

2015 年湖南省益阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (5 分) (2015•益阳) 下列实数中，是无理数的为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 0 D. -3

2. (5 分) (2015•益阳) 下列运算正确的是 ()

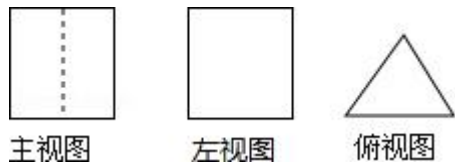
- A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ B. $(x^3)^2 = x^5$ C. $(xy^2)^3 = x^3y^6$ D. $x^6 \div x^3 = x^2$

3. (5 分) (2015•益阳) 某小组 5 名同学在一周内参加家务劳动的时间如下表所示，关于“劳动时间”的这组数据，以下说法正确的是 ()

劳动时间 (小时)	3	3.5	4	4.5
人 数	1	1	2	1

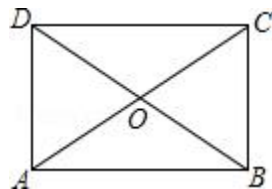
- A. 中位数是 4，平均数是 3.75 B. 众数是 4，平均数是 3.75
C. 中位数是 4，平均数是 3.8 D. 众数是 2，平均数是 3.8

4. (5 分) (2015•益阳) 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体是 ()



- A. 三棱锥 B. 三棱柱 C. 圆柱 D. 长方体

5. (5 分) (2015•益阳) 如图，在矩形 ABCD 中，对角线 AC、BD 交于点 O，以下说法错误的是 ()



- A. $\angle ABC = 90^\circ$ B. $AC = BD$ C. $OA = OB$ D. $OA = AD$

6. (5 分) (2015•益阳) 下列等式成立的是 ()

A. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{a+b}$ B. $\frac{2}{2a+b} = \frac{1}{a+b}$

C. $\frac{ab}{ab-b^2} = \frac{a}{a-b}$ D. $\frac{a}{-a+b} = -\frac{a}{a+b}$

7. (5分) (2015•益阳) 沅江市近年来大力发展芦笋产业, 某芦笋生产企业在两年内的销售额从20万元增加到80万元. 设这两年的销售额的年平均增长率为 x , 根据题意可列方程为 ()

A. $20(1+2x) = 80$ B. $2 \times 20(1+x) = 80$

C. $20(1+x^2) = 80$ D. $20(1+x)^2 = 80$

8. (5分) (2015•益阳) 若抛物线 $y = (x-m)^2 + (m+1)$ 的顶点在第一象限, 则 m 的取值范围为 ()

A. $m > 1$ B. $m > 0$ C. $m > -1$ D. $-1 < m < 0$

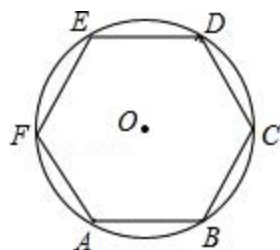
二、填空题 (本大题共5小题, 每小题5分, 共25分. 把答案填在答题卡中对应题号后的横线上)

9. (5分) (2015•益阳) 计算: $\sqrt{2} \times \sqrt{8} =$ _____.

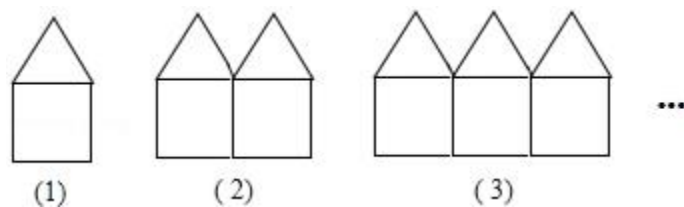
10. (5分) (2015•益阳) 已知 y 是 x 的反比例函数, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小. 请写出一个满足以上条件的函数表达式_____.

11. (5分) (2015•益阳) 甲、乙、丙三位好朋友随机站成一排照合影, 甲没有站在中间的概率为_____.

12. (5分) (2015•益阳) 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$, $\odot O$ 的半径为1, 则 $\widehat{AB}$ 的长为_____.



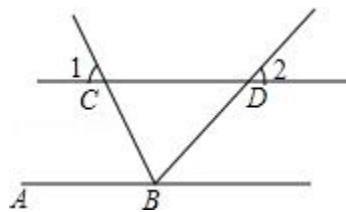
13. (5分) (2015•益阳) 如图是用长度相等的小棒按一定规律摆成的一组图案, 第1个图案中有6根小棒, 第2个图案中有11根小棒, ..., 则第n个图案中有根小棒.



三、解答题 (本大题共2小题, 每小题8分, 共16分)

14. (8分) (2015•益阳) 化简: $(x+1)^2 - x(x+1)$.

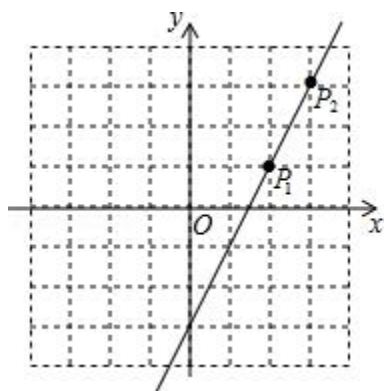
15. (8分) (2015•益阳) 如图, 直线 $AB \parallel CD$, BC 平分 $\angle ABD$, $\angle 1 = 65^\circ$, 求 $\angle 2$ 的度数.



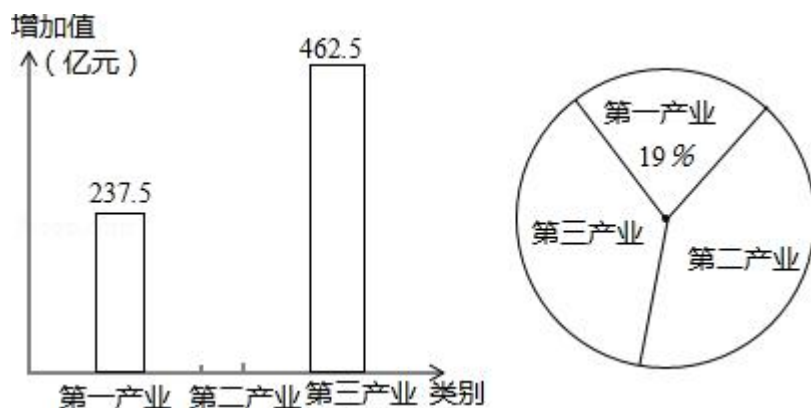
四、解答题 (本大题共3小题, 每小题10分, 共30分)

16. (10分) (2015•益阳) 如图, 直线 l 上有一点 $P_1(2, 1)$, 将点 P_1 先向右平移1个单位, 再向上平移2个单位得到像点 P_2 , 点 P_2 恰好在直线 l 上.

- (1) 写出点 P_2 的坐标;
- (2) 求直线 l 所表示的一次函数的表达式;
- (3) 若将点 P_2 先向右平移3个单位, 再向上平移6个单位得到像点 P_3 . 请判断点 P_3 是否在直线 l 上, 并说明理由.



17. (10 分) (2015•益阳) 2014 年益阳市的地区生产总值 (第一、二、三产业的增加值之和) 已进入千亿元俱乐部, 如图表示 2014 年益阳市第一、二、三产业增加值的部分情况, 请根据图中提供的信息解答下列问题

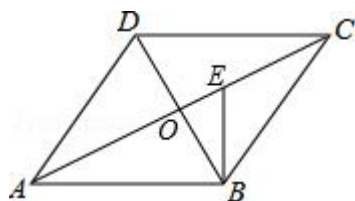


- (1) 2014 年益阳市的地区生产总值为多少亿元?
- (2) 请将条形统计图中第二产业部分补充完整;
- (3) 求扇形统计图中第二产业对应的扇形的圆心角度数.

18. (10 分) (2015•益阳) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $\angle CAB = \angle ACB$, 过点 B 作 $BE \perp AB$ 交 AC 于点 E .

- (1) 求证: $AC \perp BD$;

(2) 若 $AB=14$, $\cos\angle CAB=\frac{7}{8}$, 求线段 OE 的长.



五、解答题 (本大题共 2 小题, 每小题 12 分, 共 24 分)

19. (12 分) (2015·益阳) 大学生小刘回乡创办小微企业, 初期购得原材料若干吨, 每天生产相同件数的某种产品, 单件产品所耗费的原材料相同. 当生产 6 天后剩余原材料 36 吨, 当生产 10 天后剩余原材料 30 吨. 若剩余原材料数量小于或等于 3 吨, 则需补充原材料以保证正常生产.

(1) 求初期购得的原材料吨数与每天所耗费的原材料吨数;

(2) 若生产 16 天后, 根据市场需求每天产量提高 20%, 则最多再生产多少天后必须补充原材料?

20. (12 分) (2015·益阳) 已知点 P 是线段 AB 上与点 A 不重合的一点, 且 $AP < PB$. AP 绕点 A 逆时针旋转角 α ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$) 得到 AP_1 , BP 绕点 B 顺时针也旋转角 α 得到 BP_2 , 连接 PP_1 、 PP_2 .

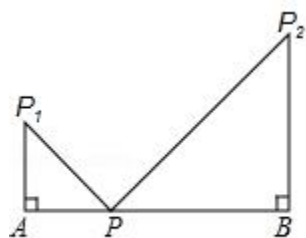


图1

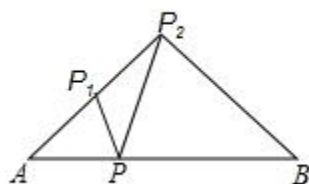


图2

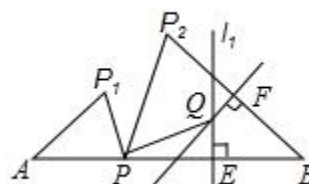


图3

(1) 如图 1, 当 $\alpha=90^\circ$ 时, 求 $\angle P_1PP_2$ 的度数;

(2) 如图 2, 当点 P_2 在 AP_1 的延长线上时, 求证: $\triangle P_2P_1P \sim \triangle P_2PA$;

(3) 如图 3, 过 BP 的中点 E 作 $l_1 \perp BP$, 过 BP_2 的中点 F 作 $l_2 \perp BP_2$, l_1 与 l_2 交于点 Q , 连接 PQ , 求证: $P_1P \perp PQ$.

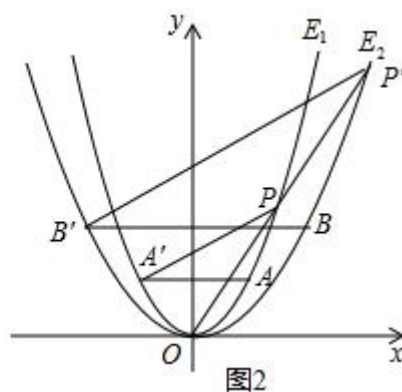
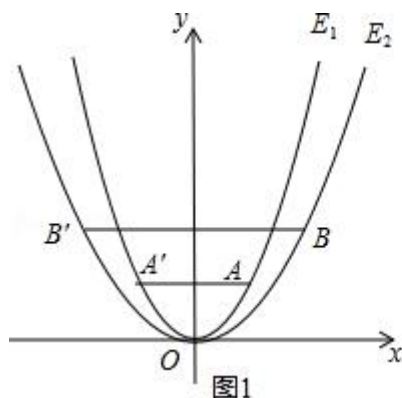
六、解答题 (本题满分 15 分)

21. (15 分) (2015·益阳) 已知抛物线 $E_1: y=x^2$ 经过点 $A(1, m)$, 以原点为顶点的抛物线 E_2 经过点 $B(2, 2)$, 点 A 、 B 关于 y 轴的对称点分别为点 A' 、 B' .

(1) 求 m 的值及抛物线 E_2 所表示的二次函数的表达式;

(2) 如图 1, 在第一象限内, 抛物线 E_1 上是否存在点 Q , 使得以点 Q 、 B 、 B' 为顶点的三角形为直角三角形? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 如图 2, P 为第一象限内的抛物线 E_1 上与点 A 不重合的一点, 连接 OP 并延长与抛物线 E_2 相交于点 P' , 求 $\triangle PAA'$ 与 $\triangle P'BB'$ 的面积之比.



2015 年湖南省益阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (5 分) (2015•益阳) 下列实数中，是无理数的为 ()

A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 0 D. -3

考点： 无理数.

分析： 无理数就是无限不循环小数．理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称．即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数．由此即可判定选择项．

解答： 解：A、是无理数，选项正确；

B、是分数，是有理数，选项错误；

C、是整数，是有理数，选项错误；

D、是整数，是有理数，选项错误．

故选 A.

点评： 此题主要考查了无理数的定义，其中初中范围内学习的无理数有： π ， 2π 等；开方开不尽的数；以及像 0.1010010001...，等有这样规律的数．

2. (5 分) (2015•益阳) 下列运算正确的是 ()

A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ B. $(x^3)^2 = x^5$ C. $(xy^2)^3 = x^3y^6$ D. $x^6 \div x^3 = x^2$

考点： 同底数幂的除法；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方．

分析： 根据同底数幂的乘法，可判断 A；根据幂的乘方，可判断 B；根据积的乘方，可判断 C；根据同底数幂的除法，可判断 D．

解答： 解：A、同底数幂的乘法底数不变指数相加，故 A 错误；

B、幂的乘方底数不变指数相乘，故 B 错误；

C、积的乘方等于乘方的积，故 C 正确；

D、同底数幂的除法底数不变指数相减，故 D 错误；

故选：C.

点评： 本题考查了同底数幂的除法，熟记法则并根据法则计算是解题关键.

3. (5 分) (2015•益阳) 某小组 5 名同学在一周内参加家务劳动的时间如下表所示，关于“劳动时间”的这组数据，以下说法正确的是 ()

劳动时间 (小时)	3	3.5	4	4.5
人 数	1	1	2	1

A. 中位数是 4，平均数是 3.75 B. 众数是 4，平均数是 3.75

C. 中位数是 4，平均数是 3.8 D. 众数是 2，平均数是 3.8

考点： 中位数；加权平均数；众数.

分析： 根据众数和中位数的概念求解.

解答： 解：这组数据中 4 出现的次数最多，众数为 4，

∵共有 5 个人，

∴第 3 个人的劳动时间为中位数，

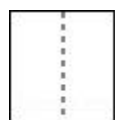
故中位数为：4，

平均数为： $\frac{3+3.5+4 \times 2+4.5}{5}=3.8$.

故选 C.

点评： 本题考查了中位数、平均数、众数的知识，解答本题的关键是掌握各知识点的概念.

4. (5 分) (2015•益阳) 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体是 ()



主视图



左视图



俯视图

A. 三棱锥 B. 三棱柱 C. 圆柱 D. 长方体

考点：由三视图判断几何体.

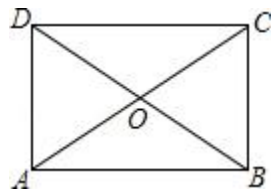
分析：根据三视图的知识，正视图为两个矩形，左视图为一个矩形，俯视图为一个三角形，故这个几何体为直三棱柱

解答：解：根据图中三视图的形状，符合条件的只有直三棱柱，因此这个几何体的名称是直三棱柱.

故选：B.

点评：本题考查由三视图确定几何体的形状，主要考查学生空间想象能力及对立体图形的认识.

5. (5 分) (2015•益阳) 如图，在矩形 ABCD 中，对角线 AC、BD 交于点 O，以下说法错误的是 ()



A. $\angle ABC=90^\circ$ B. $AC=BD$ C. $OA=OB$ D. $OA=AD$

考点：矩形的性质.

分析：矩形的性质：四个角都是直角，对角线互相平分且相等；由矩形的性质容易得出结论.

解答：解： $\because$ 四边形 ABCD 是矩形，

$$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle BAD = 90^\circ, \quad AC = BD, \quad OA = \frac{1}{2}AC, \quad OB = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OA = OB,$$

$\therefore$ A、B、C 正确，D 错误，

故选：D.

点评：本题考查了矩形的性质；熟练掌握矩形的性质是解决问题的关键.

6. (5 分) (2015•益阳) 下列等式成立的是 ()

A. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{a+b}$ B. $\frac{2}{2a+b} = \frac{1}{a+b}$

C. $\frac{ab}{ab-b^2} = \frac{a}{a-b}$ D. $\frac{a}{-a+b} = -\frac{a}{a+b}$

考点： 分式的混合运算.

专题： 计算题.

分析： 原式各项计算得到结果，即可做出判断.

解答： 解： A、原式= $\frac{b+2a}{ab}$ ， 错误；

B、原式不能约分， 错误；

C、原式= $\frac{ab}{b(a-b)} = \frac{a}{a-b}$ ， 正确；

D、原式= $\frac{a}{-(a-b)} = -\frac{a}{a-b}$ ， 错误，

故选 C

点评： 此题考查了分式的混合运算，熟练掌握运算是解本题的关键.

7. (5 分) (2015•益阳) 沅江市近年来大力发展芦笋产业，某芦笋生产企业在两年内的销售额从 20 万元增加到 80 万元. 设这两年的销售额的年平均增长率为 x ，根据题意可列方程为 ()

A. $20(1+2x) = 80$ B. $2 \times 20(1+x) = 80$ C. $20(1+x^2) = 80$ D. $20(1+x)^2 = 80$

考点： 由实际问题抽象出一元二次方程.

专题： 增长率问题.

分析： 根据第一年的销售额 $\times (1 + \text{平均年增长率})^2 = \text{第三年的销售额}$ ，列出方程即可.

解答： 解： 设增长率为 x ，根据题意得 $20(1+x)^2 = 80$ ，

故选 D.

点评: 本题考查一元二次方程的应用——求平均变化率的方法. 若设变化前的量为 a , 变化后的量为 b , 平均变化率为 x , 则经过两次变化后的数量关系为 $a(1 \pm x)^2 = b$. (当增长时中间的“ $\pm$ ”号选“ $+$ ”, 当下降时中间的“ $\pm$ ”号选“ $-$ ”).

8. (5 分) (2015•益阳) 若抛物线 $y = (x - m)^2 + (m + 1)$ 的顶点在第一象限, 则 m 的取值范围为 ()

A. $m > 1$ B. $m > 0$ C. $m > -1$ D. $-1 < m < 0$

考点: 二次函数的性质.

分析: 利用 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标公式表示出其顶点坐标, 根据顶点在第一象限, 所以顶点的横坐标和纵坐标都大于 0 列出不等式组.

解答: 解: 由 $y = (x - m)^2 + (m + 1) = x^2 - 2mx + (m^2 + m + 1)$,

根据题意,
$$\begin{cases} -\frac{-2m}{2} > 0 \\ \frac{4(m^2 + m + 1) - (-2m)^2}{4} > 0 \end{cases},$$

解不等式 (1), 得 $m > 0$,

解不等式 (2), 得 $m > -1$;

所以不等式组的解集为 $m > 0$.

故选 B.

点评: 本题考查顶点坐标的公式和点所在象限的取值范围, 同时考查了不等式组的解法, 难度较大.

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 把答案填在答题卡中对应题号后的横线上)

9. (5 分) (2015•益阳) 计算: $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \underline{4}$.

考点: 二次根式的乘除法.

专题： 计算题.

分析： 原式利用二次根式的乘法法则计算，将结果化为最简二次根式即可.

解答： 解：原式= $\sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$.

故答案为： 4

点评： 此题考查了二次根式的乘除法，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

10. (5 分) (2015•益阳) 已知 y 是 x 的反比例函数，当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小. 请写出一个满足以上条件的函数表达式 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ ，答案不唯一.

考点： 反比例函数的性质.

专题： 开放型.

分析： 反比例函数的图象在每个象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大，则反比例函数的反比例系数 $k < 0$ ；反之，只要 $k < 0$ ，则反比例函数在每个象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大.

解答： 解：只要使反比例系数大于 0 即可. 如 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ ，答案不唯一.

故答案为： $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ ，答案不唯一.

点评： 本题主要考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的性质：

① $k > 0$ 时，函数图象在第一，三象限. 在每个象限内 y 随 x 的增大而减小；

② $k < 0$ 时，函数图象在第二，四象限. 在每个象限内 y 随 x 的增大而增大.

11. (5 分) (2015•益阳) 甲、乙、丙三位好朋友随机站成一排照合影，甲没有站在中间的概率为 $\frac{2}{3}$.

考点： 列表法与树状图法.

分析： 列举出所有情况，看甲没排在中间的情况占所有情况的多少即为所求的概率.

解答： 解：甲、乙、丙三个同学排成一排拍照有以下可能：

甲乙丙，甲丙乙，乙甲丙，乙丙甲，丙甲乙，丙乙甲，全部 6 种情况，

有 4 种甲没在中间，

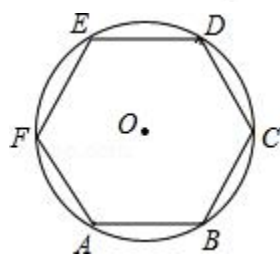
所以甲没排在中间的概率是 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

故答案为 $\frac{2}{3}$.

点评： 本题考查用列举法求概率，用到的知识点为：概率等于所求情况数与总情况数之比.

12. (5 分) (2015•益阳) 如图，正六边形 ABCDEF 内接于 $\odot O$ ， $\odot O$ 的半径为 1，

则 $\widehat{AB}$ 的长为 $\frac{\pi}{3}$.



考点： 弧长的计算；正多边形和圆.

分析： 求出圆心角 $\angle AOB$ 的度数，再利用弧长公式解答即可.

解答： 解： $\because$ ABCDEF 为正六边形，

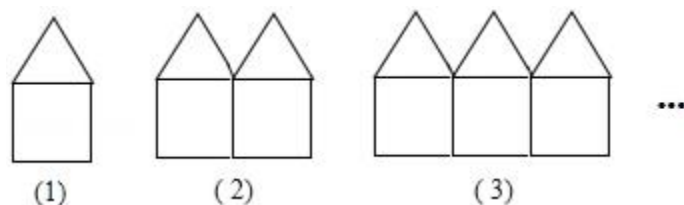
$$\therefore \angle AOB = 360^\circ \times \frac{1}{6} = 60^\circ,$$

$$\widehat{AB} \text{ 的长为 } \frac{60 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{3}.$$

故答案为： $\frac{\pi}{3}$.

点评： 此题将扇形的弧长公式与多边形的性质相结合，构思巧妙，利用了正六边形的性质.

13. (5 分) (2015•益阳) 如图是用长度相等的小棒按一定规律摆成的一组图案, 第 1 个图案中有 6 根小棒, 第 2 个图案中有 11 根小棒, ..., 则第 n 个图案中有 $5n+1$ 根小棒.



考点: 规律型: 图形的变化类.

分析: 由图可知: 第 1 个图案中有 $5+1=6$ 根小棒, 第 2 个图案中有 $2 \times 5 + 2 - 1 = 11$ 根小棒, 第 3 个图案中有 $3 \times 5 + 3 - 2 = 16$ 根小棒, ... 由此得出第 n 个图案中有 $5n + n - (n - 1) = 5n + 1$ 根小棒.

解答: 解: $\because$ 第 1 个图案中有 $5+1=6$ 根小棒,

第 2 个图案中有 $2 \times 5 + 2 - 1 = 11$ 根小棒,

第 3 个图案中有 $3 \times 5 + 3 - 2 = 16$ 根小棒,

...

$\therefore$ 第 n 个图案中有 $5n + n - (n - 1) = 5n + 1$ 根小棒.

故答案为: $5n+1$.

点评: 此题考查图形的变化规律, 找出图形之间的联系, 得出数字之间的运算规律, 利用规律解决问题.

三、解答题 (本大题共 2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

14. (8 分) (2015•益阳) 化简: $(x+1)^2 - x(x+1)$.

考点: 整式的混合运算.

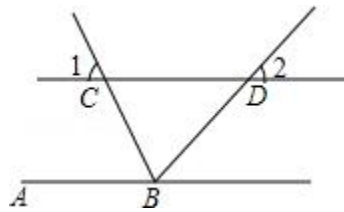
分析: 利用完全平方公式和整式的乘法计算, 进一步合并得出答案即可.

解答: 解: 原式 $= x^2 + 2x + 1 - x^2 - x$

$=x+1$.

点评： 此题考查整式的混合运算，掌握计算方法与计算公式是解决问题的关键.

15. (8分) (2015•益阳) 如图，直线 $AB \parallel CD$ ， BC 平分 $\angle ABD$ ， $\angle 1=65^\circ$ ，求 $\angle 2$ 的度数.



考点： 平行线的性质.

分析： 由平行线的性质得到 $\angle ABC = \angle 1 = 65^\circ$ ， $\angle ABD + \angle BDC = 180^\circ$ ，由 BC 平分 $\angle ABD$ ，得到 $\angle ABD = 2\angle ABC = 130^\circ$ ，于是得到结论.

解答： 解： $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABC = \angle 1 = 65^\circ$ ， $\angle ABD + \angle BDC = 180^\circ$,

$\because BC$ 平分 $\angle ABD$,

$\therefore \angle ABD = 2\angle ABC = 130^\circ$,

$\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle ABD = 50^\circ$,

$\therefore \angle 2 = \angle BDC = 50^\circ$.

点评： 本题考查了平行线的性质和角平分线定义等知识点，解此题的关键是求出 $\angle ABD$ 的度数，题目较好，难度不大.

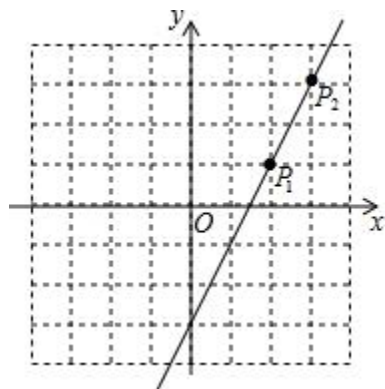
四、解答题 (本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分)

16. (10分) (2015•益阳) 如图，直线 l 上有一点 $P_1(2, 1)$ ，将点 P_1 先向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位得到像点 P_2 ，点 P_2 恰好在直线 l 上.

(1) 写出点 P_2 的坐标;

(2) 求直线 l 所表示的一次函数的表达式;

(3) 若将点 P_2 先向右平移 3 个单位, 再向上平移 6 个单位得到像点 P_3 . 请判断点 P_3 是否在直线 l 上, 并说明理由.



考点: 一次函数图象与几何变换; 一次函数图象上点的坐标特征; 待定系数法求一次函数解析式.

分析: (1) 根据“左加右减、上加下减”的规律来求点 P_2 的坐标;

(2) 设直线 l 所表示的一次函数的表达式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$), 把点 $P_1(2, 1)$, $P_2(3, 3)$ 代入直线方程, 利用方程组来求系数的值;

(3) 把点 $(6, 9)$ 代入 (2) 中的函数解析式进行验证即可.

解答: 解: (1) $P_2(3, 3)$.

(2) 设直线 l 所表示的一次函数的表达式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$),

$\because$ 点 $P_1(2, 1)$, $P_2(3, 3)$ 在直线 l 上,

$$\therefore \begin{cases} 2k+b=1 \\ 3k+b=3 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k=2 \\ b=-3 \end{cases}$.

$\therefore$ 直线 l 所表示的一次函数的表达式为 $y=2x-3$.

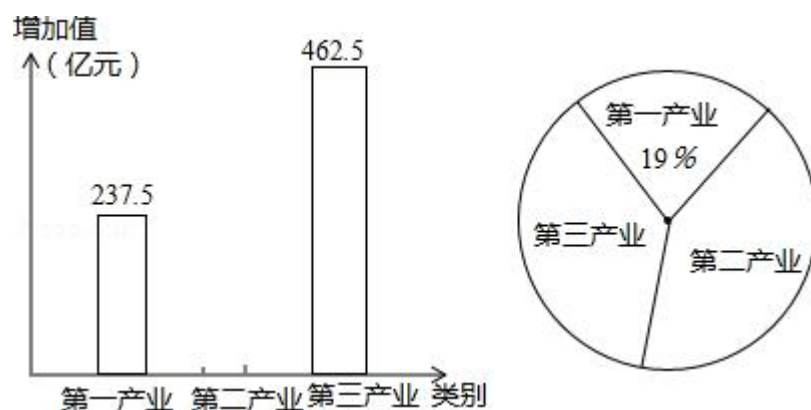
(3) 点 P_3 在直线 l 上. 由题意知点 P_3 的坐标为 $(6, 9)$,

$$\therefore 2 \times 6 - 3 = 9,$$

∴点 P_3 在直线 l 上.

点评: 本题考查了待定系数法求一次函数解析式, 一次函数图象上点的坐标特征以及一次函数图象的几何变换. 在平面直角坐标系中, 图形的平移与图形上某点的平移相同. 平移中点的变化规律是: 横坐标右移加, 左移减; 纵坐标上移加, 下移减.

17. (10 分) (2015•益阳) 2014 年益阳市的地区生产总值 (第一、二、三产业的增加值之和) 已进入千亿元俱乐部, 如图表示 2014 年益阳市第一、二、三产业增加值的部分情况, 请根据图中提供的信息解答下列问题



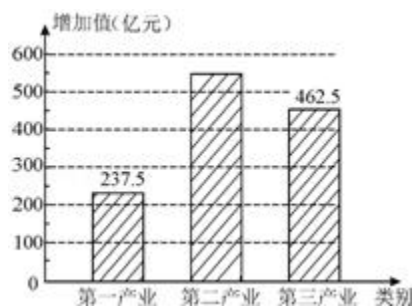
- (1) 2014 年益阳市的地区生产总值为多少亿元?
- (2) 请将条形统计图中第二产业部分补充完整;
- (3) 求扇形统计图中第二产业对应的扇形的圆心角度数.

考点: 条形统计图; 扇形统计图.

分析: (1) 用第一产业增加值除以它所占的百分比, 即可解答;
(2) 算出第二产业的增加值即可补全条形图;
(3) 算出第二产业的百分比再乘以 360° , 即可解答.

解答: 解: (1) $237.5 \div 19\% = 1250$ (亿元);

(2) 第二产业的增加值为 $1250 - 237.5 - 462.5 = 550$ (亿元), 画图如下:



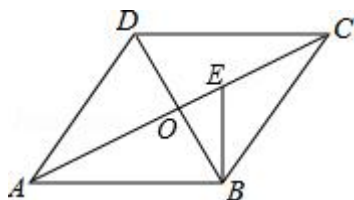
(3) 扇形统计图中第二产业部分的圆心角为 $\frac{550}{1250} \times 360^\circ = 158.4^\circ$.

点评： 本题主要考查了条形统计图和扇形统计图，解题的关键是读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键.

18. (10分) (2015•益阳) 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $\angle CAB = \angle ACB$ ，过点 B 作 $BE \perp AB$ 交 AC 于点 E .

(1) 求证： $AC \perp BD$;

(2) 若 $AB=14$ ， $\cos \angle CAB = \frac{7}{8}$ ，求线段 OE 的长.



考点： 菱形的判定与性质；平行四边形的性质；解直角三角形.

分析： (1) 根据 $\angle CAB = \angle ACB$ 利用等角对等边得到 $AB = CB$ ，从而判定平行四边形 $ABCD$ 是菱形，根据菱形的对角线互相垂直即可证得结论；

(2) 分别在 $Rt\triangle AOB$ 中和在 $Rt\triangle ABE$ 中求得 AO 和 AE ，从而利用 $OE = AE - AO$ 求解即可.

解答： 解：(1) $\because \angle CAB = \angle ACB$,

$\therefore AB = CB$,

$\therefore \square ABCD$ 是菱形.

$\therefore AC \perp BD$;

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 在 Rt}\triangle AOB \text{ 中, } \cos\angle CAB &= \frac{AO}{AB} = \frac{7}{8}, \quad AB=14, \\
 \therefore AO &= 14 \times \frac{7}{8} = \frac{49}{4}, \\
 \text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中, } \cos\angle EAB &= \frac{AB}{AE} = \frac{7}{8}, \quad AB=14, \\
 \therefore AE &= \frac{8}{7}AB = 16, \\
 \therefore OE &= AE - AO = 16 - \frac{49}{4} = \frac{15}{4}.
 \end{aligned}$$

点评： 本题考查了解直角三角形及菱形的判定与性质、平行四边形变形的判定与性质的知识，解题的关键是读懂题意，选择合适的边角关系，难度不大.

五、解答题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

19. (12 分) (2015•益阳) 大学生小刘回乡创办小微企业，初期购得原材料若干吨，每天生产相同件数的某种产品，单件产品所耗费的原材料相同. 当生产 6 天后剩余原材料 36 吨，当生产 10 天后剩余原材料 30 吨. 若剩余原材料数量小于或等于 3 吨，则需补充原材料以保证正常生产.

(1) 求初期购得的原材料吨数与每天所耗费的原材料吨数；

(2) 若生产 16 天后，根据市场需求每天产量提高 20%，则最多再生产多少天后必须补充原材料？

考点： 一元一次不等式的应用；二元一次方程组的应用.

分析： (1) 设初期购得原材料 a 吨，每天所耗费的原材料为 b 吨，根据“当生产 6 天后剩余原材料 36 吨，当生产 10 天后剩余原材料 30 吨.”列出方程组解决问题；

(2) 最多再生产 x 天后必须补充原材料，根据若剩余原材料数量小于或等于 3 吨列出不等式解决问题.

解答： 解：(1) 设初期购得原材料 a 吨，每天所耗费的原材料为 b 吨，

根据题意得：
$$\begin{cases} a - 6b = 36 \\ a - 10b = 30 \end{cases}.$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=45 \\ b=1.5 \end{cases}.$$

答：初期购得原材料 45 吨，每天所耗费的原材料为 1.5 吨.

(2) 设再生产 x 天后必须补充原材料，

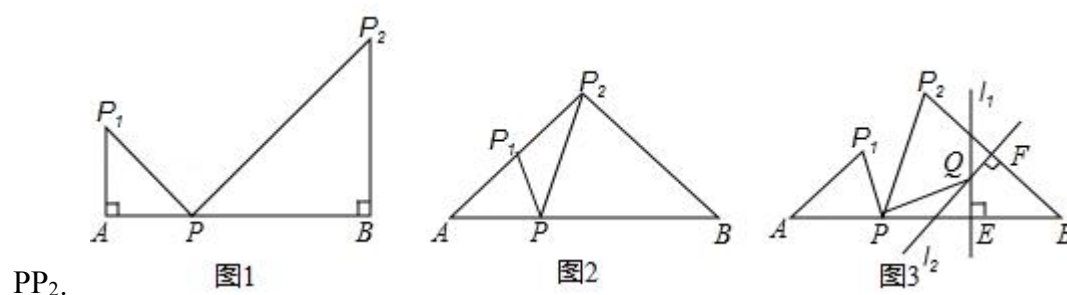
依题意得： $45 - 16 \times 1.5 - 1.5 (1+20\%) x \leq 3$,

解得： $x \geq 10$.

答：最多再生产 10 天后必须补充原材料.

点评： 此题考查一元一次不等式组的实际运用，二元一次方程组的实际运用，找出题目蕴含的数量关系与不等关系是解决问题的关键.

20. (12 分) (2015•益阳) 已知点 P 是线段 AB 上与点 A 不重合的一点，且 $AP < PB$. AP 绕点 A 逆时针旋转角 α ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$) 得到 AP_1 , BP 绕点 B 顺时针也旋转角 α 得到 BP_2 , 连接 PP_1 、



PP_2 .

(1) 如图 1, 当 $\alpha=90^\circ$ 时, 求 $\angle P_1PP_2$ 的度数;

(2) 如图 2, 当点 P_2 在 AP_1 的延长线上时, 求证: $\triangle P_2P_1P \sim \triangle P_2PA$;

(3) 如图 3, 过 BP 的中点 E 作 $l_1 \perp BP$, 过 BP_2 的中点 F 作 $l_2 \perp BP_2$, l_1 与 l_2 交于点 Q , 连接 PQ , 求证: $P_1P \perp PQ$.

考点： 几何变换综合题.

分析： (1) 利用旋转的性质以及等腰直角三角形得出 $\angle APP_1 = \angle BPP_2 = 45^\circ$, 进而得出答案;

(2) 根据题意得出 $\triangle PAP_1$ 和 $\triangle PBP_2$ 均为顶角为 α 的等腰三角形, 进而得出 $\angle P_1PP_2 = \angle PAP_2 = \alpha$, 求出 $\triangle P_2P_1P \sim \triangle P_2PA$;

(3) 首先连结 QB, 得出 $Rt\triangle QBE \cong Rt\triangle QBF$, 利用 $\angle P_1PQ = 180^\circ - \angle APP_1 - \angle QPB$ 求出即可.

解答: (1) 解: 由旋转的性质得: $AP = AP_1$, $BP = BP_2$.

$$\because \alpha = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle PAP_1$ 和 $\triangle PBP_2$ 均为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle APP_1 = \angle BPP_2 = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle P_1PP_2 = 180^\circ - \angle APP_1 - \angle BPP_2 = 90^\circ;$$

(2) 证明: 由旋转的性质可知 $\triangle PAP_1$ 和 $\triangle PBP_2$ 均为顶角为 α 的等腰三角形,

$$\therefore \angle APP_1 = \angle BPP_2 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \angle P_1PP_2 = 180^\circ - (\angle APP_1 + \angle BPP_2) = 180^\circ - 2 \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \alpha,$$

在 $\triangle PP_2P_1$ 和 $\triangle P_2PA$ 中, $\angle P_1PP_2 = \angle PAP_2 = \alpha$,

$$\text{又} \because \angle PP_2P_1 = \angle AP_2P,$$

$$\therefore \triangle P_2P_1P \sim \triangle P_2PA.$$

(3) 证明: 如图, 连接 QB.

$\because l_1, l_2$ 分别为 PB, P_2B 的中垂线,

$$\therefore EB = \frac{1}{2}BP, FB = \frac{1}{2}BP_2.$$

又 $BP = BP_2$,

$$\therefore EB = FB.$$

在 $Rt\triangle QBE$ 和 $Rt\triangle QBF$ 中,

$$\begin{cases} EB = FB \\ QB = QB \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle QBE \cong \text{Rt}\triangle QBF,$$

$$\therefore \angle QBE = \angle QBF = \frac{1}{2} \angle PBP_2 = \frac{\alpha}{2},$$

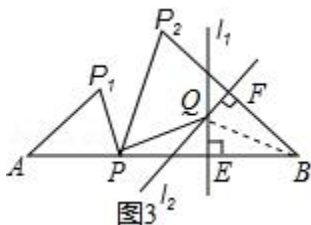
由中垂线性质得: $QP = QB$,

$$\therefore \angle QPB = \angle QBE = \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{由 (2) 知 } \angle APP_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \angle P_1PQ = 180^\circ - \angle APP_1 - \angle QPB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ,$$

即 $P_1P \perp PQ$.



点评: 此题主要考查了几何变换综合以及相似三角形的判定和全等三角形的判定与性质等知识, 得出 $\text{Rt}\triangle QBE \cong \text{Rt}\triangle QBF$ 是解题关键.

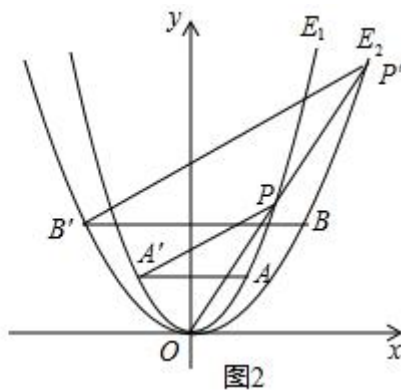
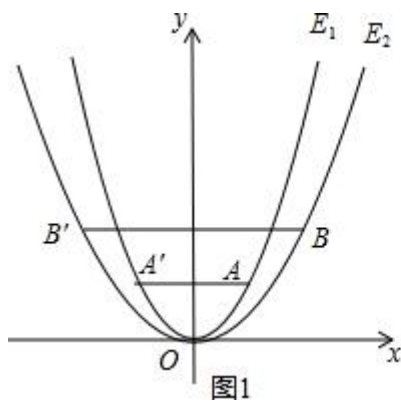
六、解答题 (本题满分 15 分)

21. (15 分) (2015•益阳) 已知抛物线 $E_1: y = x^2$ 经过点 A (1, m), 以原点为顶点的抛物线 E_2 经过点 B (2, 2), 点 A、B 关于 y 轴的对称点分别为点 A', B'.

(1) 求 m 的值及抛物线 E_2 所表示的二次函数的表达式;

(2) 如图 1, 在第一象限内, 抛物线 E_1 上是否存在点 Q, 使得以点 Q、B、B' 为顶点的三角形为直角三角形? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 如图 2, P 为第一象限内的抛物线 E_1 上与点 A 不重合的一点, 连接 OP 并延长与抛物线 E_2 相交于点 P', 求 $\triangle PAA'$ 与 $\triangle P'BB'$ 的面积之比.



考点： 二次函数综合题.

分析： (1) 直接将 (2, 2) 代入函数解析式进而求出 a 的值;

(2) 由题意可得, 在第一象限内, 抛物线 E_1 上存在点 Q, 使得 $\triangle QBB'$ 为直角三角形, 由图象可知直角顶点只能为点 B 或点 Q, 分别利用当点 B 为直角顶点时以及当点 Q 为直角顶点时求出 Q 点坐标即可;

(3) 首先设 $P(c, c^2)$ 、 $P'(d, \frac{1}{2}d^2)$, 进而得出 c 与 d 的关系, 再表示出 $\triangle PAA'$ 与 $\triangle P'BB'$ 的面积进而得出答案.

解答： 解: (1) $\because$ 抛物线 E_1 经过点 A (1, m),

$$\therefore m = 1^2 = 1.$$

$\because$ 抛物线 E_2 的顶点在原点, 可设它对应的函数表达式为 $y = ax^2$ ($a \neq 0$),

又 $\because$ 点 B (2, 2) 在抛物线 E_2 上,

$$\therefore 2 = a \times 2^2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线 } E_2 \text{ 所对应的二次函数表达式为 } y = \frac{1}{2}x^2.$$

(2) 如图 1, 假设在第一象限内, 抛物线 E_1 上存在点 Q, 使得 $\triangle QBB'$ 为直角三角形,

由图象可知直角顶点只能为点 B 或点 Q.

①当点 B 为直角顶点时，过 B 作 $QB \perp BB'$ 交抛物线 E_1 于 Q，

则点 Q 与 B 的横坐标相等且为 2，将 $x=2$ 代入 $y=x^2$ 得 $y=4$ ，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(2, 4)$ 。

②当点 Q 为直角顶点时，则有 $QB'^2 + QB^2 = B'B^2$ ，过点 Q 作 $GQ \perp BB'$ 于 G，

设点 Q 的坐标为 (t, t^2) ($t > 0$)，

则有 $(t+2)^2 + (t^2-2)^2 + (2-t)^2 + (t^2-2)^2 = 4$ ，

整理得： $t^4 - 3t^2 = 0$ ，

$\because t > 0$ ， $\therefore t^2 - 3 = 0$ ，解得 $t_1 = \sqrt{3}$ ， $t_2 = -\sqrt{3}$ (舍去)，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(\sqrt{3}, 3)$ ，

综合①②，存在符合条件的点 Q 坐标为 $(2, 4)$ 与 $(\sqrt{3}, 3)$ ；

(3) 如图 2，过点 P 作 $PC \perp x$ 轴，垂足为点 C，PC 交直线 AA' 于点 E，

过点 P' 作 $P'D \perp x$ 轴，垂足为点 D，P'D 交直线 BB' 于点 F，

依题意可设 $P(c, c^2)$ 、 $P'(d, \frac{1}{2}d^2)$ ($c > 0$ ， $c \neq d$)，

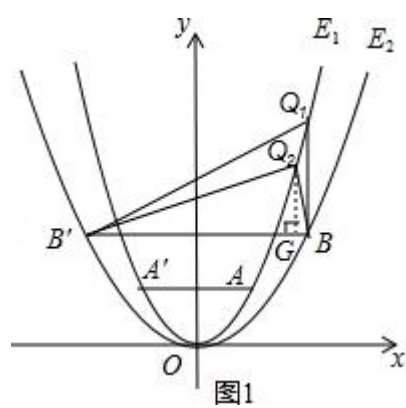
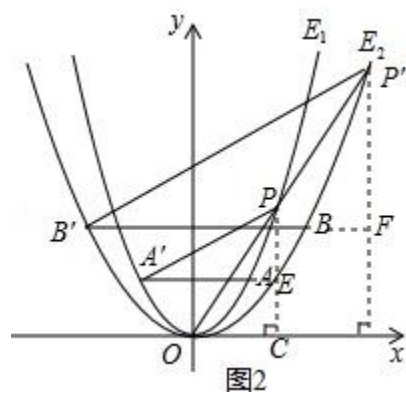
$\because \tan \angle POC = \tan \angle P'OD$ ，

$$\therefore \frac{c^2}{c} = \frac{\frac{1}{2}d^2}{d},$$

$\therefore d = 2c$ 。

$\because AA' = 2$ ， $BB' = 4$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle PAA'}}{S_{\triangle P'BB'}} = \frac{\frac{1}{2}AA' \cdot PE}{\frac{1}{2}BB' \cdot P'F} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times |c^2 - 1|}{\frac{1}{2} \times 4 \times |\frac{1}{2}d^2 - 2|} = \frac{|c^2 - 1|}{2 \times |2c^2 - 2|} = \frac{1}{4}.$$



点评: 此题主要考查了二次函数综合以及直角三角形的性质和三角形面积求法, 根据题意利用分类讨论得出是解题关键.