

2014 年湖南省益阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (4 分) (2014•益阳) 四个实数 -2 , 0 , $-\sqrt{2}$, 1 中，最大的实数是 ()

- A. -2 B. 0 C. $-\sqrt{2}$ D. 1

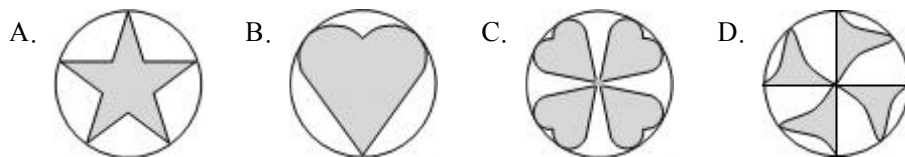
2. (4 分) (2014•益阳) 下列式子化简后的结果为 x^6 的是 ()

- A. x^3+x^3 B. $x^3 \cdot x^3$ C. $(x^3)^3$ D. $x^{12} \div x^2$

3. (4 分) (2014•益阳) 小玲在一次班会中参与知识抢答活动，现有语文题 6 个，数学题 5 个，综合题 9 个，她从中随机抽取 1 个，抽中数学题的概率是 ()

- A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

4. (4 分) (2014•益阳) 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



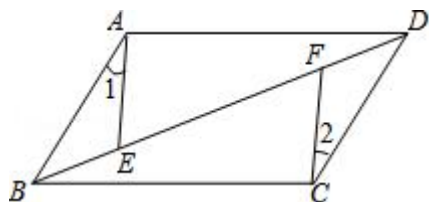
5. (4 分) (2014•益阳) 一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 总有实数根，则 m 应满足的条件是 ()

- A. $m > 1$ B. $m = 1$ C. $m < 1$ D. $m \leq 1$

6. (4 分) (2014•益阳) 正比例函数 $y = 6x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象的交点位于 ()

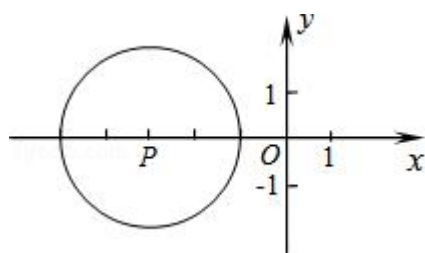
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第一、三象限

7. (4 分) (2014•益阳) 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， E , F 是对角线 BD 上的两点，如果添加一个条件使 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，则添加的条件不能是 ()



- A. $AE = CF$ B. $BE = FD$ C. $BF = DE$ D. $\angle 1 = \angle 2$

8. (4 分) (2014•益阳) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，半径为 2 的 $\odot P$ 的圆心 P 的坐标为 $(-3, 0)$ ，将 $\odot P$ 沿 x 轴正方向平移，使 $\odot P$ 与 y 轴相切，则平移的距离为 ()



- A. 1 B. 1 或 5 C. 3 D. 5

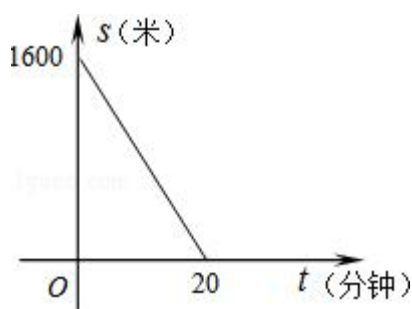
二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．把答案填在答题卡中对应题号后的横线上）

9. （4 分）（2014•益阳）若 $x^2 - 9 = (x - 3)(x + a)$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

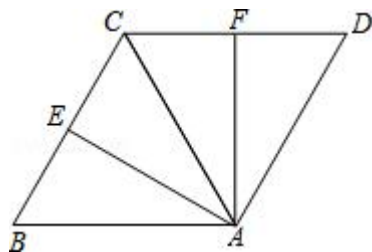
10. （4 分）（2014•益阳）分式方程 $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{2x}$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. （4 分）（2014•益阳）小斌所在的课外活动小组在大课间活动中练习立定跳远，成绩如下（单位：米）：1.96, 2.16, 2.04, 2.20, 1.98, 2.22, 2.32，则这组数据的中位数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 米.

12. （4 分）（2014•益阳）小明放学后步行回家，他离家的路程 s （米）与步行时间 t （分钟）的函数图象如图所示，则他步行回家的平均速度是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 米/分钟.



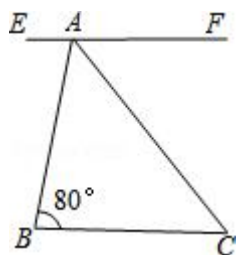
13. （4 分）（2014•益阳）如图，将等边 $\triangle ABC$ 绕顶点 A 顺时针方向旋转，使边 AB 与 AC 重合得 $\triangle ACD$ ， BC 的中点 E 的对应点为 F ，则 $\angle EAF$ 的度数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



三、解答题（本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

14. （6 分）（2014•益阳）计算： $|-3| + 3^0 - \sqrt[3]{27}$.

15. (6分) (2014•益阳) 如图, $EF \parallel BC$, AC 平分 $\angle BAF$, $\angle B = 80^\circ$. 求 $\angle C$ 的度数.



四、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

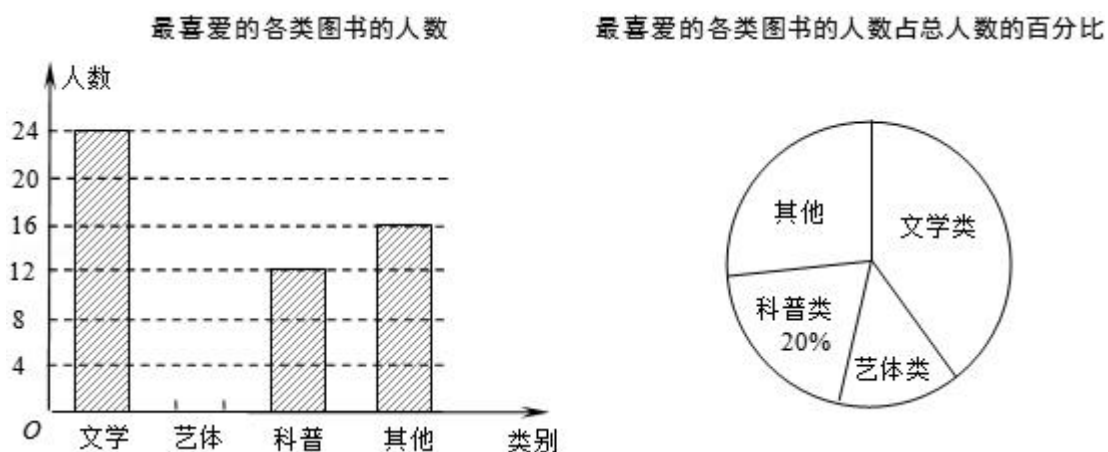
16. (8分) (2014•益阳) 先化简, 再求值: $(\frac{1}{x-2} + 2)(x-2) + (x-1)^2$, 其中 $x = \sqrt{3}$.

17. (8分) (2014•益阳) 某校为了开阔学生的视野, 积极组织学生参加课外读书活动. “放飞梦想”读书小组协助老师随机抽取本校的部分学生, 调查他们最喜爱的图书类别 (图书分为文学类、艺体类、科普类、其他等四类), 并将调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图, 请你结合图中的信息解答下列问题:

(1) 求被调查的学生人数;

(2) 补全条形统计图;

(3) 已知该校有 1200 名学生, 估计全校最喜爱文学类图书的学生有多少人?

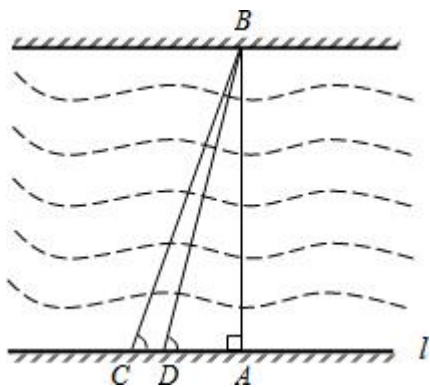


18. (8分) (2014•益阳) “中国 – 益阳”网上消息, 益阳市为了改善市区交通状况, 计划在康富路的北端修建通往资江北岸的新大桥. 如图, 新大桥的两端位于 A、B 两点, 小张为了测量 A、B 之间的河宽, 在垂直于新大桥 AB 的直线型道路 l 上测得如下数据: $\angle BAD=76.1^\circ$, $\angle BCA=68.2^\circ$, $CD=82$ 米. 求 AB 的长 (精确到 0.1 米) .

参考数据:

$$\sin 76.1^\circ \approx 0.97, \cos 76.1^\circ \approx 0.24, \tan 76.1^\circ \approx 4.0;$$

$$\sin 68.2^\circ \approx 0.93, \cos 68.2^\circ \approx 0.37, \tan 68.2^\circ \approx 2.5.$$



五、解答题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

19. (10分) (2014•益阳) 某电器超市销售每台进价分别为 200 元、170 元的 A、B 两种型号的电风扇, 下表是近两周的销售情况:

销售时段	销售数量		销售收入
	A 种型号	B 种型号	
第一周	3 台	5 台	1800 元
第二周	4 台	10 台	3100 元

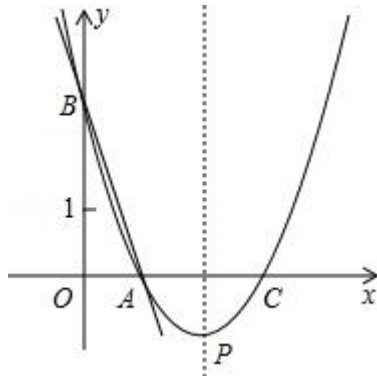
- (进价、售价均保持不变, 利润=销售收入 – 进货成本)
- 求 A、B 两种型号的电风扇的销售单价;
 - 若超市准备用不多于 5400 元的金额再采购这两种型号的电风扇共 30 台, 求 A 种型号的电风扇最多能采购多少台?
 - 在 (2) 的条件下, 超市销售完这 30 台电风扇能否实现利润为 1400 元的目标? 若能, 请给出相应的采购方案; 若不能, 请说明理由.

20. (10 分) (2014•益阳) 如图, 直线 $y = -3x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B , 抛物线 $y = a(x - 2)^2 + k$ 经过点 A 、 B , 并与 x 轴交于另一点 C , 其顶点为 P .

(1) 求 a , k 的值;

(2) 抛物线的对称轴上有一点 Q , 使 $\triangle ABQ$ 是以 AB 为底边的等腰三角形, 求 Q 点的坐标;

(3) 在抛物线及其对称轴上分别取点 M 、 N , 使以 A , C , M , N 为顶点的四边形为正方形, 求此正方形的边长.



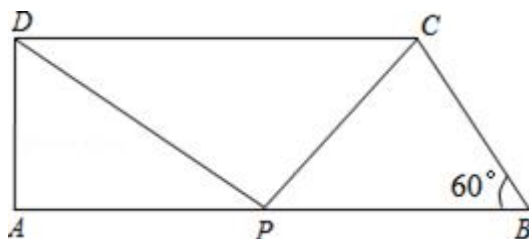
六、解答题 (本题满分 12 分)

21. (12 分) (2014•益阳) 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 10$, $BC = 4$, 点 P 沿线段 AB 从点 A 向点 B 运动, 设 $AP = x$.

(1) 求 AD 的长;

(2) 点 P 在运动过程中, 是否存在以 A 、 P 、 D 为顶点的三角形与以 P 、 C 、 B 为顶点的三角形相似? 若存在, 求出 x 的值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 设 $\triangle ADP$ 与 $\triangle PCB$ 的外接圆的面积分别为 S_1 、 S_2 , 若 $S = S_1 + S_2$, 求 S 的最小值.



2014 年湖南省益阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. （4 分）（2014•益阳）四个实数 -2 ， 0 ， $-\sqrt{2}$ ， 1 中，最大的实数是（ ）

- A. -2 B. 0 C. $-\sqrt{2}$ D. 1

考点：实数大小比较．

分析：根据正数大于 0，0 大于负数，正数大于负数，比较即可．

解答：解： $\because -2 < -\sqrt{2} < 0 < 1$ ，
 $\therefore$ 四个实数中，最大的实数是 1．
故选 D．

点评：本题考查了实数大小比较，关键要熟记：正实数都大于 0，负实数都小于 0，正实数大于一切负实数，两个负实数绝对值大的反而小．

2. （4 分）（2014•益阳）下列式子化简后的结果为 x^6 的是（ ）

- A. x^3+x^3 B. $x^3 \cdot x^3$ C. $(x^3)^3$ D. $x^{12} \div x^2$

考点：同底数幂的除法；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方．

分析：根据同底数幂的运算法则进行计算即可．

解答：解：A、原式= $2x^3$ ，故本选项错误；
B、原式= x^6 ，故本选项错误；
C、原式= x^9 ，故本选项错误；
D、原式= $x^{12-2}=x^{10}$ ，故本选项错误．
故选 B．

点评：本题考查的是同底数幂的除法，熟知同底数幂的除法及乘方法则、合并同类项的法则、幂的乘方与积的乘方法则是解答此题的关键．

3. （4 分）（2014•益阳）小玲在一次班会中参与知识抢答活动，现有语文题 6 个，数学题 5 个，综合题 9 个，她从中随机抽取 1 个，抽中数学题的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

考点：概率公式．

分析：由小玲在一次班会中参与知识抢答活动，现有语文题 6 个，数学题 5 个，综合题 9 个，直接利用概率公式求解即可求得答案．

解答：解： $\because$ 小玲在一次班会中参与知识抢答活动，现有语文题 6 个，数学题 5 个，综合题 9 个，

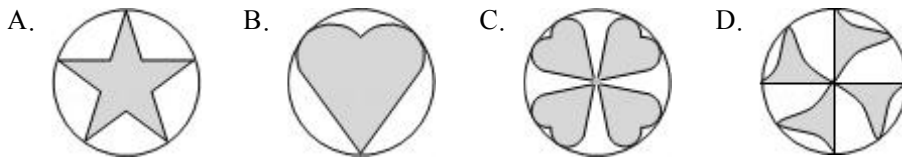
$\therefore$ 她从中随机抽取 1 个，抽中数学题的概率是： $\frac{5}{6+5+9}=\frac{1}{4}$ ．

故选 C.

点评:

此题考查了概率公式的应用. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

4. (4 分) (2014•益阳) 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



考点:

中心对称图形; 轴对称图形.

分析:

根据中心对称图形的定义旋转 180° 后能够与原图形完全重合即是中心对称图形, 以及轴对称图形的定义即可判断出.

解答:

解: A、 $\therefore$ 此图形旋转 180° 后不能与原图形重合, $\therefore$ 此图形不是中心对称图形, 是轴对称图形, 故此选项错误;

B、 $\therefore$ 此图形旋转 180° 后不能与原图形重合, $\therefore$ 此图形不是中心对称图形, 是轴对称图形, 故此选项错误;

C、此图形旋转 180° 后能与原图形重合, 此图形是中心对称图形, 也是轴对称图形, 故此选项正确;

D、 $\therefore$ 此图形旋转 180° 后能与原图形重合, $\therefore$ 此图形是中心对称图形, 不是轴对称图形, 故此选项错误.

故选 C.

点评:

此题主要考查了中心对称图形与轴对称的定义, 根据定义得出图形形状是解决问题的关键.

5. (4 分) (2014•益阳) 一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 总有实数根, 则 m 应满足的条件是 ()

- A. $m > 1$ B. $m = 1$ C. $m < 1$ D. $m \leq 1$

考点:

根的判别式.

分析:

根据根的判别式, 令 $\Delta \geq 0$, 建立关于 m 的不等式, 解答即可.

解答:

解: $\therefore$ 方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 总有实数根,

$\therefore \Delta \geq 0$,

即 $4 - 4m \geq 0$,

$\therefore -4m \geq -4$,

$\therefore m \leq 1$.

故选 D.

点评:

本题考查了根的判别式, 一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系:

- (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根;
- (2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根;
- (3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

6. (4 分) (2014•益阳) 正比例函数 $y = 6x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象的交点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第一、三象限

考点: 反比例函数与一次函数的交点问题.

专题: 计算题.

分析:

根据反比例函数与一次函数的交点问题解方程组 $\begin{cases} y=6x \\ y=\frac{6}{x} \end{cases}$ 即可得

到两函数的交点坐标, 然后根据交点坐标进行判断.

解答:

解: 解方程组 $\begin{cases} y=6x \\ y=\frac{6}{x} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-6 \end{cases}$,

所以正比例函数 $y=6x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象的交点坐

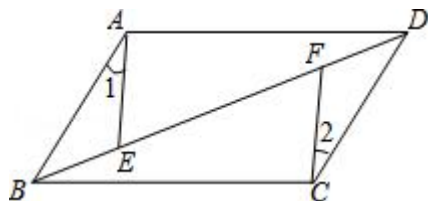
标为 $(1, 6)$, $(-1, -6)$.

故选 D.

点评:

本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题: 反比例函数与一次函数图象的交点坐标满足两函数解析式.

7. (4分) (2014•益阳) 如图, 平行四边形 ABCD 中, E, F 是对角线 BD 上的两点, 如果不能添加一个条件使 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 则添加的条件 * * 是 ()



- A. $AE=CF$ B. $BE=FD$ C. $BF=DE$ D. $\angle 1=\angle 2$

考点: 平行四边形的性质; 全等三角形的判定.

分析: 利用平行四边形的性质以及全等三角形的判定分别分得出即可.

解答: 解: A、当 $AE=CF$ 无法得出 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 故此选项符合题意;

B、当 $BE=FD$,

$\because$ 平行四边形 ABCD 中,

$\therefore AB=CD$, $\angle ABE=\angle CDF$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中

$$\begin{cases} AB=CD \\ \angle ABE=\angle CDF, \\ BE=DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ (SAS), 故此选项错误;

C、当 $BF=ED$,

$\therefore BE=DF$,

$\because$ 平行四边形 ABCD 中,

$\therefore AB=CD$, $\angle ABE=\angle CDF$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中

$$\begin{cases} AB=CD \\ \angle ABE=\angle CDF, \\ BE=DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ (SAS), 故此选项错误;

D、当 $\angle 1 = \angle 2$,

$\therefore$ 平行四边形ABCD中,

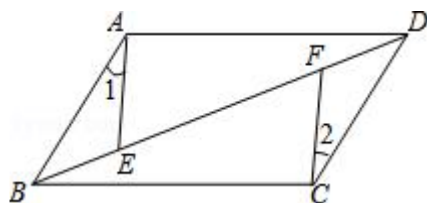
$\therefore AB=CD, \angle ABE=\angle CDF$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ AB=CD \\ \angle ABE=\angle CDF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ (ASA), 故此选项错误;

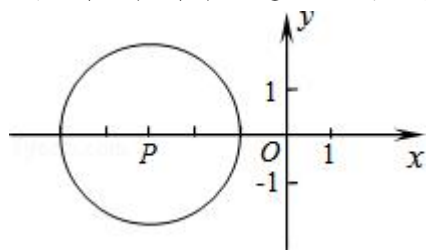
故选: A.



点评:

此题主要考查了平行四边形的性质以及全等三角形的判定等知识, 熟练掌握全等三角形的判定方法是解题关键.

8. (4分) (2014•益阳) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 半径为 2 的 $\odot P$ 的圆心 P 的坐标为 $(-3, 0)$, 将 $\odot P$ 沿 x 轴正方向平移, 使 $\odot P$ 与 y 轴相切, 则平移的距离为 ()



A. 1

B. 1 或 5

C. 3

D. 5

考点:

直线与圆的位置关系; 坐标与图形性质.

分析:

平移分在 y 轴的左侧和 y 轴的右侧两种情况写出答案即可.

解答:

解: 当 $\odot P$ 位于 y 轴的左侧且与 y 轴相切时, 平移的距离为 1;

当 $\odot P$ 位于 y 轴的右侧且与 y 轴相切时, 平移的距离为 5.

故选 B.

点评:

本题考查了直线与圆的位置关系, 解题的关键是了解当圆与直线相切时, 点到圆心的距离等于圆的半径.

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中对应题号后的横线上)

9. (4分) (2014•益阳) 若 $x^2 - 9 = (x - 3)(x + a)$, 则 $a = \underline{3}$.

考点: 因式分解-运用公式法
 分析: 直接利用平方差公式进行分解得出即可.
 解答: 解: $\because x^2 - 9 = (x+3)(x-3) = (x-3)(x+a)$,
 $\therefore a=3$.
 故答案为: 3.
 点评: 此题主要考查了公式法分解因式, 熟练掌握平方差公式是解题关键.

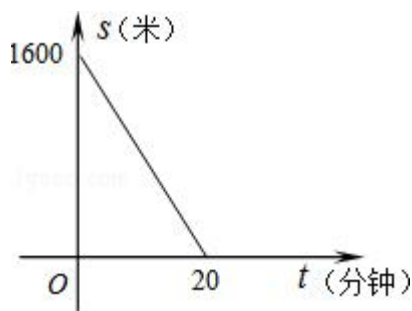
10. (4 分) (2014•益阳) 分式方程 $\frac{2}{x-3} - \frac{3}{2x} = \frac{3}{2x}$ 的解为 $x = -9$.

考点: 解分式方程.
 专题: 计算题.
 分析: 分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.
 解答: 解: 去分母得: $4x = 3x - 9$,
 解得: $x = -9$,
 经检验 $x = -9$ 是分式方程的解.
 故答案为: $x = -9$.
 点评: 此题考查了解分式方程, 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解. 解分式方程一定要注意要验根.

11. (4 分) (2014•益阳) 小斌所在的课外活动小组在大课间活动中练习立定跳远, 成绩如下 (单位: 米): 1.96, 2.16, 2.04, 2.20, 1.98, 2.22, 2.32, 则这组数据的中位数是 2.16 米.

考点: 中位数.
 分析: 根据中位数的概念求解.
 解答: 解: 这组数据按照从小到大的顺序排列为: 1.96, 1.98, 2.04, 2.16, 2.20, 2.22, 2.32,
 则中位数为: 2.16.
 故答案为: 2.16.
 点评: 本题考查了中位数的知识: 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数; 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

12. (4 分) (2014•益阳) 小明放学后步行回家, 他离家的路程 s (米) 与步行时间 t (分钟) 的函数图象如图所示, 则他步行回家的平均速度是 80 米/分钟.



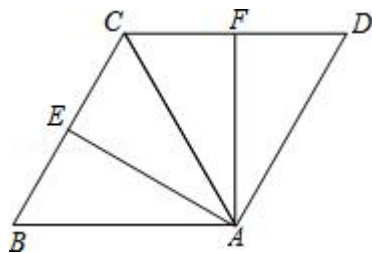
考点: 函数的图象

分析: 他步行回家的平均速度=总路程÷总时间，据此解答即可．

解答: 解：由图知，他离家的路程为 1600 米，步行时间为 20 分钟，
则他步行回家的平均速度是：1600÷20=80（米/分钟），
故答案为：80．

点评: 本题考查利用函数的图象解决实际问题，正确理解函数图象横纵坐标表示的意义，理解问题的过程，就能够通过图象得到函数问题的相应解决．

13. （4 分）（2014•益阳）如图，将等边△ABC 绕顶点 A 顺时针方向旋转，使边 AB 与 AC 重合得△ACD，BC 的中点 E 的对应点为 F，则∠EAF 的度数是 60°．



考点: 旋转的性质；等边三角形的性质

分析: 根据等边三角形的性质以及旋转的性质得出旋转角，进而得出∠EAF 的度数．

解答: 解：∵将等边△ABC 绕顶点 A 顺时针方向旋转，使边 AB 与 AC 重合得△ACD，BC 的中点 E 的对应点为 F，
∴旋转角为 60°，E，F 是对应点，
则∠EAF 的度数为：60°．
故答案为：60°．

点评: 此题主要考查了等边三角形的性质以及旋转的性质，得出旋转角的度数是解题关键．

三、解答题（本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

14. （6 分）（2014•益阳）计算： $|-3|+3^0-\sqrt[3]{27}$ ．

考点: 实数的运算；零指数幂

专题: 计算题．

分析: 原式第一项利用绝对值的代数意义化简，第二项利用零指数幂法则计算，

最后一项利用立方根定义化简，计算即可得到结果.

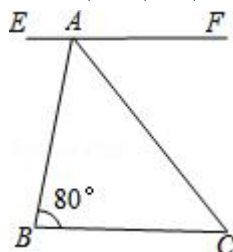
解答:

解: 原式 $=3+1-3=1$.

点评:

此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

15. (6分) (2014•益阳) 如图, $EF \parallel BC$, AC 平分 $\angle BAF$, $\angle B=80^\circ$. 求 $\angle C$ 的度数.



考点:

平行线的性质

分析:

根据两直线平行, 同旁内角互补求出 $\angle BAF$, 再根据角平分线的定义求出 $\angle CAF$, 然后根据两直线平行, 内错角相等解答.

解答:

解: $\because EF \parallel BC$,

$\therefore \angle BAF = 180^\circ - \angle B = 100^\circ$,

$\because AC$ 平分 $\angle BAF$,

$\therefore \angle CAF = \frac{1}{2} \angle BAF = 50^\circ$,

$\because EF \parallel BC$,

$\therefore \angle C = \angle CAF = 50^\circ$.

点评:

本题考查了平行线的性质, 角平分线的定义, 熟记性质并准确识图是解题的关键.

四、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

16. (8分) (2014•益阳) 先化简, 再求值: $\frac{1}{x-2} + 2(x-2) + (x-1)^2$, 其中 $x=\sqrt{3}$.

考点:

分式的化简求值

专题:

计算题.

分析:

原式第一项利用乘法分配律计算, 第二项利用完全平方公式展开, 去括号合并得到最简结果, 将 x 的值代入计算即可求出值.

解答:

解: 原式 $=1+2x-4+x^2-2x+1=x^2-2$,

当 $x=\sqrt{3}$ 时, 原式 $=3-2=1$.

点评:

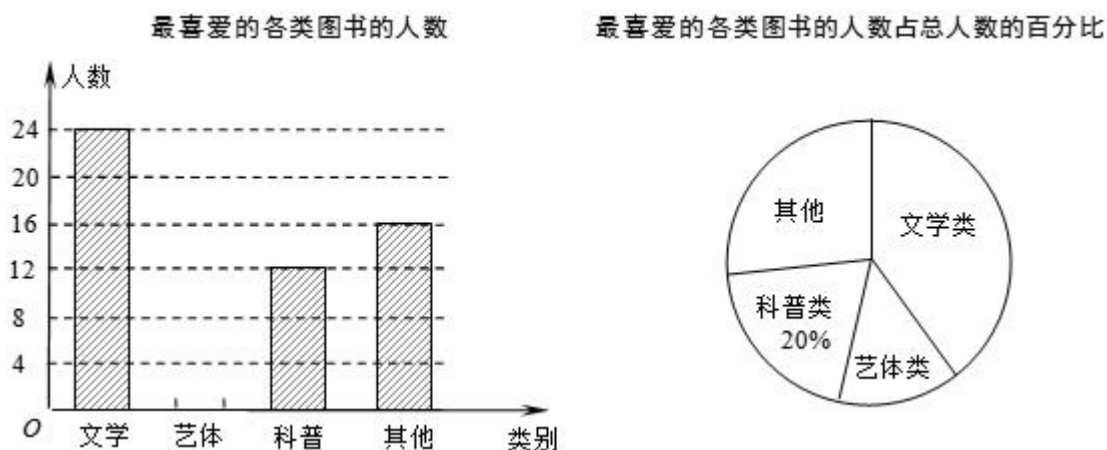
此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

17. (8分) (2014•益阳) 某校为了开阔学生的视野, 积极组织学生参加课外读书活动. “放飞梦想”读书小组协助老师随机抽取本校的部分学生, 调查他们最喜爱的图书类别 (图书分为文学类、艺体类、科普类、其他等四类), 并将调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图, 请你结合图中的信息解答下列问题:

(1) 求被调查的学生人数;

(2) 补全条形统计图;

(3) 已知该校有 1200 名学生，估计全校最喜爱文学类图书的学生有多少人？



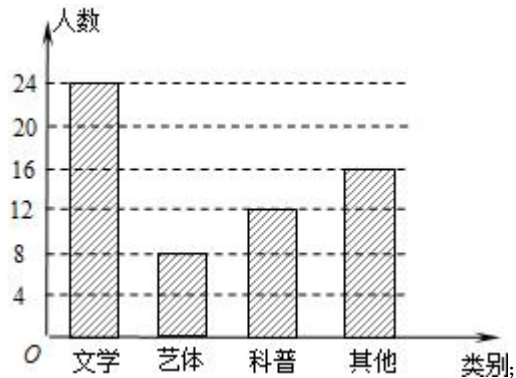
考点: 条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

分析:

- (1) 利用科普类的人数以及所占百分比，即可求出被调查的学生人数；
- (2) 利用 (1) 中所求得出喜欢艺体类的学生数进而画出图形即可；
- (3) 首先求出样本中喜爱文学类图书所占百分比，进而估计全校最喜爱文学类图书的学生数.

解答: 解：(1) 被调查的学生人数为： $12 \div 20\% = 60$ (人) ；

(2) 喜欢艺体类的学生数为： $60 - 24 - 12 - 16 = 8$ (人) ，
如图所示：



(3) 全校最喜爱文学类图书的学生约有： $1200 \times \frac{24}{60} = 480$ (人) .

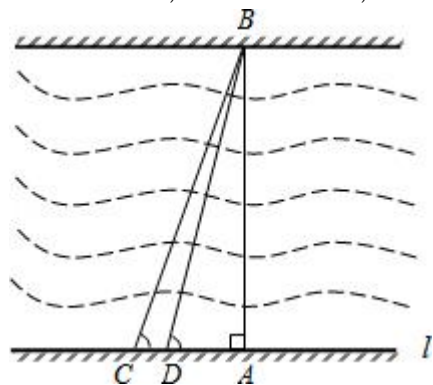
点评: 此题主要考查了条形统计图的应用以及扇形统计图应用、利用样本估计总体等知识，利用图形得出正确信息求出样本容量是解题关键.

18. (8 分) (2014•益阳) “中国 - 益阳”网上消息，益阳市为了改善市区交通状况，计划在康富路的北端修建通往资江北岸的新大桥. 如图，新大桥的两端位于 A、B 两点，小张为了测量 A、B 之间的河宽，在垂直于新大桥 AB 的直线型道路 l 上测得如下数据： $\angle BAD = 76.1^\circ$ ， $\angle BCA = 68.2^\circ$ ， $CD = 82$ 米. 求 AB 的长 (精确到 0.1 米) .

参考数据：

$\sin 76.1^\circ \approx 0.97$ ， $\cos 76.1^\circ \approx 0.24$ ， $\tan 76.1^\circ \approx 4.0$ ；

$\sin 68.2^\circ \approx 0.93$, $\cos 68.2^\circ \approx 0.37$, $\tan 68.2^\circ \approx 2.5$.



考点: 解直角三角形的应用

分析: 设 $AD=x$ 米, 则 $AC=(x+82)$ 米. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 根据三角函数得到 $AB=2.5(x+82)$, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 根据三角函数得到 $AB=4x$, 依此得到关于 x 的方程, 进一步即可求解.

解答: 解: 设 $AD=x$ 米, 则 $AC=(x+82)$ 米.

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \tan \angle BCA = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AB = AC \cdot \tan \angle BCA = 2.5(x+82).$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABD \text{ 中, } \tan \angle BDA = \frac{AB}{AD},$$

$$\therefore AB = AD \cdot \tan \angle BDA = 4x.$$

$$\therefore 2.5(x+82) = 4x,$$

$$\text{解得 } x = \frac{410}{3}.$$

$$\therefore AB = 4x = 4 \times \frac{410}{3} \approx 546.7.$$

答: AB 的长约为 546.7 米.

点评: 此题考查了解直角三角形的应用, 主要是三角函数的基本概念及运算, 关键是用数学知识解决实际问题.

五、解答题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

19. (10 分) (2014•益阳) 某电器超市销售每台进价分别为 200 元、170 元的 A、B 两种型号的电风扇, 下表是近两周的销售情况:

销售时段	销售数量		销售收入
	A 种型号	B 种型号	
第一周	3 台	5 台	1800 元
第二周	4 台	10 台	3100 元

(进价、售价均保持不变, 利润=销售收入-进货成本)

(1) 求 A、B 两种型号的电风扇的销售单价;

(2) 若超市准备用不多于 5400 元的金额再采购这两种型号的电风扇共 30 台, 求 A 种型号的电风扇最多能采购多少台?

(3) 在 (2) 的条件下, 超市销售完这 30 台电风扇能否实现利润为 1400 元的目标? 若能, 请给出相应的采购方案; 若不能, 请说明理由.

考点: 二元一次方程组的应用; 一元一次方程的应用; 一元一次不等式的应用.

分析: (1) 设 A、B 两种型号电风扇的销售单价分别为 x 元、 y 元, 根据 3 台 A 型号 5 台 B 型号的电扇收入 1800 元, 4 台 A 型号 10 台 B 型号的电扇收入 3100 元, 列方程组求解;

(2) 设采购 A 种型号电风扇 a 台, 则采购 B 种型号电风扇 $(30 - a)$ 台, 根据金额不多余 5400 元, 列不等式求解;

(3) 设利润为 1400 元, 列方程求出 a 的值为 20, 不符合 (2) 的条件, 可知不能实现目标.

解答: 解: (1) 设 A、B 两种型号电风扇的销售单价分别为 x 元、 y 元,

依题意得:
$$\begin{cases} 3x+5y=1800 \\ 4x+10y=3100 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x=250 \\ y=210 \end{cases},$$

答: A、B 两种型号电风扇的销售单价分别为 250 元、210 元;

(2) 设采购 A 种型号电风扇 a 台, 则采购 B 种型号电风扇 $(30 - a)$ 台. 依题意得: $200a+170(30 - a) \leq 5400$,

解得: $a \leq 10$.

答: 超市最多采购 A 种型号电风扇 10 台时, 采购金额不多于 5400 元;

(3) 依题意有: $(250 - 200)a + (210 - 170)(30 - a) = 1400$, 解得: $a = 20$,

$\therefore a > 10$,

$\therefore$ 在 (2) 的条件下超市不能实现利润 1400 元的目标.

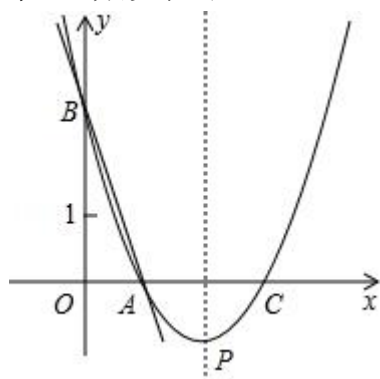
点评: 本题考查了二元一次方程组 and 一元一次不等式的应用, 解答本题的关键是读懂题意, 设出未知数, 找出合适的等量关系和不等关系, 列方程组和不等式求解.

20. (10 分) (2014•益阳) 如图, 直线 $y = -3x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A、B, 抛物线 $y = a(x - 2)^2 + k$ 经过点 A、B, 并与 x 轴交于另一点 C, 其顶点为 P.

(1) 求 a , k 的值;

(2) 抛物线的对称轴上有一点 Q, 使 $\triangle ABQ$ 是以 AB 为底边的等腰三角形, 求 Q 点的坐标;

(3) 在抛物线及其对称轴上分别取点 M、N, 使以 A、C、M、N 为顶点的四边形为正方形, 求此正方形的边长.



考点:

二次函数综合题

分析:

(1) 先求出直线 $y = -3x + 3$ 与 x 轴交点 A , 与 y 轴交点 B 的坐标, 再将 A 、 B 两点坐标代入 $y = a(x - 2)^2 + k$, 得到关于 a , k 的二元一次方程组, 解方程组即可求解;

(2) 设 Q 点的坐标为 $(2, m)$, 对称轴 $x = 2$ 交 x 轴于点 F , 过点 B 作 BE 垂直于直线 $x = 2$ 于点 E . 在 $Rt\triangle AQF$ 与 $Rt\triangle BQE$ 中, 用勾股定理分别表示出 $AQ^2 = AF^2 + QF^2 = 1 + m^2$, $BQ^2 = BE^2 + EQ^2 = 4 + (3 - m)^2$, 由 $AQ = BQ$, 得到方程 $1 + m^2 = 4 + (3 - m)^2$, 解方程求出 $m = 2$, 即可求得 Q 点的坐标;

(3) 当点 N 在对称轴上时, 由 NC 与 AC 不垂直, 得出 AC 为正方形的对角线, 根据抛物线的对称性及正方形的性质, 得到 M 点与顶点 $P(2, -1)$ 重合, N 点为点 P 关于 x 轴的对称点, 此时, $MF = NF = AF = CF = 1$, 且 $AC \perp MN$, 则四边形 $AMCN$ 为正方形, 在 $Rt\triangle AFN$ 中根据勾股定理即可求出正方形的边长.

解答:

解: (1) $\because$ 直线 $y = -3x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ,

$\therefore A(1, 0)$, $B(0, 3)$.

又 $\because$ 抛物线 $y = a(x - 2)^2 + k$ 经过点 $A(1, 0)$, $B(0, 3)$,

$$\therefore \begin{cases} a + k = 0 \\ 4a + k = 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1 \\ k = -1 \end{cases},$$

故 a , k 的值分别为 1 , -1 ;

(2) 设 Q 点的坐标为 $(2, m)$, 对称轴 $x = 2$ 交 x 轴于点 F , 过点 B 作 BE 垂直于直线 $x = 2$ 于点 E .

在 $Rt\triangle AQF$ 中, $AQ^2 = AF^2 + QF^2 = 1 + m^2$,

在 $Rt\triangle BQE$ 中, $BQ^2 = BE^2 + EQ^2 = 4 + (3 - m)^2$,

$\because AQ = BQ$,

$$\therefore 1 + m^2 = 4 + (3 - m)^2,$$

$$\therefore m = 2,$$

$\therefore Q$ 点的坐标为 $(2, 2)$;

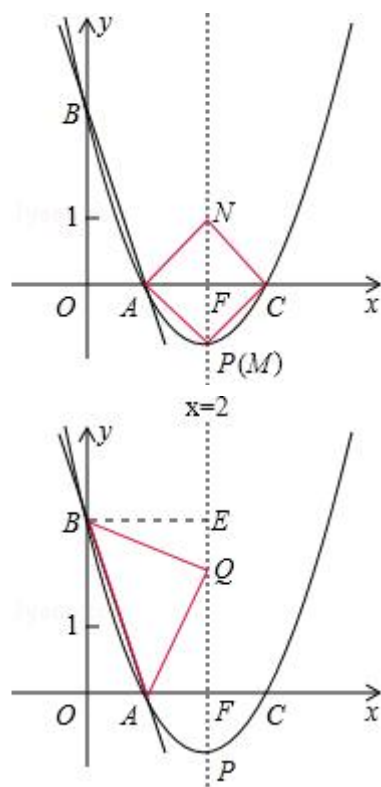
(3) 当点 N 在对称轴上时, NC 与 AC 不垂直, 所以 AC 应为正方形的对角线. 又 $\because$ 对称轴 $x = 2$ 是 AC 的中垂线,

$\therefore M$ 点与顶点 $P(2, -1)$ 重合, N 点为点 P 关于 x 轴的对称点, 其坐标为 $(2, 1)$.

此时, $MF = NF = AF = CF = 1$, 且 $AC \perp MN$,

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 为正方形.

在 $Rt\triangle AFN$ 中, $AN = \sqrt{AF^2 + NF^2} = \sqrt{2}$, 即正方形的边长为 $\sqrt{2}$.



点评:

本题是二次函数的综合题型，其中涉及到的知识点有二元一次方程组的解法，等腰三角形的性质，勾股定理，二次函数的性质，正方形的判定与性质，综合性较强，难度适中.

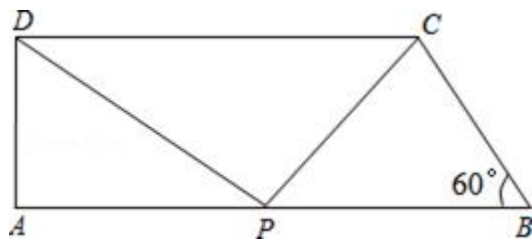
六、解答题 (本题满分 12 分)

21. (12 分) (2014•益阳) 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AD \perp AB$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 10$ ， $BC = 4$ ，点 P 沿线段 AB 从点 A 向点 B 运动，设 $AP = x$.

(1) 求 AD 的长；

(2) 点 P 在运动过程中，是否存在以 A 、 P 、 D 为顶点的三角形与以 P 、 C 、 B 为顶点的三角形相似？若存在，求出 x 的值；若不存在，请说明理由；

(3) 设 $\triangle ADP$ 与 $\triangle PCB$ 的外接圆的面积分别为 S_1 、 S_2 ，若 $S = S_1 + S_2$ ，求 S 的最小值.



考点:

相似形综合题.

分析:

(1) 过点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ，根据 $CE = BC \cdot \sin \angle B$ 求出 CE ，再根据 $AD = CE$ 即可求出 AD ；

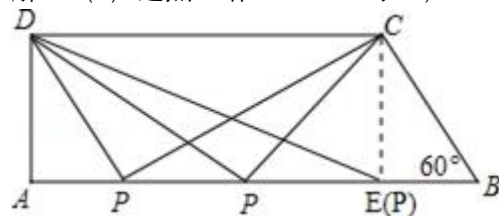
(2) 若以 A 、 P 、 D 为顶点的三角形与以 P 、 C 、 B 为顶点的三角形相似，则 $\triangle PCB$ 必有一个角是直角. 分两种情况讨论：①当 $\angle PCB = 90^\circ$ 时，求出 AP ，再根据在 $\text{Rt} \triangle ADP$ 中 $\angle DPA = 60^\circ$ ，得出 $\angle DPA = \angle B$ ，从而得到

$\triangle ADP \sim \triangle CPB$, ②当 $\angle CPB=90^\circ$ 时, 求出 $AP=3$, 根据 $\frac{AD}{PC} \neq \frac{AP}{PB}$ 且 $\frac{AD}{PB} \neq \frac{AP}{AC}$, 得出 $\triangle PCB$ 与 $\triangle ADP$ 不相似.

(3) 先求出 $S_1 = x \cdot \frac{12+x^2}{4}$, 再分两种情况讨论: ①当 $2 < x < 10$ 时, 作 BC 的垂直平分线交 BC 于 H , 交 AB 于 G ; 作 PB 的垂直平分线交 PB 于 N , 交 GH 于 M , 连结 BM , 在 $Rt\triangle GBH$ 中求出 BG 、 BN 、 GN , 在 $Rt\triangle GMN$ 中, 求出 $MN = \frac{\sqrt{3}}{3} (\frac{1}{2}x - 1)$, 在 $Rt\triangle BMN$ 中, 求出 $BM^2 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{76}{3}$, 最后根据 $S_1 = x \cdot BM^2$ 代入计算即可. ②当 $0 < x \leq 2$ 时, $S_2 = x (\frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{76}{3})$, 最后根据 $S = S_1 + S_2 = \frac{7}{12}x (x - \frac{32}{7})^2 + \frac{113}{7}x$ 即可得出 S 的最小值.

解答:

解: (1) 过点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ,



在 $Rt\triangle BCE$ 中,

$\because \angle B=60^\circ$, $BC=4$,

$$\therefore CE = BC \cdot \sin \angle B = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AD = CE = 2\sqrt{3}.$$

(2) 存在. 若以 A 、 P 、 D 为顶点的三角形与以 P 、 C 、 B 为顶点的三角形相似,

则 $\triangle PCB$ 必有一个角是直角.

①当 $\angle PCB=90^\circ$ 时, 在 $Rt\triangle PCB$ 中, $BC=4$, $\angle B=60^\circ$, $PB=8$,

$$\therefore AP = AB - PB = 2.$$

又由 (1) 知 $AD=2\sqrt{3}$, 在 $Rt\triangle ADP$ 中, $\tan \angle DPA = \frac{AD}{AP} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$$\therefore \angle DPA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DPA = \angle CPB,$$

$$\therefore \triangle ADP \sim \triangle CPB,$$

$\therefore$ 存在 $\triangle ADP$ 与 $\triangle CPB$ 相似, 此时 $x=2$.

② $\because$ 当 $\angle CPB=90^\circ$ 时, 在 $Rt\triangle PCB$ 中, $\angle B=60^\circ$, $BC=4$,

$$\therefore PB=2, PC=2\sqrt{3},$$

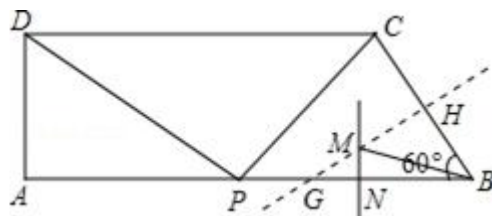
$$\therefore AP=3.$$

则 $\frac{AD}{PC} \neq \frac{AP}{PB}$ 且 $\frac{AD}{PB} \neq \frac{AP}{AC}$, 此时 $\triangle PCB$ 与 $\triangle ADP$ 不相似.

(3) 如图, 因为 $\text{Rt}\triangle ADP$ 外接圆的直径为斜边 PD , 则 $S_1 = x \cdot \left(\frac{PD}{2}\right)$

$$= x \cdot \frac{12+x^2}{4},$$

①当 $2 < x < 10$ 时, 作 BC 的垂直平分线交 BC 于 H , 交 AB 于 G ;
作 PB 的垂直平分线交 PB 于 N , 交 GH 于 M , 连结 BM . 则 BM 为 $\triangle PCB$ 外接圆的半径.



在 $\text{Rt}\triangle GBH$ 中, $BH = \frac{1}{2}BC = 2$, $\angle MGB = 30^\circ$,

$$\therefore BG = 4,$$

$$\therefore BN = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}(10 - x) = 5 - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore GN = BG - BN = \frac{1}{2}x - 1.$$

在 $\text{Rt}\triangle GMN$ 中, $\therefore MN = GN \cdot \tan \angle MGN = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$.

在 $\text{Rt}\triangle BMN$ 中, $BM^2 = MN^2 + BN^2 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{76}{3}$,

$$\therefore S_1 = x \cdot BM^2 = x \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{76}{3}\right).$$

② $\therefore$ 当 $0 < x \leq 2$ 时, $S_2 = x \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{76}{3}\right)$ 也成立,

$$\therefore S = S_1 + S_2 = x \cdot \frac{12+x^2}{4} + x \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{76}{3}\right) = \frac{7}{12}x \left(x - \frac{32}{7}\right)^2 + \frac{113}{7}x.$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{32}{7} \text{ 时, } S = S_1 + S_2 \text{ 取得最小值 } \frac{113}{7}x.$$

点评:

此题考查了相似形综合, 用到的知识点是相似三角形的性质与判定、二次函数的最值、勾股定理, 关键是根据题意画出图形构造相似三角形, 注意分类讨论.