

2016 年黑龙江省绥化市中考数学试卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

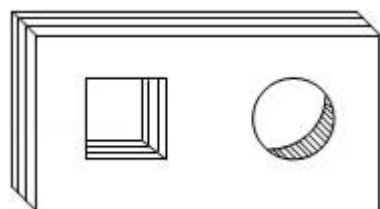
1. (3 分) 今年我国参加高考的考生人数约为 940 万，这个数用科学记数法表示正确的是 ()

A. 94×10^5 B. 94×10^6 C. 9.4×10^6 D. 0.94×10^7

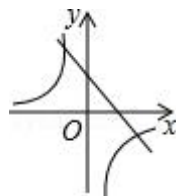
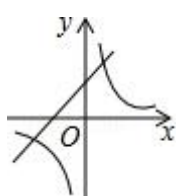
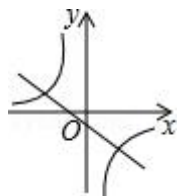
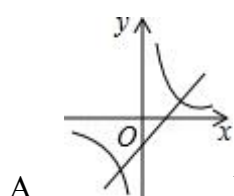
2. (3 分) 在图形：①线段；②等边三角形；③矩形；④菱形；⑤平行四边形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的个数是 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

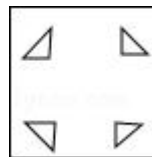
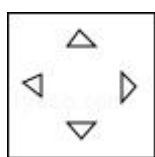
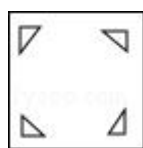
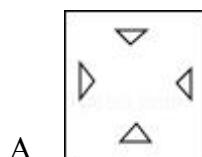
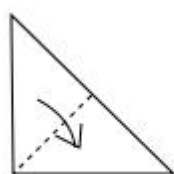
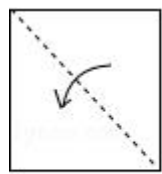
3. (3 分) 如图，是一个带有方形空洞和圆形空洞的儿童玩具，如果用下列几何体作为塞子，那么既可以堵住方形空洞，又可以堵住圆形空洞的几何体是 ()



4. (3 分) 当 $k > 0$ 时，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 和一次函数 $y = kx + 2$ 的图象大致是 ()

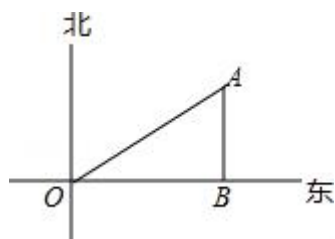


5. (3 分) 把一张正方形纸片如图①、图②对折两次后，再按如图③挖去一个三角形小孔，则展开后图形是 ()



6. (3 分) 如图，小雅家（图中点 O 处）门前有一条东西走向的公路，经测得有一水塔（图中点 A 处）在距她家北偏东 60° 方向的 500 米处，那么水塔所在的位

置到公路的距离 AB 是 ()



- A. 250 米 B. $250\sqrt{3}$ 米 C. $\frac{500}{3}\sqrt{3}$ 米 D. $500\sqrt{2}$ 米

7. (3 分) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \leq \frac{1}{2}$ B. $x \geq \frac{1}{2}$ C. $x < \frac{1}{2}$ D. $x > \frac{1}{2}$

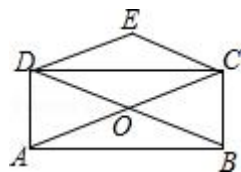
8. (3 分) 一个长方形的周长为 30cm, 若这个长方形的长减少 1cm, 宽增加 2cm 就可成为一个正方形, 设长方形的长为 x cm, 可列方程为 ()

- A. $x+1 = (30-x) - 2$ B. $x+1 = (15-x) - 2$ C. $x-1 = (30-x) + 2$ D. $x-1 = (15-x) + 2$

9. (3 分) 化简 $\frac{a^2}{a-1} - (a+1)$ 的结果是 ()

- A. $\frac{1}{a-1}$ B. $-\frac{1}{a-1}$ C. $\frac{2a-1}{a-1}$ D. $-\frac{2a-1}{a-1}$

10. (3 分) 如图, 矩形 ABCD 的对角线 AC、BD 相交于点 O, $CE \parallel BD$, $DE \parallel AC$, 若 $AC=4$, 则四边形 OCED 的周长为 ()



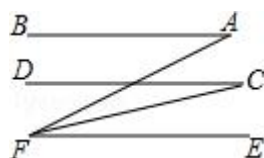
- A. 4 B. 8 C. 10 D. 12

二、填空题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

11. (3 分) $-\frac{1}{2016}$ 的相反数的倒数是_____.

12. (3 分) 在一个不透明的口袋中, 装有 A, B, C, D 4 个完全相同的小球, 随机摸取一个小球然后放回, 再随机摸取一个小球, 两次摸到同一个小球的概率是_____.

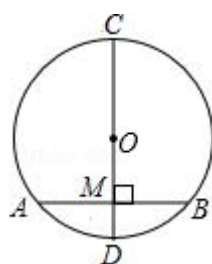
13. (3 分) 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 若 $\angle A=30^\circ$, $\angle AFC=15^\circ$, 则 $\angle C=_____$.



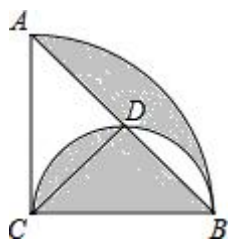
14. (3分) 计算: $(\frac{1}{2})^{-3} - 4\tan 45^\circ + |1 - \sqrt{12}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. (3分) 将抛物线 $y = 3(x - 4)^2 + 2$ 向右平移 1 个单位长度, 再向下平移 3 个单位长度, 平移后抛物线的解析式是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

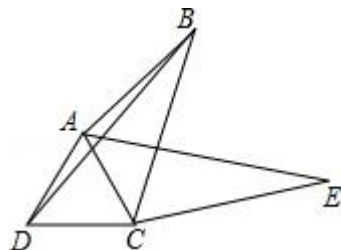
16. (3分) 如图, $\odot O$ 的直径 $CD = 20\text{cm}$, AB 是 $\odot O$ 的弦, $AB \perp CD$, 垂足为 M , 若 $OM = 6\text{cm}$, 则 AB 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$.



17. (3分) 如图, 在半径 AC 为 2, 圆心角为 90° 的扇形内, 以 BC 为直径作半圆, 交弦 AB 于点 D , 连接 CD , 则图中阴影部分的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



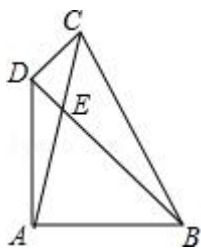
18. (3分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 30^\circ$, 将 $\triangle DCB$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 后, 点 D 的对应点恰好与点 A 重合, 得到 $\triangle ACE$, 若 $AB = 3$, $BC = 4$, 则 $BD = \underline{\hspace{2cm}}$ (提示: 可连接 BE)



19. (3分) 古希腊数学家把数 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... 叫做三角数, 它有一定的规律性. 若把第一个三角数记为 a_1 , 第二个三角数记为 a_2 , ..., 第 n 个三角数记为 a_n , 计算 $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, ... 由此推算 $a_{399} + a_{400} = \underline{\hspace{2cm}}$.

20. (3分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 E , $\angle DAB =$

$\angle CDB=90^\circ$ ， $\angle ABD=45^\circ$ ， $\angle DCA=30^\circ$ ， $AB=\sqrt{6}$ ，则 $AE=$ ____（提示：可过点 A 作 BD 的垂线）

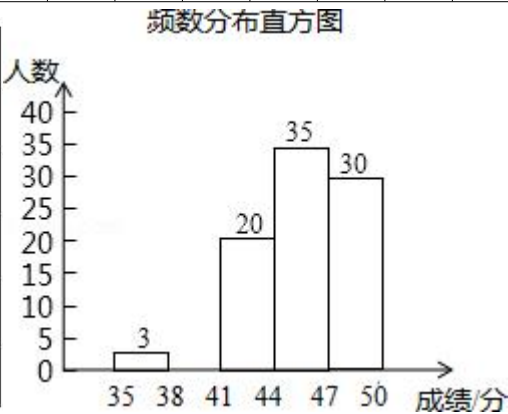


三、解答题（共 8 小题，满分 60 分）

21. （5 分）为了传承优秀传统文化，我市组织了一次初三年级 1200 名学生参加的“汉字听写”大赛，为了更好地了解本次大赛的成绩分布情况，随机抽取了 100 名学生的成绩（满分 50 分），整理得到如下的统计图表：

成绩 (分)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
人数	1	2	3	3	6	7	5	8	15	9	11	12	8	6	4

成绩分组	频数	频率
$35 \leq x < 38$	3	0.03
$38 \leq x < 41$	a	0.12
$41 \leq x < 44$	20	0.20
$44 \leq x < 47$	35	0.35
$47 \leq x \leq 50$	30	b



请根据所提供的信息解答下列问题：

- （1）样本的中位数是____分；
- （2）频率统计表中 $a=$ ____， $b=$ ____；
- （3）请补全频数分布直方图；
- （4）请根据抽样统计结果，估计该次大赛中成绩不低于 41 分的学生有多少人？

22. (6 分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+2m=0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2+2x+2m=0$ 的两个根, 且 $x_1^2+x_2^2=8$, 求 m 的值.

23. (6 分) 某商场计划购进 A、B 两种商品, 若购进 A 种商品 20 件和 B 种商品 15 件需 380 元; 若购进 A 种商品 15 件和 B 种商品 10 件需 280 元.

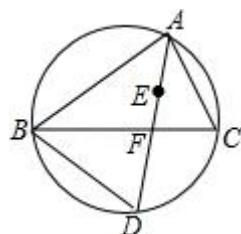
(1) 求 A、B 两种商品的进价分别是多少元?

(2) 若购进 A、B 两种商品共 100 件, 总费用不超过 900 元, 问最多能购进 A 种商品多少件?

24. (8 分) 如图, 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心, AE 的延长线与 BC 相交于点 F, 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D

(1) 求证: $\triangle BFD \sim \triangle ABD$;

(2) 求证: $DE=DB$.



25. (8 分) 自主学习, 请阅读下列解题过程.

解一元二次不等式: $x^2 - 5x > 0$.

解: 设 $x^2 - 5x = 0$, 解得: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, 则抛物线 $y = x^2 - 5x$ 与 x 轴的交点坐标为 $(0, 0)$ 和 $(5, 0)$. 画出二次函数 $y = x^2 - 5x$ 的大致图象 (如图所示), 由图象可知: 当 $x < 0$, 或 $x > 5$ 时函数图象位于 x 轴上方, 此时 $y > 0$, 即 $x^2 - 5x > 0$, 所以, 一元二次不等式 $x^2 - 5x > 0$ 的解集为: $x < 0$, 或 $x > 5$.

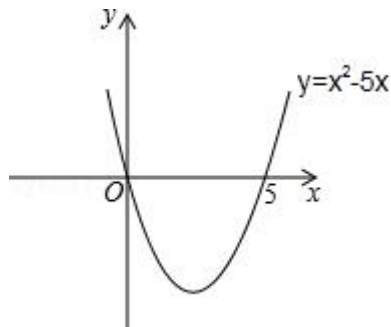
通过对上述解题过程的学习, 按其解题的思路和方法解答下列问题:

(1) 上述解题过程中, 渗透了下列数学思想中的____和____. (只填序号)

①转化思想 ②分类讨论思想 ③数形结合思想

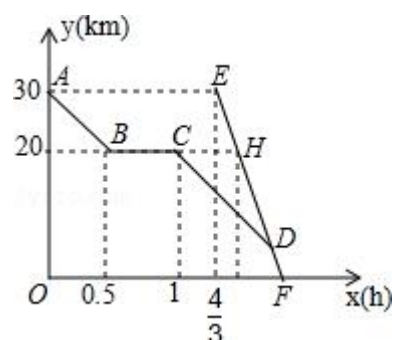
(2) 一元二次不等式 $x^2 - 5x < 0$ 的解集为_____.

(3) 用类似的方法解一元二次不等式: $x^2 - 2x - 3 > 0$.



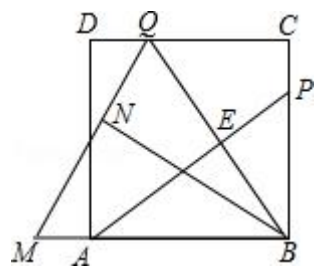
26. (8 分) 周末, 小芳骑自行车从家出发到野外郊游, 从家出发 0.5 小时到达甲地, 游玩一段时间后按原速前往乙地, 小芳离家 1 小时 20 分钟后, 妈妈驾车沿相同路线前往乙地, 行驶 10 分钟时, 恰好经过甲地, 如图是她们距乙地的路程 y (km) 与小芳离家时间 x (h) 的函数图象.

- (1) 小芳骑车的速度为____km/h, H 点坐标_____.
- (2) 小芳从家出发多少小时后被妈妈追上? 此时距家的路程多远?
- (3) 相遇后, 妈妈载上小芳和自行车同时到达乙地 (彼此交流时间忽略不计), 求小芳比预计时间早几分钟到达乙地?



27. (9 分) 如图, P 为正方形 ABCD 的边 BC 上一动点 (P 与 B、C 不重合), 点 Q 在 CD 边上, 且 $BP=CQ$, 连接 AP、BQ 交于点 E, 将 $\triangle BQC$ 沿 BQ 所在直线对折得到 $\triangle BQN$, 延长 QN 交 BA 的延长线于点 M.

- (1) 求证: $AP \perp BQ$;
- (2) 若 $AB=3$, $BP=2PC$, 求 QM 的长;
- (3) 当 $BP=m$, $PC=n$ 时, 求 AM 的长.

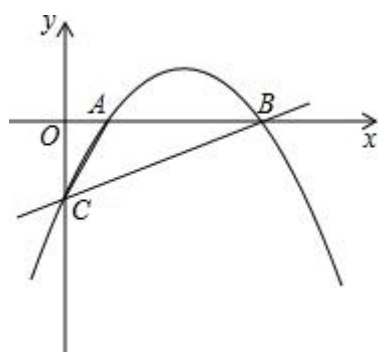


28. (10 分) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx-\frac{5}{3}$ 经过点 A (1, 0) 和点 B (5, 0), 与 y 轴交于点 C.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 以点 A 为圆心, 作与直线 BC 相切的 $\odot A$, 请判断 $\odot A$ 与 y 轴有怎样的位置关系, 并说明理由;

(3) 在直线 BC 上方的抛物线上任取一点 P, 连接 PB、PC, 请问: $\triangle PBC$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个值和此时点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2016 年黑龙江省绥化市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. (3 分) (2016•绥化) 今年我国参加高考的考生人数约为 940 万，这个数用科学记数法表示正确的是 ()

A. 94×10^5 B. 94×10^6 C. 9.4×10^6 D. 0.94×10^7

【考点】科学记数法—表示较大的数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值大于 10 时， n 是正数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负数.

【解答】解：940 万，这个数用科学记数法表示正确的是 9.4×10^6 ，
故选：C.

【点评】此题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

2. (3 分) (2016•绥化) 在图形：①线段；②等边三角形；③矩形；④菱形；⑤平行四边形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的个数是 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

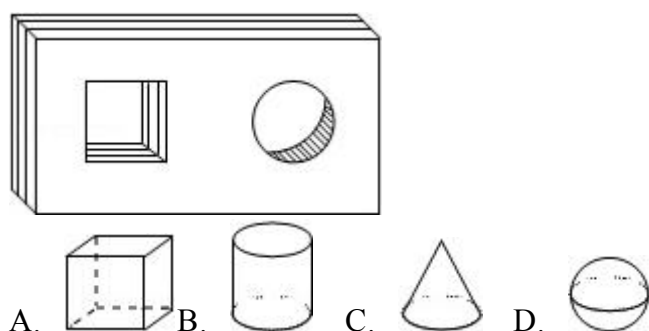
【考点】中心对称图形；轴对称图形.

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念判断即可.

【解答】解：①线段既是轴对称图形又是中心对称图形，
②等边三角形是轴对称图形不是中心对称图形，
③矩形既是轴对称图形又是中心对称图形，
④菱形既是轴对称图形又是中心对称图形，
⑤平行四边形不是轴对称图形是中心对称图形，
所以既是轴对称图形又是中心对称图形的个数是 3 个.
故选 B.

【点评】 本题考查了中心对称图形与轴对称图形的知识. 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合; 中心对称图形的关键是要寻找对称中心, 旋转 180 度后两部分重合.

3. (3 分) (2016•绥化) 如图, 是一个带有方形空洞和圆形空洞的儿童玩具, 如果用下列几何体作为塞子, 那么既可以堵住方形空洞, 又可以堵住圆形空洞的几何体是 ()



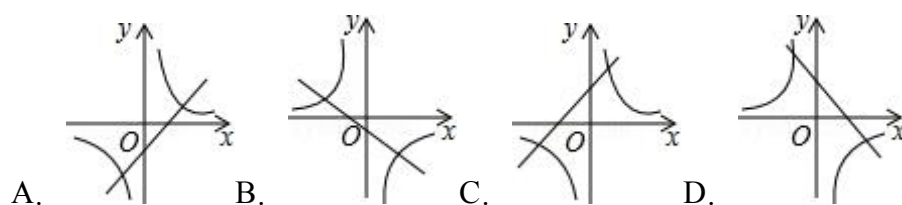
【考点】 简单几何体的三视图.

【分析】 根据从正面看得到的图形是主视图, 从上边看得到的图形是俯视图, 可得答案.

【解答】 解: 圆柱从上边看是一个圆, 从正面看是一个正方形, 既可以堵住方形空洞, 又可以堵住圆形空洞, 故选: B.

【点评】 本题考查了简单组合体的三视图, 从正面看得到的图形是主视图, 从上边看得到的图形是俯视图.

4. (3 分) (2016•绥化) 当 $k > 0$ 时, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 和一次函数 $y = kx + 2$ 的图象大致是 ()



【考点】 反比例函数的图象; 一次函数的图象.

【分析】 根据 $k > 0$, 判断出反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 经过一三象限, 一次函数 $y = kx + 2$

经过一二三象限，结合选项所给图象判断即可．

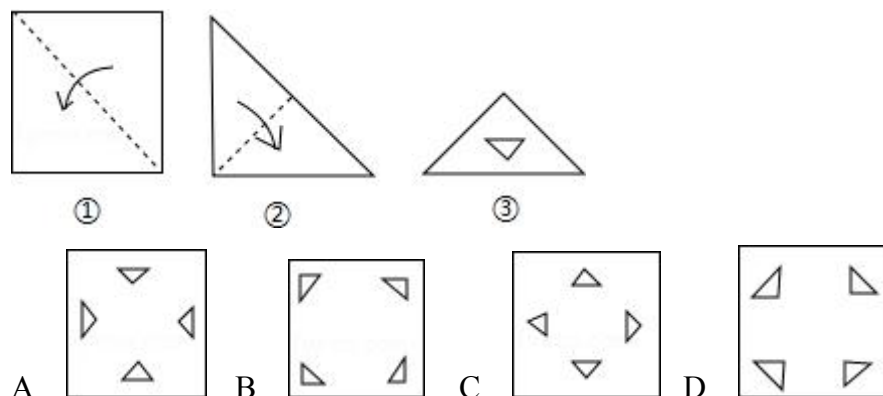
【解答】解：∵ $k > 0$ ，

∴反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 经过一三象限，一次函数 $y = kx + 2$ 经过一二三象限．

故选 C．

【点评】本题考查了反比例函数与一次函数图象的知识，解答本题的关键在于通过 $k > 0$ 判断出函数所经过的象限．

5. (3 分) (2016•绥化) 把一张正方形纸片如图①、图②对折两次后，再按如图③挖去一个三角形小孔，则展开后图形是 ()



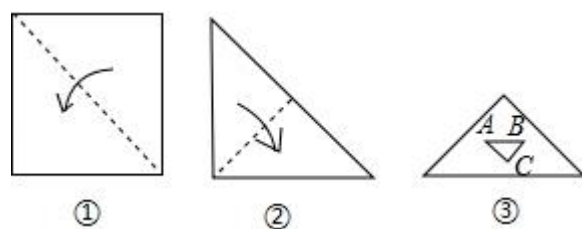
【考点】剪纸问题．

【专题】计算题．

【分析】结合空间思维，分析折叠的过程及剪三角形的位置，注意图形的对称性，易知展开的形状．

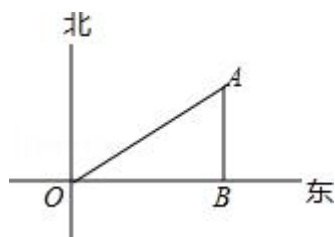
【解答】解：当正方形纸片两次沿对角线对折成为一直角三角形时，在直角三角形中间的位置上剪三角形，则直角顶点处完好，即原正方形中间无损，且三角形关于对角线对称，三角形的 AB 边平行于正方形的边．再结合 C 点位置可得答案为 C．

故选 C．



【点评】本题主要考查了学生的立体思维能力即操作能力. 错误的主要原因是空间观念以及转化的能力不强, 缺乏逻辑推理能力, 需要在平时生活中多加培养.

6. (3 分) (2016•绥化) 如图, 小雅家 (图中点 O 处) 门前有一条东西走向的公路, 经测得有一水塔 (图中点 A 处) 在距她家北偏东 60° 方向的 500 米处, 那么水塔所在的位置到公路的距离 AB 是 ()



- A. 250 米 B. $250\sqrt{3}$ 米 C. $\frac{500}{3}\sqrt{3}$ 米 D. $500\sqrt{2}$ 米

【考点】解直角三角形的应用-方向角问题.

【分析】在 $\text{RT}\triangle AOB$ 中, 由 $\angle AOB=30^\circ$ 可知 $AB=\frac{1}{2}AO$, 由此即可解决问题.

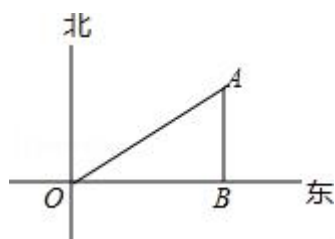
【解答】解: 由题意 $\angle AOB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$, $OA=500$,

$\therefore AB \perp OB$,

$\therefore \angle ABO=90^\circ$,

$\therefore AB=\frac{1}{2}AO=250$ 米.

故选 A.



【点评】本题考查解直角三角形, 方向角, 直角三角形中 30° 度角所对的直角边等于斜边的一半等知识, 解题的关键是搞清楚方向角的定义, 利用直角三角形性质解决问题, 属于中考常考题型.

7. (3 分) (2016•绥化) 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \leq \frac{1}{2}$ B. $x \geq \frac{1}{2}$ C. $x < \frac{1}{2}$ D. $x > \frac{1}{2}$

【考点】函数自变量的取值范围.

【分析】由二次根式的被开方数大于等于 0 可得 $2x - 1 \geq 0$, 由分式有意义的性质可得 $2x - 1 \neq 0$, 即可求出自变量 x 的取值范围.

【解答】解:

由二次根式的被开方数大于等于 0 可得 $2x - 1 \geq 0$ ①,

由分式有意义的性质可得 $2x - 1 \neq 0$ ②,

由①②可知 $x > \frac{1}{2}$,

故选 D.

【点评】本题考查了自变量的取值范围, 熟练掌握①当表达式的分母不含有自变量时, 自变量取全体实数. 例如 $y=2x+13$ 中的 x . ②当表达式的分母中含有自变量时, 自变量取值要使分母不为零. 例如 $y=x+2x-1$. ③当函数的表达式是偶次根式时, 自变量的取值范围必须使被开方数不小于零. ④对于实际问题中的函数关系式, 自变量的取值除必须使表达式有意义外, 还要保证实际问题有意义.

8. (3 分) (2016•绥化) 一个长方形的周长为 30cm, 若这个长方形的长减少 1cm, 宽增加 2cm 就可成为一个正方形, 设长方形的长为 x cm, 可列方程为 ()

A. $x+1 = (30-x) - 2$ B. $x+1 = (15-x) - 2$ C. $x-1 = (30-x) + 2$ D. $x-1 = (15-x) + 2$

【考点】由实际问题抽象出一元一次方程.

【分析】根据长方形的周长公式, 表示出长方形的宽, 再由正方形的四条边都相等得出等式即可.

【解答】解: $\because$ 长方形的长为 x cm, 长方形的周长为 30cm,

$\therefore$ 长方形的宽为 $(15-x)$ cm,

$\because$ 这个长方形的长减少 1cm, 宽增加 2cm 就可成为一个正方形,

$\therefore x-1=15-x+2$,

故选 D.

【点评】本题考查了有实际问题抽象出一元一次方程, 解题的关键是表示出长方形的宽.

9. (3 分) (2016•绥化) 化简 $\frac{a^2}{a-1} - (a+1)$ 的结果是 ()

A. $\frac{1}{a-1}$ B. $-\frac{1}{a-1}$ C. $\frac{2a-1}{a-1}$ D. $-\frac{2a-1}{a-1}$

【考点】分式的加减法.

【分析】先根据通分法则把原式变形，再根据平方差公式、合并同类项法则计算即可.

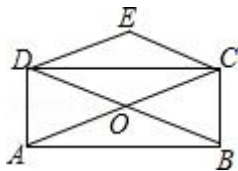
【解答】解：原式 $= \frac{a^2}{a-1} - \frac{a^2-1}{a-1}$

$$= \frac{1}{a-1},$$

故选：A.

【点评】本题考查的是分式的加减法，掌握分式的加减法法则、平方差公式是解题的关键.

10. (3 分) (2016•绥化) 如图，矩形 ABCD 的对角线 AC、BD 相交于点 O，CE // BD，DE // AC，若 AC=4，则四边形 OCED 的周长为 ()



A. 4 B. 8 C. 10 D. 12

【考点】矩形的性质；菱形的判定与性质.

【专题】计算题；矩形 菱形 正方形.

【分析】由四边形 ABCD 为矩形，得到对角线互相平分且相等，得到 $OD=OC$ ，再利用两对边平行的四边形为平行四边形得到四边形 DECO 为平行四边形，利用邻边相等的平行四边形为菱形得到四边形 DECO 为菱形，根据 AC 的长求出 OC 的长，即可确定出其周长.

【解答】解：∵ 四边形 ABCD 为矩形，

$$\therefore OA=OC, OB=OD, \text{ 且 } AC=BD,$$

$$\therefore OA=OB=OC=OD=2,$$

$$\therefore CE \parallel BD, DE \parallel AC,$$

∴ 四边形 DECO 为平行四边形,
∴ OD=OC,
∴ 四边形 DECO 为菱形,
∴ OD=DE=EC=OC=2,
则四边形 OCED 的周长为 2+2+2+2=8,
故选 B

【点评】 此题考查了矩形的性质, 以及菱形的判定与性质, 熟练掌握判定与性质是解本题的关键.

二、填空题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

11. (3 分) (2016•绥化) $-\frac{1}{2016}$ 的相反数的倒数是 2016.

【考点】 倒数; 相反数.

【分析】 先求出 $-\frac{1}{2016}$ 的相反数是 $\frac{1}{2016}$, 再求得它的倒数为 2016.

【解答】 解: $-\frac{1}{2016}$ 的相反数是 $\frac{1}{2016}$, $\frac{1}{2016}$ 的倒数是 2016.

故答案为: 2016.

【点评】 主要考查相反数, 倒数的概念及性质.

相反数的定义: 只有符号不同的两个数互为相反数, 0 的相反数是 0;

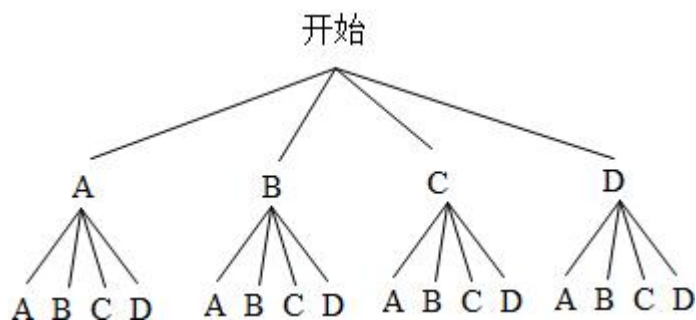
倒数的定义: 若两个数的乘积是 1, 我们就称这两个数互为倒数.

12. (3 分) (2016•绥化) 在一个不透明的口袋中, 装有 A, B, C, D 4 个完全相同的小球, 随机摸取一个小球然后放回, 再随机摸取一个小球, 两次摸到同一个小球的概率是 $\frac{1}{4}$.

【考点】 列表法与树状图法; 概率公式.

【分析】 可以根据画树状图的方法, 先画树状图, 再求得两次摸到同一个小球的概率.

【解答】 解: 画树状图如下:

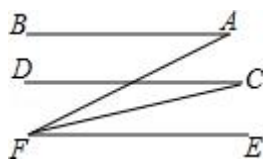


$$\therefore P(\text{两次摸到同一个小球}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

故答案为: $\frac{1}{4}$

【点评】 本题主要考查了概率, 解决问题的关键是掌握树状图法. 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

13. (3 分) (2016•绥化) 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 若 $\angle A = 30^\circ$, $\angle AFC = 15^\circ$, 则 $\angle C = 15^\circ$.



【考点】 平行线的性质.

【分析】 根据平行线的性质得到 $\angle A = \angle AFE = 30^\circ$, 由角的和差得到 $\angle CFE = \angle AFE - \angle AFC = 15^\circ$, 根据平行线的性质即可得到结论.

【解答】 解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle A = \angle AFE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle AFE - \angle AFC = 15^\circ,$$

$$\because CD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle C = \angle CFE = 15^\circ,$$

故答案为: 15° .

【点评】 本题考查了平行线的性质: 两直线平行, 同位角相等. 熟记平行线的性质是解题的关键.

14. (3分) (2016•绥化) 计算: $(\frac{1}{2})^{-3} - 4\tan 45^\circ + |1 - \sqrt{12}| = \underline{3+2\sqrt{3}}$.

【考点】实数的运算; 负整数指数幂; 特殊角的三角函数值.

【分析】直接利用绝对值的性质和特殊角的三角函数值、负整数指数幂的性质、二次根式的性质分别化简求出答案.

【解答】解: 原式 $= 8 - 4 \times 1 + \sqrt{12} - 1$
 $= 4 + 2\sqrt{3} - 1$
 $= 3 + 2\sqrt{3}$.

故答案为: $3+2\sqrt{3}$.

【点评】此题主要考查了实数运算, 正确掌握相关性质进而化简是解题关键.

15. (3分) (2016•绥化) 将抛物线 $y=3(x-4)^2+2$ 向右平移 1 个单位长度, 再向下平移 3 个单位长度, 平移后抛物线的解析式是 $\underline{y=3(x-5)^2-1}$.

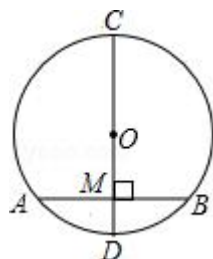
【考点】二次函数图象与几何变换.

【分析】根据“左加右减、上加下减”的原则进行解答即可.

【解答】解: $y=3(x-4)^2+2$ 向右平移 1 个单位所得抛物线解析式为: $y=3(x-5)^2+2$;
再向下平移 3 个单位为: $y=3(x-5)^2-1$.
故答案为: $y=3(x-5)^2-1$.

【点评】本题考查的是二次函数的图象与几何变换, 熟知函数图象平移的法则是解答此题的关键.

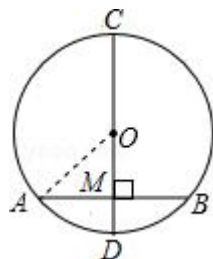
16. (3分) (2016•绥化) 如图, $\odot O$ 的直径 $CD=20\text{cm}$, AB 是 $\odot O$ 的弦, $AB \perp CD$, 垂足为 M , 若 $OM=6\text{cm}$, 则 AB 的长为 $\underline{16}\text{cm}$.



【考点】垂径定理.

【分析】连接 OA，根据垂径定理求出 $AB=2AM$ ，已知 OA、OM，根据勾股定理求出 AM 即可.

【解答】解：连接 OA，



$\therefore \odot O$ 的直径 $CD=20\text{cm}$,

$\therefore OA=10\text{cm}$,

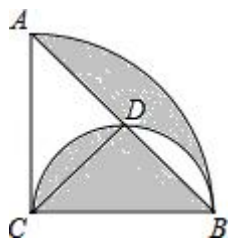
在 $\text{Rt}\triangle OAM$ 中，由勾股定理得： $AM=\sqrt{10^2-6^2}=8\text{cm}$,

$\therefore$ 由垂径定理得： $AB=2AM=16\text{cm}$.

故答案为：16.

【点评】本题考查了垂径定理和勾股定理的应用，关键是构造直角三角形.

17. (3 分) (2016•绥化) 如图，在半径 AC 为 2，圆心角为 90° 的扇形内，以 BC 为直径作半圆，交弦 AB 于点 D，连接 CD，则图中阴影部分的面积是 $\pi-1$.



【考点】扇形面积的计算.

【分析】已知 BC 为直径，则 $\angle CDB=90^\circ$ ，在等腰直角三角形 ABC 中，CD 垂直平分 AB， $CD=BD$ ，D 为半圆的中点，阴影部分的面积可以看做是扇形 ACB 的面积与 $\triangle ADC$ 的面积之差.

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

$\therefore$ BC 是半圆的直径，

$\therefore \angle CDB=90^\circ$,

在等腰 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中，CD 垂直平分 AB， $CD=BD=\sqrt{2}$,

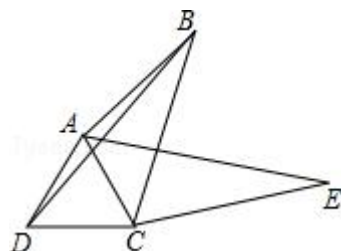
∴ D 为半圆的中点,

$$S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形 ACB}} - S_{\triangle ADC} = \frac{1}{4}\pi \times 2^2 - \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 = \pi - 1.$$

故答案为 $\pi - 1$.

【点评】 本题考查扇形面积的计算公式及不规则图形面积的求法, 掌握面积公式是解题的关键.

18. (3 分) (2016•绥化) 如图, 在四边形 ABCD 中, $\angle ABC = 30^\circ$, 将 $\triangle DCB$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 后, 点 D 的对应点恰好与点 A 重合, 得到 $\triangle ACE$, 若 $AB = 3$, $BC = 4$, 则 $BD = \underline{5}$ (提示: 可连接 BE)



【考点】 旋转的性质.

【专题】 推理填空题.

【分析】 要求 BD 的长, 根据旋转的性质, 只要求出 AE 的长即可, 由题意可得到三角形 ABE 的形状, 从而可以求得 AE 的长, 本题得以解决.

【解答】 解: 连接 BE, 如右图所示,

∵ $\triangle DCB$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle ACE$, $AB = 3$, $BC = 4$, $\angle ABC = 30^\circ$,

∴ $\angle BCE = 60^\circ$, $CB = CE$, $AE = BD$,

∴ $\triangle BCE$ 是等边三角形,

∴ $\angle CBE = 60^\circ$, $BE = BC = 4$,

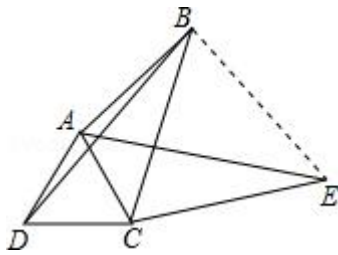
∴ $\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$,

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

又 ∵ $AE = BD$,

∴ $BD = 5$,

故答案为: 5.



【点评】 本题考查旋转的性质，解题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件.

19. (3 分) (2016•绥化) 古希腊数学家把数 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...叫做三角数, 它有一定的规律性. 若把第一个三角数记为 a_1 , 第二个三角数记为 a_2 ..., 第 n 个三角数记为 a_n , 计算 a_1+a_2 , a_2+a_3 , a_3+a_4 , ...由此推算 $a_{399}+a_{400}=\underline{1.6 \times 10^5 \text{ 或 } 160000}$.

【考点】 规律型: 数字的变化类.

【专题】 规律型.

【分析】 首先计算 a_1+a_2 , a_2+a_3 , a_3+a_4 的值, 然后总结规律, 根据规律可以得出结论.

【解答】 解: $\because a_1+a_2=4=2^2$; $a_2+a_3=3+6=9=3^2$; $a_3+a_4=6+10=16=4^2$; ...

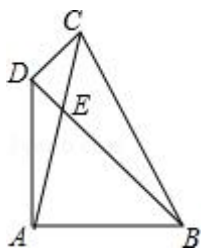
$$\therefore a_n+a_{n+1}=(n+1)^2;$$

$$\therefore a_{399}+a_{400}=400^2=160000=1.6 \times 10^5.$$

故答案为: 1.6×10^5 或 160000.

【点评】 本题考查的是规律发现, 根据计算 a_1+a_2 , a_2+a_3 , a_3+a_4 的值可以发现规律为 $a_n+a_{n+1}=(n+1)^2$, 发现规律是解决本题的关键.

20. (3 分) (2016•绥化) 如图, 在四边形 ABCD 中, 对角线 AC、BD 相交于点 E, $\angle DAB=\angle CDB=90^\circ$, $\angle ABD=45^\circ$, $\angle DCA=30^\circ$, $AB=\sqrt{6}$, 则 $AE=\underline{2}$ (提示: 可过点 A 作 BD 的垂线)



【考点】 勾股定理；含 30 度角的直角三角形；等腰直角三角形.

【专题】 计算题；解直角三角形及其应用.

【分析】 过 A 作 $AF \perp BD$ ，交 BD 于点 F，由三角形 ABD 为等腰直角三角形，利用三线合一得到 AF 为中线，利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半求出 AF 的长，在直角三角形 AEF 中，利用 30 度角所对的直角边等于斜边的一半求出 AE 的长即可.

【解答】 解：过 A 作 $AF \perp BD$ ，交 BD 于点 F，

$$\because AD=AB, \angle DAB=90^\circ,$$

$\therefore$ AF 为 BD 边上的中线，

$$\therefore AF=\frac{1}{2}BD,$$

$$\because AB=AD=\sqrt{6},$$

$$\therefore \text{根据勾股定理得：} BD=\sqrt{6+6}=2\sqrt{3},$$

$$\therefore AF=\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中， $\angle EAF=\angle DCA=30^\circ$ ，

$$\therefore EF=\frac{1}{2}AE,$$

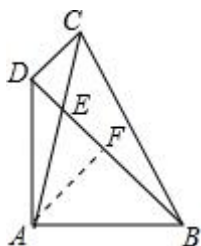
设 $EF=x$ ，则有 $AE=2x$ ，

根据勾股定理得： $x^2+3=4x^2$ ，

解得： $x=1$ ，

则 $AE=2$.

故答案为： 2



【点评】 此题考查了勾股定理，含 30 度直角三角形的性质，以及等腰三角形的

性质，熟练掌握勾股定理是解本题的关键.

三、解答题（共 8 小题，满分 60 分）

21. (5 分) (2016•绥化) 为了传承优秀传统文化，我市组织了一次初三年级 1200 名学生参加的“汉字听写”大赛，为了更好地了解本次大赛的成绩分布情况，随机抽取了 100 名学生的成绩（满分 50 分），整理得到如下的统计图表：

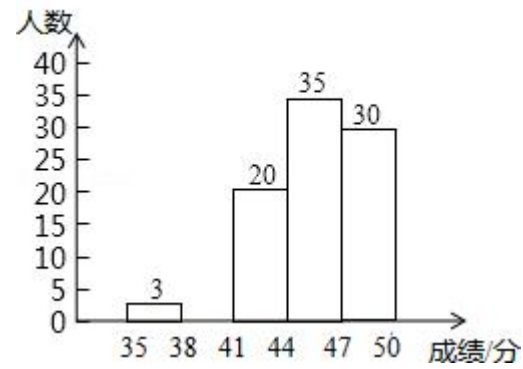
成绩 (分)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
人数	1	2	3	3	6	7	5	8	15	9	11	12	8	6	4

成绩分组	频数	频率
$35 \leq x < 38$	3	0.03
$38 \leq x < 41$	a	0.12
$41 \leq x < 44$	20	0.20
$44 \leq x < 47$	35	0.35
$47 \leq x \leq 50$	30	b

请根据所提供的信息解答下列问题：

- (1) 样本的中位数是 44.5 分；
- (2) 频率统计表中 $a = \underline{12}$ ， $b = \underline{0.30}$ ；
- (3) 请补全频数分布直方图；
- (4) 请根据抽样统计结果，估计该次大赛中成绩不低于 41 分的学生有多少人？

频数分布直方图



【考点】频数（率）分布直方图；用样本估计总体；频数（率）分布表；中位数.

【专题】统计与概率.

【分析】(1) 根据题意可知中位数是第 50 个数和 51 个数的平均数, 本题得以解决;

(2) 根据表格和随机抽取了 100 名学生的成绩, 可以求得 a 、 b 的值, 本题得以解决;

(3) 根据 (2) 中 a 的值, 可以将频数分布直方图补充完整;

(4) 根据表格中的数据可以求得该次大赛中成绩不低于 41 分的学生人数.

【解答】解: (1) $\because$ 随机抽取了 100 名学生的成绩,
由表格可得, $1+2+3+3+6+7+5+8+15=50$, $50+9+59$,
 $\therefore$ 中位数为: $\frac{44+45}{2}=44.5$,

故答案为: 44.5;

(2) 由表格可得, $a=100 \times 0.12=12$,
 $b=30 \div 100=0.30$,

故答案为: 12, 0.30;

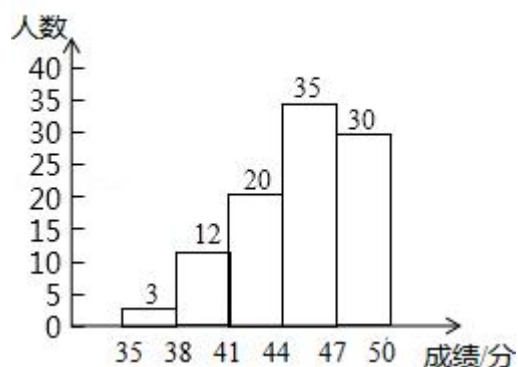
(3) 补全的频数分布直方图如右图所示,

(4) 由题意可得,

$1200 \times (0.20+0.35+0.30) = 1020$ (人),

即该次大赛中成绩不低于 41 分的学生有 1020 人.

频数分布直方图



【点评】本题考查频数分布直方图、用样本估计总体、频数分布表、中位数, 解题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件.

22. (6 分) (2016•绥化) 关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+2m=0$ 有两个不相等的实

数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2+2x+2m=0$ 的两个根, 且 $x_1^2+x_2^2=8$, 求 m 的值.

【考点】根与系数的关系; 根的判别式.

【分析】(1) 根据方程根的个数结合根的判别式, 可得出关于 m 的一元一次不等式, 解不等式即可得出结论;

(2) 根据方程的解析式结合根与系数的关系找出 $x_1+x_2=-2$, $x_1 \cdot x_2=2m$, 再结合完全平方公式可得出 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1 \cdot x_2$, 代入数据即可得出关于 m 的一元一次方程, 解方程即可求出 m 的值, 经验值 $m=-1$ 符合题意, 此题得解.

【解答】解: (1) $\because$ 一元二次方程 $x^2+2x+2m=0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta=2^2-4 \times 1 \times 2m=4-8m>0,$$

$$\text{解得: } m<\frac{1}{2}.$$

$$\therefore m \text{ 的取值范围为 } m<\frac{1}{2}.$$

(2) $\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $x^2+2x+2m=0$ 的两个根,

$$\therefore x_1+x_2=-2, \quad x_1 \cdot x_2=2m,$$

$$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1 \cdot x_2=4-4m=8,$$

$$\text{解得: } m=-1.$$

$$\text{当 } m=-1 \text{ 时, } \Delta=4-8m=12>0.$$

$$\therefore m \text{ 的值为 } -1.$$

【点评】本题考查了根的判别式、根与系数的关系、解一元一次不等式以及解一元一次方程, 解题的关键是: (1) 结合题意得出 $4-8m>0$; (2) 结合题意得出 $4-4m=8$. 本题属于基础题, 难度不大, 解决该题型题目时, 根据方程根的个数结合根的判别式得出不等式是关键.

23. (6分) (2016•绥化) 某商场计划购进 A、B 两种商品, 若购进 A 种商品 20 件和 B 种商品 15 件需 380 元; 若购进 A 种商品 15 件和 B 种商品 10 件需 280 元.

(1) 求 A、B 两种商品的进价分别是多少元?

(2) 若购进 A、B 两种商品共 100 件，总费用不超过 900 元，问最多能购进 A 种商品多少件？

【考点】一元一次不等式的应用；二元一次方程组的应用.

【分析】(1) 设 A 两种商品的进价是 a 元，B 两种商品的进价是 b 元，根据题意列方程组即可得到结论

(2) 设购进 A 种商品 x 件，则购进 B 种商品 $(100 - x)$ 件，根据题意了不等式即可得到结论.

【解答】解：(1) 设 A 商品的进价是 a 元，B 商品的进价是 b 元，

根据题意得：
$$\begin{cases} 20a+15b=380 \\ 15a+10b=280 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} a=16 \\ b=4 \end{cases}$$

答：A 商品的进价是 16 元，B 商品的进价是 4 元；

(2) 设购进 A 种商品 x 件，则购进 B 种商品 $(100 - x)$ 件，
根据题意得： $16x+4(100 - x) \leq 900$,

解得： $x \leq 41\frac{2}{3}$, $\because x$ 为整数，

$\therefore x$ 的最大整数解为 41，

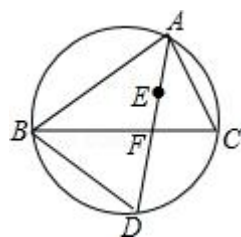
$\therefore$ 最多能购进 A 种商品 41 件

【点评】本题考查了二元一次方程组的应用，一元一次不等式的应用，正确的理解题意是解题的关键.

24. (8 分) (2016•绥化) 如图，点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心，AE 的延长线与 BC 相交于点 F，与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D

(1) 求证： $\triangle BFD \sim \triangle ABD$;

(2) 求证： $DE = DB$.



【考点】相似三角形的判定与性质；三角形的外接圆与外心；三角形的内切圆与

内心.

【专题】证明题.

【分析】(1) 先根据内心的性质得出 $\angle BAD = \angle CAD$, 再由圆周角定理得出 $\angle CAD = \angle CBD$, 故可得出 $\angle BAD = \angle CBD$, 进而可得出结论;

(2) 连接 BE, 根据点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心得出 $\angle ABE = \angle CBE$. 由 $\angle CBD = \angle BAD$ 可得出 $\angle BAD + \angle ABE = \angle CBE + \angle CBD$, 进而可得出结论.

【解答】(1) 证明: $\because$ 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD.$$

$$\because \angle CAD = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CBD.$$

$$\because \angle BDF = \angle ADB,$$

$$\therefore \triangle BFD \sim \triangle ABD;$$

(2) 证明: 连接 BE,

$\because$ 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心,

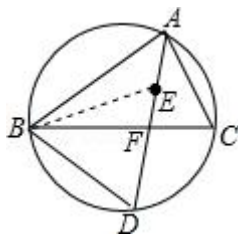
$$\therefore \angle ABE = \angle CBE.$$

又 $\because \angle CBD = \angle BAD$,

$$\therefore \angle BAD + \angle ABE = \angle CBE + \angle CBD.$$

$$\because \angle BAD + \angle ABE = \angle BED, \quad \angle CBE + \angle CBD = \angle DBE, \quad \text{即 } \angle DBE = \angle BED,$$

$$\therefore DE = DB.$$



【点评】本题考查的是相似三角形的判定与性质, 根据题意作出辅助线, 利用三角形内心的性质求解是解答此题的关键.

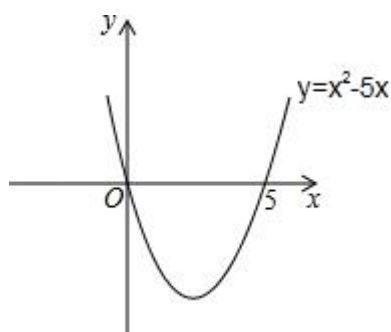
25. (8 分) (2016•绥化) 自主学习, 请阅读下列解题过程.

解一元二次不等式: $x^2 - 5x > 0$.

解：设 $x^2 - 5x = 0$ ，解得： $x_1 = 0$ ， $x_2 = 5$ ，则抛物线 $y = x^2 - 5x$ 与 x 轴的交点坐标为 $(0, 0)$ 和 $(5, 0)$ 。画出二次函数 $y = x^2 - 5x$ 的大致图象（如图所示），由图象可知：当 $x < 0$ ，或 $x > 5$ 时函数图象位于 x 轴上方，此时 $y > 0$ ，即 $x^2 - 5x > 0$ ，所以，一元二次不等式 $x^2 - 5x > 0$ 的解集为： $x < 0$ ，或 $x > 5$ 。

通过对上述解题过程的学习，按其解题的思路和方法解答下列问题：

- (1) 上述解题过程中，渗透了下列数学思想中的 ① 和 ③。（只填序号）
 ①转化思想 ②分类讨论思想 ③数形结合思想
- (2) 一元二次不等式 $x^2 - 5x < 0$ 的解集为 $0 < x < 5$ 。
- (3) 用类似的方法解一元二次不等式： $x^2 - 2x - 3 > 0$ 。



【考点】 二次函数与不等式（组）；二次函数的图象；抛物线与 x 轴的交点。

【分析】 (1) 根据题意容易得出结论；

(2) 由图象可知：当 $0 < x < 5$ 时函数图象位于 x 轴下方，此时 $y < 0$ ，即 $x^2 - 5x < 0$ ，即可得出结果；

(3) 设 $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，解方程得出抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 与 x 轴的交点坐标，画出二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的大致图象，由图象可知：当 $x < -1$ ，或 $x > 3$ 时函数图象位于 x 轴上方，此时 $y > 0$ ，即 $x^2 - 2x - 3 > 0$ ，即可得出结果。

【解答】 解：(1) 上述解题过程中，渗透了下列数学思想中的①和③；
 故答案为：①，③；

(2) 由图象可知：当 $0 < x < 5$ 时函数图象位于 x 轴下方，
 此时 $y < 0$ ，即 $x^2 - 5x < 0$ ，
 $\therefore$ 一元二次不等式 $x^2 - 5x < 0$ 的解集为： $0 < x < 5$ ；
 故答案为： $0 < x < 5$ 。

(3) 设 $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，
 解得： $x_1 = 3$ ， $x_2 = -1$ ，

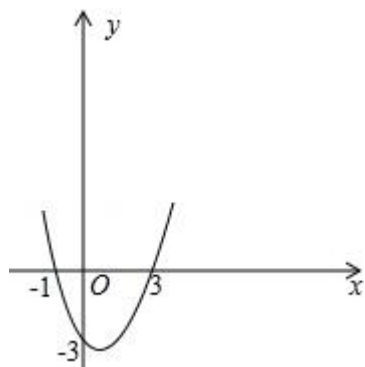
∴ 抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 x 轴的交点坐标为 $(3, 0)$ 和 $(-1, 0)$.

画出二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的大致图象 (如图所示),

由图象可知: 当 $x < -1$, 或 $x > 3$ 时函数图象位于 x 轴上方,

此时 $y > 0$, 即 $x^2-2x-3 > 0$,

∴ 一元二次不等式 $x^2-2x-3 > 0$ 的解集为: $x < -1$, 或 $x > 3$.



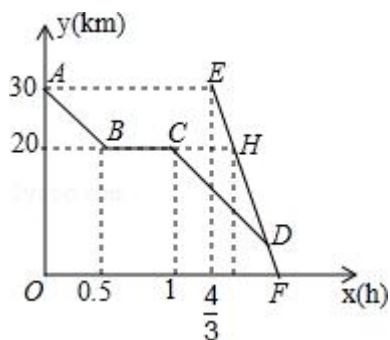
【点评】 本题考查了二次函数与不等式组的关系、二次函数的图象、抛物线与 x 轴的交点坐标、一元二次方程的解法等知识; 熟练掌握二次函数与不等式组的关系是解决问题的关键.

26. (8 分) (2016•绥化) 周末, 小芳骑自行车从家出发到野外郊游, 从家出发 0.5 小时到达甲地, 游玩一段时间后按原速前往乙地, 小芳离家 1 小时 20 分钟后, 妈妈驾车沿相同路线前往乙地, 行驶 10 分钟时, 恰好经过甲地, 如图是她们距乙地的路程 y (km) 与小芳离家时间 x (h) 的函数图象.

(1) 小芳骑车的速度为 20 km/h, H 点坐标 $(\frac{3}{2}, 20)$.

(2) 小芳从家出发多少小时后被妈妈追上? 此时距家的路程多远?

(3) 相遇后, 妈妈载上小芳和自行车同时到达乙地 (彼此交流时间忽略不计), 求小芳比预计时间早几分钟到达乙地?



【考点】 一次函数的应用.

【分析】 (1) 根据函数图中的数据, 由小芳从家到甲地的路程和时间可以求出小芳骑车的速度;

(2) 先求出直线 AB 的解析式, 再根据直线 $AB \parallel CD$, 求出直线 CD 的解析式, 再求出直线 EF 的解析式, 联立直线 CD 和直线 EF 的解析式, 求出交点 D 的坐标即可;

(3) 将 $y=0$, 分别代入直线 CD 和直线 EF 的解析式, 分别求出当 $y=0$ 时候的横坐标, 再求出两横坐标的差值即可.

【解答】 解: (1) 由函数图可以得出, 小芳家距离甲地的路程为 10km, 花费时间为 0.5h,

故小芳骑车的速度为: $10 \div 0.5 = 20$ (km/h),

由题意可得出, 点 H 的纵坐标为 20, 横坐标为: $\frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$,

故点 H 的坐标为 $(\frac{3}{2}, 20)$;

(2) 设直线 AB 的解析式为: $y_1 = k_1x + b_1$,

将点 A (0, 30), B (0.5, 20) 代入得: $y_1 = -20x + 30$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore$ 设直线 CD 的解析式为: $y_2 = -20x + b_2$,

将点 C (1, 20) 代入得: $b_2 = 40$,

故 $y_2 = -20x + 40$,

设直线 EF 的解析式为: $y_3 = k_3x + b_3$,

将点 E $(\frac{4}{3}, 30)$, H $(\frac{3}{2}, 20)$ 代入得: $k_3 = -60$, $b_3 = 110$,

$\therefore y_3 = -60x + 110$,

解方程组 $\begin{cases} y = -60x + 110 \\ y = -20x + 40 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = 1.75 \\ y = 5 \end{cases}$,

$\therefore$ 点 D 坐标为 (1.75, 5),

$30 - 5 = 25$ (km),

所以小芳出发 1.75 小时后被妈妈追上, 此时距家 25km;

(3) 将 $y=0$ 代入直线 CD 解析式有: $-20x + 40 = 0$,

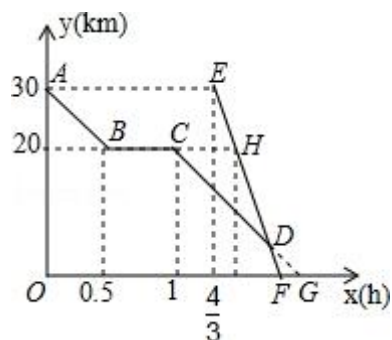
解得 $x=2$,

将 $y=0$ 代入直线 EF 的解析式有: $-60x+110=0$,

解得 $x=\frac{11}{6}$,

$2 - \frac{11}{6} = \frac{1}{6}$ (h) = 10 (分钟),

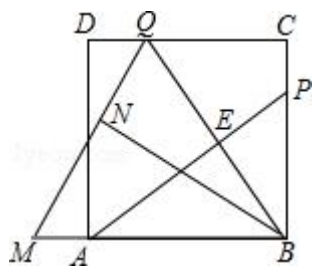
故小芳比预计时间早 10 分钟到达乙地.



【点评】 本题考查了一次函数的应用, 解答本题的关键在于读懂题意, 根据函数图所给的信息求出合适的函数解析式并求解.

27. (9 分) (2016•绥化) 如图, P 为正方形 ABCD 的边 BC 上一动点 (P 与 B、C 不重合), 点 Q 在 CD 边上, 且 $BP=CQ$, 连接 AP、BQ 交于点 E, 将 $\triangle BQC$ 沿 BQ 所在直线对折得到 $\triangle BQN$, 延长 QN 交 BA 的延长线于点 M.

- (1) 求证: $AP \perp BQ$;
- (2) 若 $AB=3$, $BP=2PC$, 求 QM 的长;
- (3) 当 $BP=m$, $PC=n$ 时, 求 AM 的长.



【考点】 四边形综合题.

【分析】 (1) 证明 $\triangle ABP \cong \triangle BCQ$, 则 $\angle BAP = \angle CBQ$, 从而证明 $\angle CBQ + \angle APB = 90^\circ$, 进而得证;

(2) 设 $MQ=MB=x$, 则 $MN=x-2$. 在直角 $\triangle MBN$ 中, 利用勾股定理即可列方程求解;

(3) 设 $AM=y$, $BN=BC=m+n$, 在直角 $\triangle BNM$ 中, $MB=y+m+n$, $MN=MQ-QN=$

$(y+m+n) - m = y+n$, 利用勾股定理即可求解.

【解答】 (1) 证明: $\because$ 四边形 ABCD 是正方形,

$\therefore \angle ABC = \angle C = 90^\circ$, $AB = BC$.

$\therefore$ 在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle BCQ$ 中,

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABC=\angle C, \\ BP=CQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle BCQ$,

$\therefore \angle BAP = \angle CBQ$.

$\therefore \angle BAP + \angle APB = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBQ + \angle APB = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEP = 90^\circ$,

$\therefore AP \perp BQ$;

(2) 解: $\because$ 正方形 ABCD 中, $AB=3$, $BP=2CP$,

$\therefore BP=2$,

由 (1) 可得 $NQ=CQ=BP=2$, $NB=3$.

又 $\because \angle NQB = \angle CQB = \angle ABQ$,

$\therefore MQ=MB$.

设 $MQ=MB=x$, 则 $MN=x-2$.

在直角 $\triangle MBN$ 中, $MB^2 = BN^2 + MN^2$,

即 $x^2 = 3^2 + (x-2)^2$,

解得: $x = \frac{13}{4}$, 即 $MQ = \frac{13}{4}$;

(3) $\because BP=m$, $CP=n$,

由 (1) (2) 得 $MQ=BM$, $CQ=QN=BP=m$,

设 $AM=y$, $BN=BC=m+n$,

在直角 $\triangle BNM$ 中, $MB=y+m+n$, $MN=MQ-QN=(y+m+n) - m = y+n$,

$(y+m+n)^2 = (m+n)^2 + (y+n)^2$,

即 $y^2 + 2(m+n)y + (m+n)^2 = (m+n)^2 + y^2 + 2ny + n^2$,

则 $y = \frac{n^2}{2m}$, $AM = \frac{n^2}{2m}$.

【点评】 本题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定与性质以及勾股定理, 正

确利用 m 和 n 表示 $\triangle BMN$ 的边长是关键.

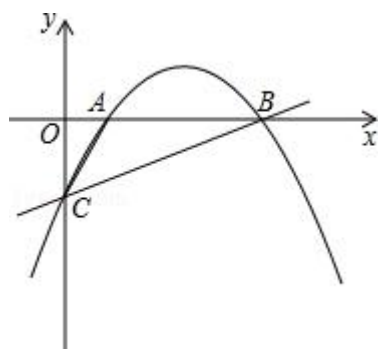
28. (10 分) (2016•绥化) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx-\frac{5}{3}$ 经过点 A (1, 0) 和点 B

(5, 0), 与 y 轴交于点 C.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 以点 A 为圆心, 作与直线 BC 相切的 $\odot A$, 请判断 $\odot A$ 与 y 轴有怎样的位置关系, 并说明理由;

(3) 在直线 BC 上方的抛物线上任取一点 P, 连接 PB、PC, 请问: $\triangle PBC$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个值和此时点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【考点】 二次函数综合题.

【分析】 (1) 把 A、B 两点分别代入抛物线解析可求得 a 和 b , 可求得抛物线解析式;

(2) 过 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D, 则 AD 为 $\odot A$ 的半径, 由条件可证明 $\triangle ABD \sim \triangle CBO$, 利用相似三角形的性质可求得 AD 的长, 可求得半径, 进而得出答案;

(3) 由待定系数法可求得直线 BC 解析式, 过 P 作 $PQ \parallel y$ 轴, 交直线 BC 于点 Q, 交 x 轴于点 E, 可设出 P、Q 的坐标, 可表示出 $\triangle PQC$ 和 $\triangle PQB$ 的面积, 可表示出 $\triangle PBC$ 的面积, 再利用二次函数的性质可求得其最大值, 容易求得 P 点坐标.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx-\frac{5}{3}$ 经过点 A (1, 0) 和点 B (5, 0),

$$\therefore \text{把 A、B 两点坐标代入可得} \begin{cases} a+b-\frac{5}{3}=0 \\ 25a+5b-\frac{5}{3}=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{3}, \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3};$$

(2) 相交,

理由: 过 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D, 如图 1,

$\therefore \odot A$ 与 BC 相切,

$\therefore AD$ 为 $\odot A$ 的半径,

由 (1) 可知 $C(0, -\frac{5}{3})$, 且 $A(1, 0)$, $B(5, 0)$,

$$\therefore OB = 5, AB = OB - OA = 4, OC = \frac{5}{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle OBC \text{ 中, 由勾股定理可得 } BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{(\frac{5}{3})^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{10}}{3},$$

$$\therefore \angle ADB = \angle BOC = 90^\circ, \angle ABD = \angle CBO,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBO,$$

$$\therefore \frac{AD}{OC} = \frac{AB}{BC}, \text{ 即 } \frac{AD}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{\frac{5\sqrt{10}}{3}},$$

$$\text{解得 } AD = \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$\text{即 } \odot A \text{ 的半径为 } \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{10}}{5} > 1,$$

$\therefore \odot A$ 与 y 轴相交;

$$(3) \therefore C(0, -\frac{5}{3}),$$

$$\therefore \text{可设直线 BC 解析式为 } y = kx - \frac{5}{3},$$

$$\text{把 B 点坐标代入可求得 } k = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{直线 BC 的解析式为 } y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3},$$

过 P 作 $PQ \parallel y$ 轴, 交直线 BC 于点 Q, 交 x 轴于点 E, 如图 2,

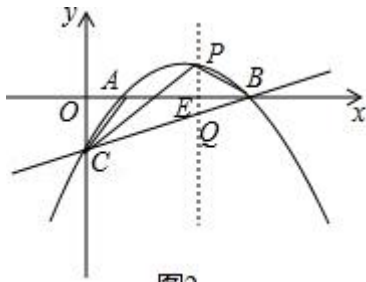


图2

设 $P(x, -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3})$, 则 $Q(x, \frac{1}{3}x - \frac{5}{3})$,

$$\therefore PQ = (-\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3}) - (\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{12},$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PCQ} + S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}PQ \cdot OE + \frac{1}{2}PQ \cdot BE = \frac{1}{2}PQ(OE + BE) = \frac{1}{2}PQ \cdot OB = \frac{5}{2}PQ = -\frac{5}{6}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{125}{24},$$

$\therefore$ 当 $x = \frac{5}{2}$ 时, $S_{\triangle PBC}$ 有最大值 $\frac{125}{24}$, 此时 P 点坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{5}{4})$,

$\therefore$ 当 P 点坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{5}{4})$ 时, $\triangle PBC$ 的面积有最大值.

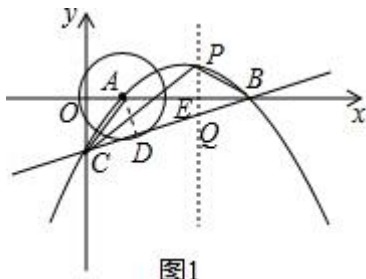


图1

【点评】 本题主要考查二次函数的综合应用, 涉及待定系数法、切线的性质、相似三角形的判定和性质、二次函数的性质等知识. 在 (1) 中注意待定系数法的应用步骤, 在 (2) 中确定出 $\odot A$ 的半径是解题的关键, 在 (3) 中用 P 点坐标表示出 $\triangle PBC$ 的面积是解题的关键. 本题考查知识点较多, 计算量大, 综合性较强.