_2 = m - 1$ 代入 $2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 10 = 0$ ，解关于 m 的方程即可。

【解答】 解：(1) $\because$ 方程有两个实数根，

$$\therefore \Delta \geq 0,$$

$$\therefore 9 - 4 \times 1 \times (m - 1) \geq 0,$$

$$\text{解得 } m \leq \frac{13}{4};$$

$$(2) \because x_1 + x_2 = -3, \quad x_1 x_2 = m - 1,$$

$$\text{又 } \because 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 10 = 0,$$

$$\therefore 2 \times (-3) + m - 1 + 10 = 0,$$

$$\therefore m = -3.$$

【点评】本题考查了根的判别式、一元二次方程根与系数的关系，直接将两根之和与两根之积用 m 表示出来是解题的关键.

19. 【分析】(1) 由四边形 $ABCD$ 是矩形, $EF \perp EC$, 易得 $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $\angle AFE = \angle DEC$, 由有两组角对应相等的两个三角形相似, 即可判定 $\triangle AEF \sim \triangle DCE$;

(2) 由 $\triangle AEF \sim \triangle DCE$, 根据相似三角形的对应边成比例, 可得 $\frac{EF}{CE} = \frac{AE}{DC}$, 又由矩形 $ABCD$

中, $AB = 2AD$, E 为 AD 的中点, $\tan \angle ECF = \frac{EF}{CE}$, 即可求得答案.

【解答】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF + \angle AFE = 90^\circ,$$

$$\because EF \perp EC,$$

$$\therefore \angle AEF + \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle DEC,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DCE;$$

(2) 解: $\because \triangle AEF \sim \triangle DCE$,

$$\therefore \frac{EF}{CE} = \frac{AE}{DC},$$

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2AD$, E 为 AD 的中点,

$$\therefore DC = AB = 2AD = 4AE,$$

$$\therefore \tan \angle ECF = \frac{EF}{CE} = \frac{1}{4}.$$

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质、矩形的性质以及锐角三角函数的定义. 此题难度适中, 注意数形结合思想的应用.

20. 【分析】(1) 设大车每辆的租车费是 x 元、小车每辆的租车费是 y 元. 根据题意: “租用 1 辆大车 2 辆小车共需租车费 1000 元”; “租用 2 辆大车一辆小车共需租车费 1100 元”; 列出方程组, 求解即可;

(2) 根据汽车总数不能小于 $\frac{234+6}{45}$ (取整为 6) 辆, 即可求出共需租汽车的辆数; 设租

用大车 m 辆, 则租车费用 Q (单位: 元) 是 m 的函数, 由题意得出 $400m + 300(6 - m)$

≤ 2300 ，得出取值范围，分析得出即可．

【解答】解：（1）设大车每辆的租车费是 x 元、小车每辆的租车费是 y 元．

可得方程组
$$\begin{cases} x+2y=1000 \\ 2x+y=1100 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x=400 \\ y=300 \end{cases}$$

答：大车每辆的租车费是 400 元、小车每辆的租车费是 300 元；

（2）由每辆汽车上至少要有 1 名老师，汽车总数不能大于 6 辆；

又要保证 240 名师生有车坐，汽车总数不能小于 $\frac{234+6}{45}$ （取整为 6）辆，

综合起来可知汽车总数为 6 辆．

设租用 m 辆大型车，则租车费用 Q （单位：元）是 m 的函数，

即 $Q = 400m + 300(6 - m)$ ；

化简为： $Q = 100m + 1800$ ，

依题意有： $100m + 1800 \leq 2300$ ，

$\therefore m \leq 5$ ，

又要保证 240 名师生有车坐， $45m + 30(6 - m) \geq 240$ ，解得 $m \geq 4$ ，

所以有两种租车方案，

方案一：4 辆大车，2 辆小车；

方案二：5 辆大车，1 辆小车．

$\because Q$ 随 m 增加而增加，

$\therefore$ 当 $m = 4$ 时， Q 最少为 2200 元．

故最省钱的租车方案是：4 辆大车，2 辆小车．

【点评】 本题考查了二元一次方程组的应用，一元一次不等式的应用和理解题意的能力，关键是根据题目所提供的等量关系和不等量关系，列出方程组和不等式求解．

21. **【分析】**（1）过点 M 作 $ME \perp OP$ 于点 E ，作 $MF \perp OQ$ 于点 F ，可得四边形 $OEBF$ 是矩形，根据三角形的中位线定理可得 $ME = MF$ ，再根据同角的余角相等可得 $\angle AME = \angle BMF$ ，再利用“角边角”证明 $\triangle AME$ 和 $\triangle BMF$ 全等，根据全等三角形对应边相等即可证明；

（2）根据全等三角形对应边相等可得 $AE = BF$ ，设 $OA = x$ ，表示出 AE 为 $2 - x$ ，即 BF 的长度，然后表示出 $OB = 2 + (2 - x)$ ，再利用勾股定理列式求出 AM ，然后根据等腰直

角三角形的斜边等于直角边的 $\sqrt{2}$ 倍表示出 AB 的长度，然后根据三角形的周长公式列式判断出 $\triangle AOB$ 的周长随 AB 的变化而变化，再根据二次函数的最值问题求出周长最小时的 x 的值，然后解答即可．

【解答】（1）证明：如图，过点 M 作 $ME \perp OP$ 于点 E ，作 $MF \perp OQ$ 于点 F ，

$$\because \angle O = 90^\circ, \angle MEO = 90^\circ, \angle OFM = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $OEMF$ 是矩形，

$$\because M \text{ 是 } PQ \text{ 的中点, } OP = OQ = 4, \angle O = 90^\circ,$$

$$\therefore ME = \frac{1}{2}OQ = 2, MF = \frac{1}{2}OP = 2,$$

$$\therefore ME = MF,$$

$\therefore$ 四边形 $OEMF$ 是正方形，

$$\because \angle AME + \angle AMF = 90^\circ, \angle BMF + \angle AMF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AME = \angle BMF,$$

$$\text{在 } \triangle AME \text{ 和 } \triangle BMF \text{ 中, } \begin{cases} \angle AME = \angle BMF \\ ME = MF \\ \angle AEM = \angle BFM = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AME \cong \triangle BMF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore MA = MB;$$

（2）解：有最小值，最小值为 $4+2\sqrt{2}$ ．

理由如下：根据（1） $\triangle AME \cong \triangle BMF$ ，

$$\therefore AE = BF,$$

设 $OA = x$ ，则 $AE = 2 - x$ ，

$$\therefore OB = OF + BF = 2 + (2 - x) = 4 - x,$$

$$\text{在 Rt} \triangle AME \text{ 中, } AM = \sqrt{AE^2 + ME^2} = \sqrt{(2-x)^2 + 2^2},$$

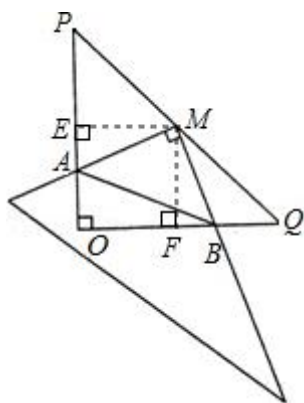
$$\because \angle AMB = 90^\circ, MA = MB,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}AM = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(2-x)^2 + 2^2} = \sqrt{2(2-x)^2 + 8}.$$

$$\triangle AOB \text{ 的周长} = OA + OB + AB = x + (4 - x) + \sqrt{2(2-x)^2 + 8} = 4 + \sqrt{2(2-x)^2 + 8}.$$

所以，当 $x = 2$ ，即点 A 为 OP 的中点时， $\triangle AOB$ 的周长有最小值，最小值为 $4 + \sqrt{8}$ ，

即 $4 + 2\sqrt{2}$ ．



【点评】 本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰直角三角的性质，三角形的中位线定理，勾股定理的应用，以及二次函数的最值问题，作出辅助线，把动点问题转化为固定的三角形，构造出全等三角形是解题的关键，也是本题的难点．

22. 【分析】（1）根据抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过点 $A(4, 0)$ 与点 $(-2, 6)$ ，利用待定系数法求抛物线解析式；

（2）如答图 1，由已知条件，可以计算出 OD 、 AE 等线段的长度．当 $PQ \perp AD$ 时，过点 O 作 $OF \perp AD$ 于点 F ，此时四边形 $OFQP$ 、 $OFQE$ 均为矩形．则在 $Rt\triangle ODF$ 中，利用勾股定理求出 DF 的长度，从而得到时间 t 的数值；

（3）因为 OB 为定值，欲使 $\triangle ROB$ 面积最大，只需 OB 边上的高最大即可．按照这个思路解决本题．

如答图 2，当直线 l 平行于 OB ，且与抛物线相切时， OB 边上的高最大，从而 $\triangle ROB$ 的面积最大．联立直线 l 和抛物线的解析式，利用一元二次方程判别式等于 0 的结论可以求出 R 点的坐标．

【解答】解：（1） $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过点 $A(4, 0)$ 与点 $(-2, 6)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 16a + 4b = 0 \\ 4a - 2b = 6 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

（2）如答图 1，连接 AC 交 OB 于点 E ，由垂径定理得 $AC \perp OB$ ．

$\because AD$ 为切线，

$\therefore AC \perp AD$ ，

$$\therefore AD \parallel OB.$$

过 O 点作 $OF \perp AD$ 于 F ,

$\therefore$ 四边形 $OFAE$ 是矩形,

$$\because \tan \angle AOB = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \sin \angle AOB = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AE = OA \cdot \sin \angle AOB = 4 \times \frac{3}{5} = 2.4,$$

$$OD = OA \cdot \tan \angle OAD = OA \cdot \tan \angle AOB = 4 \times \frac{3}{4} = 3.$$

当 $PQ \perp AD$ 时, $OP = t$, $DQ = 2t$.

在 $\text{Rt}\triangle ODF$ 中,

$$\because OD = 3, OF = AE = 2.4, DF = DQ - FQ = DQ - OP = 2t - t = t,$$

$$\text{由勾股定理得: } DF = \sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{3^2 - 2.4^2} = 1.8,$$

$$\therefore t = 1.8 \text{ 秒};$$

(3) 如答图 2, 设直线 l 平行于 OB , 且与抛物线有唯一交点 R (相切),

此时 $\triangle ROB$ 中 OB 边上的高最大, 所以此时 $\triangle ROB$ 面积最大.

$$\because \tan \angle AOB = \frac{3}{4}, \therefore \text{直线 } OB \text{ 的解析式为 } y = \frac{3}{4}x,$$

由直线 l 平行于 OB , 可设直线 l 解析式为 $y = \frac{3}{4}x + b$.

$\because$ 点 R 既在直线 l 上, 又在抛物线上,

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 - 2x = \frac{3}{4}x + b, \text{ 化简得: } 2x^2 - 11x - 4b = 0.$$

$\because$ 直线 l 与抛物线有唯一交点 R (相切),

$$\therefore \text{判别式 } \Delta = 0, \text{ 即 } 11^2 + 32b = 0, \text{ 解得 } b = -\frac{121}{32},$$

$$\text{此时原方程的解为 } x = \frac{11}{4}, \text{ 即 } x_R = \frac{11}{4},$$

$$\text{而 } y_R = \frac{1}{2}x_R^2 - 2x_R = -\frac{55}{32}$$

$$\therefore \text{点 } R \text{ 的坐标为 } R\left(\frac{11}{4}, -\frac{55}{32}\right).$$

