

黑龙江省大庆市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. $2\cos 60^\circ = (\quad)$

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】【分析】直接利用特殊角的三角函数值进行计算即可得出答案.

【详解】 $2\cos 60^\circ$

$$= 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 1,$$

故选 A.

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值, 熟记特殊角的三角函数值是解题的关键.

2. 一种花粉颗粒直径约为 0.0000065 米, 数字 0.0000065 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.65×10^{-5} B. 65×10^{-7} C. 6.5×10^{-6} D. 6.5×10^{-5}

【答案】C

【解析】【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【详解】0.0000065 的小数点向右移动 6 位得到 6.5,

所以数字 0.0000065 用科学记数法表示为 6.5×10^{-6} ,

故选 C.

【点睛】本题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. 已知两个有理数 a , b , 如果 $ab < 0$ 且 $a+b > 0$, 那么 ()

- A. $a > 0$, $b > 0$
B. $a < 0$, $b > 0$
C. a 、 b 同号
D. a 、 b 异号, 且正数的绝对值较大

【答案】D

【解析】【分析】先由有理数的乘法法则，判断出 a, b 异号，再用有理数加法法则即可得出结论.

【详解】 $\because ab < 0$,

$\therefore a, b$ 异号,

$\because a+b > 0$,

$\therefore$ 正数的绝对值较大,

故选 D.

【点睛】本题考查了有理数的乘法、加法，熟练掌握和灵活应用有理数的加法法则和乘法法则是解题的关键.

4. 一个正 n 边形的每一个外角都是 36° ，则 $n = (\quad)$

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

【答案】D

【解析】【分析】由多边形的外角和为 360° 结合每个外角的度数，即可求出 n 值，此题得解.

【详解】 $\because$ 一个正 n 边形的每一个外角都是 36° ，

$\therefore n = 360^\circ \div 36^\circ = 10$,

故选 D.

【点睛】本题考查了多边形的外角，熟记多边形的外角和为 360 度是解题的关键.

5. 某商品打七折后价格为 a 元，则原价为 $(\quad)$

A. a 元 B. $\frac{10}{7}a$ 元 C. $30\%a$ 元 D. $\frac{7}{10}a$ 元

【答案】B

【解析】【分析】直接利用打折的意义表示出价格即可得出答案.

【详解】设该商品原价为 x 元,

$\because$ 某商品打七折后价格为 a 元,

$\therefore$ 原价为: $0.7x = a$,

则 $x = \frac{10}{7}a$ (元),

故选 B.

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用，弄清题意，找准等量关系列出方程是解题的关键.

6. 将正方体的表面沿某些棱剪开，展成如图所示的平面图形，则原正方体中与“创”字所在的面相对的面上的字是 $(\quad)$



A. 庆 B. 力 C. 大 D. 魅

【答案】A

【解析】【分析】正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形，根据这一特点作答.

【详解】正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形，

“建”与“力”是相对面，

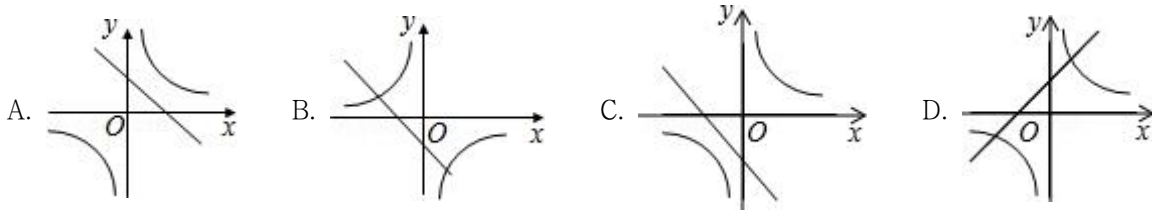
“创”与“庆”是相对面，

“魅”与“大”是相对面，

故选 A.

【点睛】本题考查了正方体相对两个面上的文字的知识；掌握常见类型展开图相对面上的两个字的特点是解决本题的关键.

7. 在同一直角坐标系中，函数 $y = \frac{k}{x}$ 和 $y = kx - 3$ 的图象大致是 ()



【答案】B

【解析】【分析】根据一次函数和反比例函数的特点， $k \neq 0$ ，所以分 $k > 0$ 和 $k < 0$ 两种情况讨论；当两函数系数 k 取相同符号值，两函数图象共存于同一坐标系内的即为正确答案.

【详解】分两种情况讨论：

①当 $k > 0$ 时， $y = kx - 3$ 与 y 轴的交点在负半轴，过一、三、四象限，反比例函数的图象在第一、三象限；

②当 $k < 0$ 时， $y = kx - 3$ 与 y 轴的交点在负半轴，过二、三、四象限，反比例函数的图象在第二、四象限，

观察只有 B 选项符合，

故选 B.

【点睛】本题主要考查了反比例函数的图象性质和一次函数的图象性质，熟练掌握它们的性质才能灵活解题.

8. 已知一组数据: 92, 94, 98, 91, 95 的中位数为 a , 方差为 b , 则 $a+b=$ ()

A. 98 B. 99 C. 100 D. 102

【答案】C

【解析】【分析】分别根据中位数和方差的定义求出 a 、 b , 然后即可求出答案.

【详解】数据: 92, 94, 98, 91, 95 从小到大排列为 91, 92, 94, 95, 98, 处于中间位置的数是 94,

则该组数据的中位数是 94, 即 $a=94$,

该组数据的平均数为 $\frac{1}{5} \times (92+94+98+91+95) = 94$,

其方差为 $\frac{1}{5} \times [(92-94)^2 + (94-94)^2 + (98-94)^2 + (91-94)^2 + (95-94)^2]$

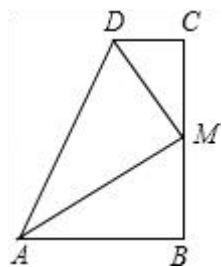
$=6$, 所以 $b=6$,

所以 $a+b=94+6=100$,

故选 C.

【点睛】本题考查了中位数和方差, 熟练掌握中位数和方差的定义以及求解方法是解题的关键.

9. 如图, $\angle B=\angle C=90^\circ$, M 是 BC 的中点, DM 平分 $\angle ADC$, 且 $\angle ADC=110^\circ$, 则 $\angle MAB=$ ()



A. 30° B. 35° C. 45° D. 60°

【答案】B

【解析】【分析】作 $MN \perp AD$ 于 N , 根据平行线的性质求出 $\angle DAB$, 根据角平分线的判定定理得到

$\angle MAB = \frac{1}{2} \angle DAB$, 计算即可.

【详解】作 $MN \perp AD$ 于 N ,

$\because \angle B = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DAB = 180^\circ - \angle ADC = 70^\circ$,

$\because DM$ 平分 $\angle ADC$, $MN \perp AD$, $MC \perp CD$,

$\therefore MN=MC$,

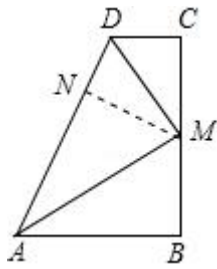
$\because M$ 是 BC 的中点,

$\therefore MC=MB$,

$\therefore MN=MB$, 又 $MN \perp AD$, $MB \perp AB$,

$\therefore \angle MAB = \frac{1}{2} \angle DAB = 35^\circ$,

故选 B.

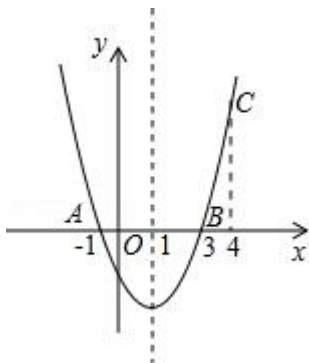


【点睛】 本题考查了平行线的性质，角平分线的性质与判定，熟练掌握相关内容、正确添加辅助线是解题的关键.

10. 如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 A (-1, 0)、点 B (3, 0)、点 C (4, y_1)，若点 D (x_2 , y_2) 是抛物线上任意一点，有下列结论：

- ①二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最小值为 $-4a$;
- ②若 $-1 \leq x_2 \leq 4$, 则 $0 \leq y_2 \leq 5a$;
- ③若 $y_2 > y_1$, 则 $x_2 > 4$;
- ④一元二次方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两个根为 -1 和 $\frac{1}{3}$

其中正确结论的个数是 ()



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【解析】 【分析】 利用交点式写出抛物线解析式为 $y=ax^2-2ax-3a$, 配成顶点式得 $y=a(x-1)^2-4a$, 则可

对①进行判断；计算 $x=4$ 时， $y=a \times 5 \times 1=5a$ ，则根据二次函数的性质可对②进行判断；利用对称性和二次函数的性质可对③进行判断；由于 $b=-2a$ ， $c=-3a$ ，则方程 $cx^2+bx+a=0$ 化为 $-3ax^2-2ax+a=0$ ，然后解方程可对④进行判断.

【详解】 由二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 A $(-1, 0)$ 、点 B $(3, 0)$ ，

可得抛物线解析式为 $y=a(x+1)(x-3)$ ，

即 $y=ax^2-2ax-3a$ ，

$\therefore y=a(x-1)^2-4a$ ，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，二次函数有最小值 $-4a$ ，所以①正确；

当 $x=4$ 时， $y=a \times 5 \times 1=5a$ ，

$\therefore$ 当 $-1 \leq x_2 \leq 4$ ，则 $-4a \leq y_2 \leq 5a$ ，所以②错误；

$\therefore$ 点 C $(1, 5a)$ 关于直线 $x=1$ 的对称点为 $(-2, -5a)$ ，

$\therefore$ 当 $y_2 > y_1$ ，则 $x_2 > 4$ 或 $x < -2$ ，所以③错误；

$\therefore b=-2a$ ， $c=-3a$ ，

$\therefore$ 方程 $cx^2+bx+a=0$ 化为 $-3ax^2-2ax+a=0$ ，

整理得 $3x^2+2x-1=0$ ，解得 $x_1=-1$ ， $x_2=\frac{1}{3}$ ，所以④正确，

故选 B.

【点睛】 本题考查了二次函数的图象与性质，待定系数法、二次函数与一元二次方程等，综合性较强，熟练掌握待定系数法以及二次函数的相关知识是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分)

11. 已知圆柱的底面积为 60cm^2 ，高为 4cm ，则这个圆柱体积为_____ cm^3 .

【答案】 240

【解析】 **【分析】** 根据圆柱体积=底面积 $\times$ 高，即可求出结论.

【详解】 $V=S \cdot h$

$=60 \times 4$

$=240 (\text{cm}^3)$ ，

故答案为：240.

【点睛】 本题考查了圆柱体的体积，熟练掌握圆柱体的体积公式是解题的关键.

12. 函数 $y=\sqrt{3-x}$ 的自变量 x 取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 3$

【解析】由题意可得， $3-x \geq 0$ ，解得 $x \leq 3$.

故答案为 $x \leq 3$.

13. 在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为 $(a, 3)$ ，点 B 的坐标是 $(4, b)$ ，若点 A 与点 B 关于原点 O 对称，则 $ab = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】12

【解析】【分析】直接利用关于原点对称点的性质得出 a, b 的值，进而得出答案.

【详解】 $\because$ 点 A 的坐标为 $(a, 3)$ ，点 B 的坐标是 $(4, b)$ ，点 A 与点 B 关于原点 O 对称，

$$\therefore a = -4, b = -3,$$

$$\text{则 } ab = 12,$$

故答案为：12.

【点睛】本题考查了关于原点对称的点的坐标，熟知关于原点对称的两点的横、纵坐标互为相反数是解题的关键.

14. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ，且 $AC = 6$ ，则这个三角形的内切圆半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】【分析】先利用勾股定理计算出 $BC = 8$ ，然后利用直角三角形内切圆的半径 $= \frac{a+b-c}{2}$ (a, b 为直角边， c 为斜边) 进行计算即可得.

【详解】 $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 6$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\therefore \text{这个三角形的内切圆半径} = \frac{6+8-10}{2} = 2,$$

故答案为：2.

【点睛】本题考查了直角三角形内切圆半径，熟知直角三角形内切圆半径的求解方法是解题的关键.

$$\text{直角三角形内切圆的半径} = \frac{a+b-c}{2} \quad (a, b \text{ 为直角边}, c \text{ 为斜边}).$$

15. 若 $2^x = 5$ ， $2^y = 3$ ，则 $2^{2x+y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】75

【解析】【分析】直接利用同底数幂的乘法运算法则以及幂的乘方运算法则将原式变形进而得出答案即可.

【详解】 $\because 2^x = 5$ ， $2^y = 3$ ，

$$\therefore 2^{2x+y} = (2^x)^2 \times 2^y = 5^2 \times 3 = 75,$$

故答案为：75.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法以及幂的乘方，熟练掌握运算是解题的关键.

16. 已知 $\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$, 则实数 A=_____.

【答案】1

【解析】【分析】先计算出 $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}$, 再根据已知等式得出 A、B 的方程组, 解之可得.

【详解】 $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}$,

$$\therefore \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

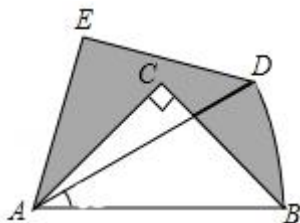
$$\therefore \begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=4 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$,

故答案为：1.

【点睛】本题考查了分式的加减法运算, 熟练掌握分式加减运算的法则、得出关于 A、B 的方程组是解本题的关键.

17. 如图, 在 Rt△ABC 中, ∠ACB=90°, AC=BC=2, 将 Rt△ABC 绕点 A 逆时针旋转 30° 后得到 Rt△ADE, 点 B 经过的路径为弧 BD, 则图中阴影部分的面积为_____.



【答案】 $\frac{2\pi}{3}$

【解析】【分析】先根据勾股定理得到 $AB=2\sqrt{2}$, 再根据扇形的面积公式计算出 $S_{\text{扇形 ABD}}$, 由旋转的性质得到 $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ACB$, 于是 $S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ADE} + S_{\text{扇形 ABD}} - S_{\triangle ABC} = S_{\text{扇形 ABD}}$.

【详解】 $\because \angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=2$,

$$\therefore AB=2\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\text{扇形 ABD}} = \frac{30^\circ \times (2\sqrt{2})^2}{360} = \frac{2\pi}{3},$$

又 $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转 30° 后得到 $\text{Rt}\triangle ADE$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ACB,$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ADE} + S_{\text{扇形 ABD}} - S_{\triangle ABC} = S_{\text{扇形 ABD}} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\pi}{3}.$$

【点睛】本题考查了旋转的性质、扇形面积的计算，得到 $S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形 ABD}}$ 是解题的关键.

18. 已知直线 $y=kx$ ($k \neq 0$) 经过点 $(12, -5)$ ，将直线向上平移 m ($m > 0$) 个单位，若平移后得到的直线与半径为 6 的 $\odot O$ 相交 (点 O 为坐标原点)，则 m 的取值范围为_____.

$$\text{【答案】 } 0 < m < \frac{13}{2}$$

【解析】【分析】利用待定系数法得出直线解析式，再得出平移后得到的直线，求与坐标轴交点的坐标，转化为直角三角形中的问题，再由直线与圆的位置关系的判定解答.

【详解】把点 $(12, -5)$ 代入直线 $y=kx$ 得，

$$-5=12k,$$

$$\therefore k = -\frac{5}{12};$$

$$\text{由 } y = -\frac{5}{12}x \text{ 平移 } m \text{ (} m > 0 \text{) 个单位后得到的直线 } l \text{ 所对应的函数关系式为 } y = -\frac{5}{12}x + m \text{ (} m > 0 \text{),}$$

设直线 l 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，(如图所示)

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y=m; \text{ 当 } y=0 \text{ 时, } x=\frac{12}{5}m,$$

$$\therefore A \left(\frac{12}{5}m, 0 \right), B (0, m),$$

$$\text{即 } OA = \frac{12}{5}m, OB = m,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OAB \text{ 中, } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}m\right)^2 + m^2} = \frac{13}{5}m,$$

过点 O 作 $OD \perp AB$ 于 D ,

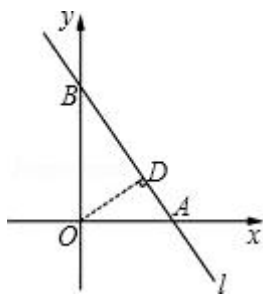
$$\therefore S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}OD \cdot AB = \frac{1}{2}OA \cdot OB,$$

$$\therefore \frac{1}{2}OD \cdot \frac{13}{5}m = \frac{1}{2} \times \frac{12}{5}m \times m,$$

$$\therefore m > 0, \text{ 解得 } OD = \frac{12}{13}m,$$

$$\text{由直线与圆的位置关系可知 } \frac{12}{13}m < 6, \text{ 解得 } m < \frac{13}{2},$$

$$\text{故答案为: } 0 < m < \frac{13}{2}.$$



【点睛】本题考查了直线的平移、直线与圆的位置关系等，能用含 m 的式子表示出原点到平移后的直线的距离是解题的关键.本题有一定的难度，利用数形结合思想进行解答比较直观明

三、解答题（本大题共 10 小题，共 66 分）

19. 求值: $(-1)^{2018} + |1 - \sqrt{2}| - \sqrt[3]{8}$

【答案】 $\sqrt{2} - 2$

【解析】【分析】按顺序分别进行乘方的运算、绝对值的化简、立方根的运算，然后再按运算顺序进行计算即可得.

【详解】 $(-1)^{2018} + |1 - \sqrt{2}| - \sqrt[3]{8}$
 $= 1 + \sqrt{2} - 1 - 2$
 $= \sqrt{2} - 2.$

【点睛】本题考查了实数的混合运算，熟练掌握实数混合运算的运算顺序以及运算法则是解题的关键.

20. 解方程: $\frac{x}{x+3} - \frac{1}{x} = 1.$

【答案】 分式方程的解为 $x = -\frac{3}{4}.$

【解析】【分析】方程两边都乘以 $x(x+3)$ 得出方程 $x - 1 + 2x = 2$ ，求出方程的解，再代入 $x(x+3)$ 进行检验即可.

【详解】 两边都乘以 $x(x+3)$ ，得: $x^2 - (x+3) = x(x+3),$

解得: $x = -\frac{3}{4},$

检验: 当 $x = -\frac{3}{4}$ 时, $x(x+3) = -\frac{27}{16} \neq 0,$

所以分式方程的解为 $x = -\frac{3}{4}.$

【点睛】本题考查了解分式方程，熟练掌握解分式方程的方法与注意事项是解题的关键.

21. 已知: $x^2 - y^2 = 12$, $x + y = 3$, 求 $2x^2 - 2xy$ 的值.

【答案】 $2x^2 - 2xy = 28.$

【解析】【分析】先求出 $x - y = 4$ ，进而求出 $2x = 7$ ，而 $2x^2 - 2xy = 2x(x - y)$ ，代入即可得出结论.

【详解】 $\because x^2 - y^2 = 12$,

$$\therefore (x+y)(x-y) = 12,$$

$$\because x+y=3 \text{ ①},$$

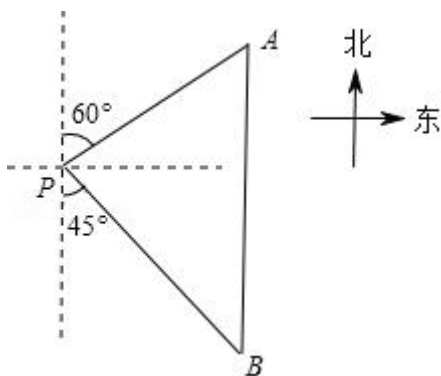
$$\therefore x-y=4 \text{ ②},$$

$$\text{①}+\text{②} \text{ 得, } 2x=7,$$

$$\therefore 2x^2 - 2xy = 2x(x-y) = 7 \times 4 = 28.$$

【点睛】本题考查了因式分解的应用，代数值求值，二元一次方程组的特殊解法等，求出 $x-y=4$ 是解本题的关键.

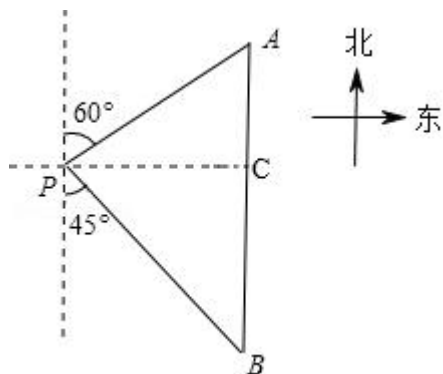
22. 如图，一艘轮船位于灯塔 P 的北偏东 60° 方向，与灯塔 P 的距离为 80 海里的 A 处，它沿正南方向航行一段时间后，到达位于灯塔 P 的南偏东 45° 方向的 B 处，求此时轮船所在的 B 处与灯塔 P 的距离. (参考数据: $\sqrt{6} \approx 2.449$, 结果保留整数)



【答案】此时轮船所在的 B 处与灯塔 P 的距离是 98 海里.

【解析】【分析】过点 P 作 $PC \perp AB$ ，则在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中易得 PC 的长，再在直角 $\triangle BPC$ 中求出 PB 的长即可.

【详解】作 $PC \perp AB$ 于 C 点,



$$\therefore \angle APC = 30^\circ, \angle BPC = 45^\circ, AP = 80 \text{ (海里)},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle APC \text{ 中, } \cos \angle APC = \frac{PC}{PA},$$

$$\therefore PC = PA \cdot \cos \angle APC = 40\sqrt{3} \text{ (海里)},$$

$$\text{在 Rt}\triangle PCB \text{ 中, } \cos \angle BPC = \frac{PC}{PB},$$

$$\therefore PB = \frac{PC}{\cos \angle BPC} = \frac{40\sqrt{3}}{\cos 45^\circ} = 40\sqrt{6} \approx 98 \text{ (海里)},$$

答：此时轮船所在的 B 处与灯塔 P 的距离是 98 海里.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用举例，正确添加辅助线构建直角三角形是解题的关键.

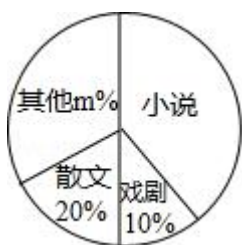
23. 九年级一班开展了“读一本好书”的活动，班委会对学生阅读书籍的情况进行了问卷调查，问卷设置了“小说”“戏剧”“散文”“其他”四个选项，每位同学仅选一项，根据调查结果绘制了如下不定整的频数分布表和扇形统计图.

类别	频数 (人数)	频率
小说	16	
戏剧	4	
散文	a	
其他	b	
合计		1

根据图表提供的信息，解答下列问题：

(1) 直接写出 a, b, m 的值；

(2) 在调查问卷中，甲、乙、丙、丁四位同学选择了“戏剧”类，现从以上四位同学中任意选出 2 名同学参加学校的戏剧兴趣小组，请用列表法或画树状图的方法，求选取的 2 人恰好乙和丙的概率.



【答案】(1) $a=8$, $b=12$, $m=30$; (2) 选取的 2 人恰好乙和丙的概率为 $\frac{1}{6}$.

【解析】【分析】(1) 先根据戏剧的人数及其所占百分比可得总人数，再用总人数乘以散文的百分比求得其人数，根据各类别人数之和等于总人数求得其他类别的人数，最后用其他人数除以总人数求得 m 的值；

(2) 画树状图得出所有等可能的情况数，找出恰好是丙与乙的情况，即可确定出所求概率.

【详解】(1) $\because$ 被调查的学生总人数为 $4 \div 10\% = 40$ 人，

$\therefore$ 散文的人数 $a = 40 \times 20\% = 8$ ，其他的人数 $b = 40 - (16 + 4 + 8) = 12$ ，

则其他人数所占百分比 $m\% = \frac{12}{40} \times 100\% = 30\%$ ，即 $m = 30$ ；

(2) 画树状图，如图所示：



所有等可能的情况有 12 种，其中恰好是丙与乙的情况有 2 种，

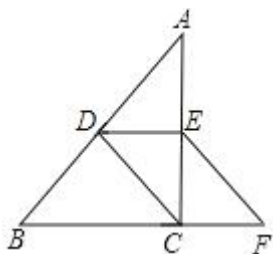
所以选取的 2 人恰好乙和丙的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

【点睛】本题考查了统计表、扇形统计图、列表法或树状图法求概率，读懂统计图，从中得到必要的信息是解题的关键. 注意，概率 = 所求情况数与总情况数之比.

24. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，D、E 分别是 AB、AC 的中点，连接 CD，过 E 作 $EF \parallel DC$ 交 BC 的延长线于 F.

(1) 证明：四边形 CDEF 是平行四边形；

(2) 若四边形 CDEF 的周长是 25cm，AC 的长为 5cm，求线段 AB 的长度.



【答案】(1) 证明见解析；(2) $AB = 13\text{cm}$ ，

【解析】【分析】(1) 由三角形中位线定理推知 $ED \parallel FC$ ， $2DE = BC$ ，然后结合已知条件“ $EF \parallel DC$ ”，利用两组对边相互平行得到四边形 DCFE 为平行四边形；

(2) 根据在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半得到 $AB = 2DC$ ，即可得出四边形 DCFE 的周长 $= AB + BC$ ，故 $BC = 25 - AB$ ，然后根据勾股定理即可求得；

【详解】(1) $\because$ D、E 分别是 AB、AC 的中点，F 是 BC 延长线上的一点，

$\therefore$ ED 是 $Rt\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore$ $ED \parallel FC$ ， $BC = 2DE$ ，

又 $EF \parallel DC$ ，

∴ 四边形 CDEF 是平行四边形；

(2) ∵ 四边形 CDEF 是平行四边形；

∴ DC=EF,

∵ DC 是 Rt△ABC 斜边 AB 上的中线,

∴ AB=2DC,

∴ 四边形 DCFE 的周长=AB+BC,

∵ 四边形 DCFE 的周长为 25cm, AC 的长 5cm,

∴ BC=25 - AB,

∵ 在 Rt△ABC 中, $\angle ACB=90^\circ$,

∴ $AB^2=BC^2+AC^2$, 即 $AB^2=(25-AB)^2+5^2$,

解得, AB=13cm.

【点睛】 本题考查了平行四边形的判定与性质、直角三角形斜边中线的性质等, 熟练掌握平行四边形的判定与性质、直角三角形斜边中线等于斜边一半是解题的关键.

25. 某学校计划购买排球、篮球, 已知购买 1 个排球与 1 个篮球的总费用为 180 元; 3 个排球与 2 个篮球的总费用为 420 元.

(1) 求购买 1 个排球、1 个篮球的费用分别是多少元?

(2) 若该学校计划购买此类排球和篮球共 60 个, 并且篮球的数量不超过排球数量的 2 倍. 求至少需要购买多少个排球? 并求出购买排球、篮球总费用的最大值?

【答案】 (1) 每个排球的价格是 60 元, 每个篮球的价格是 120 元; (2) $m=20$ 时, 购买排球、篮球总费用的最大, 购买排球、篮球总费用的最大值为 6000 元.

【解析】 **【分析】** (1) 根据购买 1 个排球与 1 个篮球的总费用为 180 元; 3 个排球与 2 个篮球的总费用为 420 元列出方程组, 解方程组即可;

(2) 根据购买排球和篮球共 60 个, 篮球的数量不超过排球数量的 2 倍列出不等式, 解不等式即可.

【详解】 (1) 设每个排球的价格是 x 元, 每个篮球的价格是 y 元,

根据题意得:
$$\begin{cases} x+y=180 \\ 3x+2y=420 \end{cases}$$
,

解得:
$$\begin{cases} x=60 \\ y=120 \end{cases}$$
,

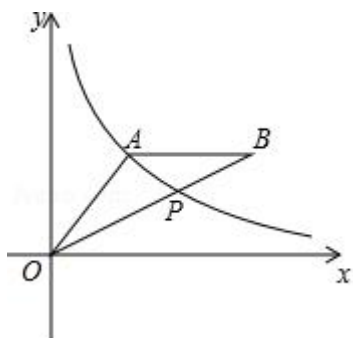
所以每个排球的价格是 60 元, 每个篮球的价格是 120 元;

(2) 设购买排球 m 个, 则购买篮球 $(60 - m)$ 个,
 根据题意得: $60 - m \leq 2m$,
 解得 $m \geq 20$,
 又 $\because$ 排球的单价小于篮球的单价,
 $\therefore m=20$ 时, 购买排球、篮球总费用的最大,
 购买排球、篮球总费用的最大值 $= 20 \times 60 + 40 \times 120 = 6000$ 元.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的应用、一元一次不等式的应用, 弄清题意, 找准备等量关系列出方程组、找准不等关系列出不等式是解题的关键.

26. 如图, $A(4, 3)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在第一象限图象上一点, 连接 OA , 过 A 作 $AB \parallel x$ 轴, 截取 $AB = OA$ (B 在 A 右侧), 连接 OB , 交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象于点 P .

- (1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的表达式;
- (2) 求点 B 的坐标;
- (3) 求 $\triangle OAP$ 的面积.



【答案】(1) 反比例函数解析式为 $y = \frac{12}{x}$; (2) 点 B 的坐标为 $(9, 3)$; (3) $\triangle OAP$ 的面积 $= 5$.

【解析】【分析】(1) 将点 A 的坐标代入解析式求解可得;

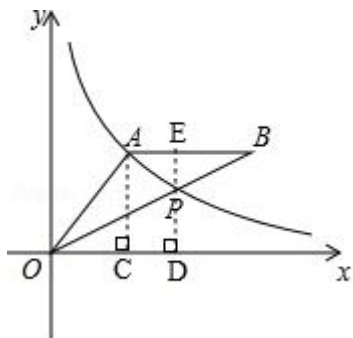
(2) 利用勾股定理求得 $AB = OA = 5$, 由 $AB \parallel x$ 轴即可得点 B 的坐标;

(3) 先根据点 B 坐标得出 OB 所在直线解析式, 从而求得直线与双曲线交点 P 的坐标, 再利用割补法求解可得.

【详解】(1) 将点 $A(4, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得: $k = 12$,

则反比例函数解析式为 $y = \frac{12}{x}$;

(2) 如图, 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于点 C ,



则 $OC=4$ 、 $AC=3$,

$$\therefore OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$\therefore AB \parallel x$ 轴, 且 $AB=OA=5$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(9, 3)$;

(3) $\therefore$ 点 B 坐标为 $(9, 3)$,

$\therefore OB$ 所在直线解析式为 $y = \frac{1}{3}x$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \text{ 可得点 P 坐标为 } (6, 2), \text{ (负值舍去),}$$

过点 P 作 $PD \perp x$ 轴, 延长 DP 交 AB 于点 E,

则点 E 坐标为 $(6, 3)$,

$\therefore AE=2$ 、 $PE=1$ 、 $PD=2$,

$$\text{则 } \triangle OAP \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times (2+6) \times 3 - \frac{1}{2} \times 6 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 5.$$

【点睛】 本题考查了反比例函数与几何图形综合, 熟练掌握反比例函数图象上点的坐标特征、正确添加辅助线是解题的关键.

27. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 E 为线段 OB 上一点 (不与 O, B 重合), 作 $EC \perp OB$, 交 $\odot O$ 于点 C, 作直径 CD, 过点 C 的切线交 DB 的延长线于点 P, 作 $AF \perp PC$ 于点 F, 连接 CB.

(1) 求证: AC 平分 $\angle FAB$;

(2) 求证: $BC^2 = CE \cdot CP$;

(3) 当 $AB=4\sqrt{3}$ 且 $\frac{CF}{CP} = \frac{3}{4}$ 时, 求劣弧 $\widehat{BD}$ 的长度.

$$\therefore BC^2 = CE \cdot CP;$$

(3) 如图, 作 $BM \perp PF$ 于 M . 则 $CE = CM = CF$,

设 $CE = CM = CF = 3a$, $PC = 4a$, $PM = a$,

$$\therefore \angle MCB + \angle P = 90^\circ, \quad \angle P + \angle PBM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MCB = \angle PBM,$$

$\therefore CD$ 是直径, $BM \perp PC$,

$$\therefore \angle CMB = \angle BMP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BMC \sim \triangle PMB,$$

$$\therefore \frac{BM}{PM} = \frac{CM}{BM},$$

$$\therefore BM^2 = CM \cdot PM = 3a^2,$$

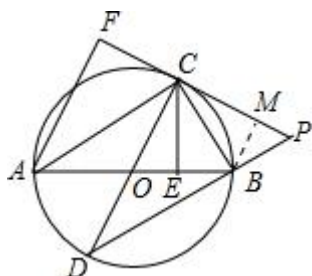
$$\therefore BM = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore \tan \angle BCM = \frac{BM}{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle BCM = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = \angle BOC = 60^\circ, \quad \angle BOD = 120^\circ,$$

$$\therefore \text{BD 的长} = \frac{120 \times \pi \times 2\sqrt{3}}{180} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi.$$



【点睛】 本题考查了切线的性质、圆周角定理、相似三角形的判定与性质、解直角三角形的应用等, 综合性较强, 有一定的难度, 正确添加辅助线, 熟练掌握和灵活应用相似三角形的判定与性质定理是解题的关键.

28. 如图, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, B 点坐标为 $(4, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 4)$.

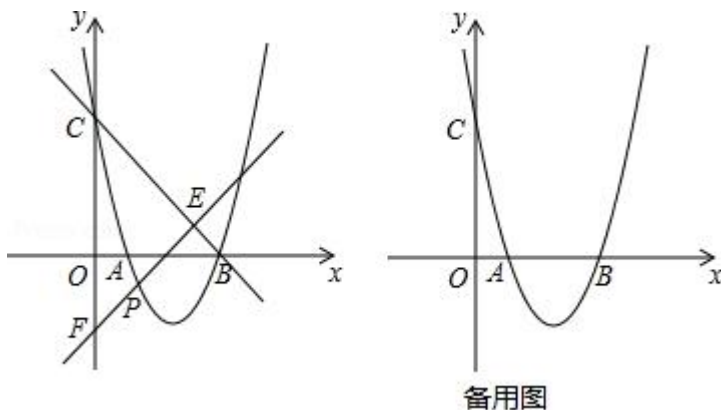
(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 P 在 x 轴下方的抛物线上, 过点 P 的直线 $y = x + m$ 与直线 BC 交于点 E , 与 y 轴交于点 F , 求 $PE + EF$ 的最大值;

(3) 点 D 为抛物线对称轴上一点.

①当 $\triangle BCD$ 是以 BC 为直角边的直角三角形时，直接写出点 D 的坐标；

②若 $\triangle BCD$ 是锐角三角形，直接写出点 D 的纵坐标 n 的取值范围.



【答案】 (1) 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 5x + 4$; (2) $PE + EF$ 的最大值为 $\frac{25\sqrt{2}}{4}$; (3) ①符合条件的点 D 的坐标是 $(\frac{5}{2}, \frac{13}{2})$ 或 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$; ②点 D 的纵坐标的取值范围为 $\frac{4 + \sqrt{31}}{2} < y < \frac{13}{2}$ 或 $-\frac{3}{2} < y < \frac{4 - \sqrt{31}}{2}$.

【解析】 **【分析】** (1) 利用待定系数法求抛物线的解析式;

(2) 易得 BC 的解析式为 $y = -x + 4$, 先证明 $\triangle ECF$ 为等腰直角三角形, 作 $PH \perp y$ 轴于 H , $PG \parallel y$ 轴交 BC 于 G , 如图 1, 则 $\triangle EPG$ 为等腰直角三角形, $PE = \frac{\sqrt{2}}{2}PG$, 设 $P(t, t^2 - 4t + 3)$ ($1 < t < 3$), 则 $G(t, -t + 3)$, 接着利用 t 表示 PF 、 PE , 所以 $PE + EF = 2PE + PF = -\sqrt{2}t^2 + 5\sqrt{2}t$, 然后利用二次函数的性质解决问题;

(3) ①如图 2, 抛物线的对称轴为直线 $x = -$ 点 D 的纵坐标的取值范围;

②由于 $\triangle BCD$ 是以 BC 为斜边的直角三角形有 $4 + (y - 3)^2 + 1 + y^2 = 18$, 解得 $y_1 = \frac{4 + \sqrt{31}}{2}$, $y_2 = \frac{4 - \sqrt{31}}{2}$, 得到此时 D 点坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{4 + \sqrt{31}}{2})$ 或 $(\frac{5}{2}, \frac{4 - \sqrt{31}}{2})$, 然后结合图形可确定 $\triangle BCD$ 是锐角三角形时点 D 的纵坐标的取值范围.

【详解】 (1) 把 $B(4, 0)$, $C(0, 4)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$, 得

$$\begin{cases} 16 + 4b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = -5 \\ c = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 5x + 4$;

(2) 由 $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, 根据待定系数法易得 BC 的解析式为 $y = -x + 4$,

$\therefore$ 直线 $y = x + m$ 与直线 $y = x$ 平行,

$\therefore$ 直线 $y = -x + 4$ 与直线 $y = x + m$ 垂直,

$\therefore \angle CEF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ECF$ 为等腰直角三角形,

作 $PH \perp y$ 轴于 H , $PG \parallel y$ 轴交 BC 于 G , 如图 1, $\triangle EPG$ 为等腰直角三角形, $PE = \frac{\sqrt{2}}{2}PG$,

设 $P(t, t^2 - 5t + 4)$ ($1 < t < 4$), 则 $G(t, -t + 4)$,

$\therefore PF = \sqrt{2}PH = \sqrt{2}t$, $PG = -t + 4 - (t^2 - 5t + 4) = -t^2 + 4t$,

$\therefore PE = \frac{\sqrt{2}}{2}PG = -\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + 2\sqrt{2}t$,

$\therefore PE + EF = PE + PE + PF = 2PE + PF = -\sqrt{2}t^2 + 4\sqrt{2}t + \sqrt{2}t = -\sqrt{2}t^2 + 5\sqrt{2}t = -\sqrt{2}(t - \frac{5}{2})^2 + \frac{25\sqrt{2}}{4}$,

当 $t = \frac{5}{2}$ 时, $PE + EF$ 的最大值为 $\frac{25\sqrt{2}}{4}$;

(3) ①如图 2, 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$,

设 $D(\frac{5}{2}, y)$, 则 $BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, $DC^2 = (\frac{5}{2})^2 + (y - 4)^2$, $BD^2 = (4 - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4} + y^2$,

当 $\triangle BCD$ 是以 BC 为直角边, BD 为斜边的直角三角形时, $BC^2 + DC^2 = BD^2$,

即 $32 + (\frac{5}{2})^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{4} + y^2$, 解得 $y = 5$, 此时 D 点坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{13}{2})$;

当 $\triangle BCD$ 是以 BC 为直角边, CD 为斜边的直角三角形时, $BC^2 + DB^2 = DC^2$,

即 $32 + \frac{9}{4} + y^2 = (\frac{5}{2})^2 + (y - 4)^2$, 解得 $y = -1$, 此时 D 点坐标为 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$;

综上所述, 符合条件的点 D 的坐标是 $(\frac{5}{2}, \frac{13}{2})$ 或 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$;

②当 $\triangle BCD$ 是以 BC 为斜边的直角三角形时, $DC^2 + DB^2 = BC^2$, 即 $(\frac{5}{2})^2 + (y - 4)^2 + \frac{9}{4} + y^2 = 32$, 解得

$y_1 = \frac{4 + \sqrt{31}}{2}$, $y_2 = \frac{4 - \sqrt{31}}{2}$, 此时 D 点坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{4 + \sqrt{31}}{2})$ 或 $(\frac{5}{2}, \frac{4 - \sqrt{31}}{2})$,

所以 $\triangle BCD$ 是锐角三角形, 点 D 的纵坐标的取值范围为 $\frac{4 + \sqrt{31}}{2} < y < \frac{13}{2}$ 或 $-\frac{3}{2} < y < \frac{4 - \sqrt{31}}{2}$.

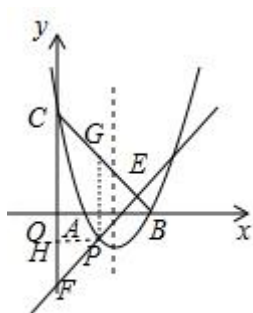


图1

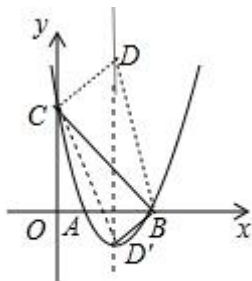


图2

【点睛】 本题考查了二次函数的综合题, 涉及到待定系数法、两直线平行或相交问题、二次函数

的最值、存在性问题等，综合性较强，有一定的难度，正确添加辅助线、灵活运用相关知识以及分类讨论思想、数形结合思想是解题的关键.