

2015 年黑龙江省绥化市中考数学试题及答案

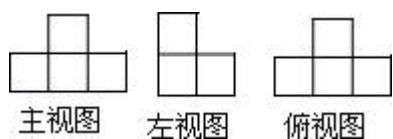
一、选择题

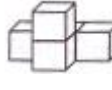
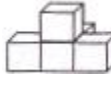
1. (3 分) 下列图案中, 既是中心对称又是轴对称图形的个数有 ()



A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. (3 分) 如图是一些完全相同的小正方体搭成的几何体的三视图. 这个几何体只能是 ()



A.  B.  C.  D. 

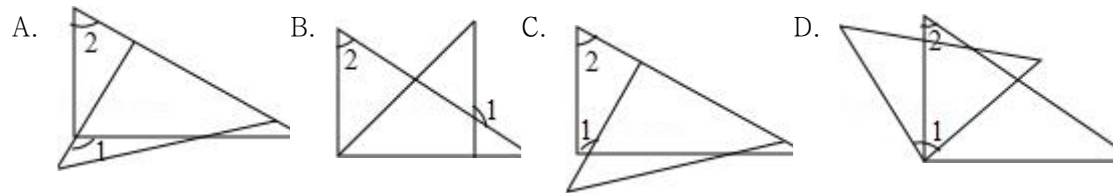
3. (3 分) 从长度分别为 1、3、5、7 的四条线段中任选三条作边, 能构成三角形的概率为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

4. (3 分) 石墨烯是现在世界上最薄的纳米材料, 其理论厚度仅是 0.00000000034m, 这个数用科学记数法表示正确的是 ()

A. 3.4×10^{-9} B. 0.34×10^{-9} C. 3.4×10^{-10} D. 3.4×10^{-11}

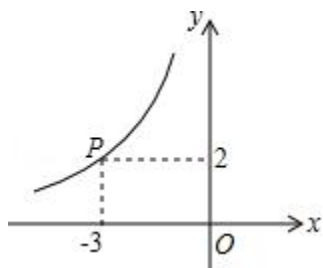
5. (3 分) 将一副三角尺按如图方式进行摆放, $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 不一定互补的是 ()



6. (3 分) 在实数 0、 π 、 $\frac{22}{7}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $-\sqrt{9}$ 中, 无理数的个数有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

7. (3 分) 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 的图象经过点 P, 则 k 的值为 ()

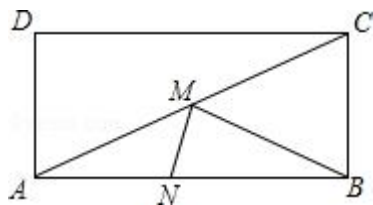


- A. -6 B. -5 C. 6 D. 5

8. (3分) 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > a \\ x > 1 \end{cases}$ 的解集为 $x > 1$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 1$ B. $a < 1$ C. $a \geq 1$ D. $a \leq 1$

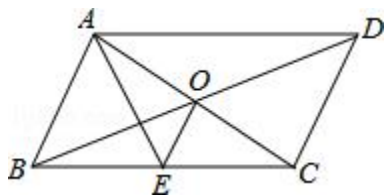
9. (3分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=10$, $BC=5$. 若点 M 、 N 分别是线段 AC 、 AB 上的两个动点, 则 $BM+MN$ 的最小值为 ()



- A. 10 B. 8 C. $5\sqrt{3}$ D. 6

10. (3分) 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E , 且 $\angle ADC=60^\circ$, $AB=\frac{1}{2}BC$, 连接 OE . 下列结论: ① $\angle CAD=30^\circ$; ② $S_{\square ABCD}=AB \cdot AC$; ③ $OB=AB$;

④ $OE=\frac{1}{4}BC$, 成立的个数有 ()



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

二、填空题 (每题3分, 满分33分)

11. (3分) 计算: $|\sqrt{3}-4| - (\frac{1}{2})^{-2} =$ _____.

12. (3分) 在函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + (x-2)^0$ 中, 自变量 x 的取值范围是 _____.

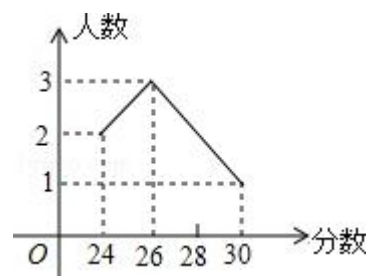
13. (3分) 点 $A(-3, 2)$ 关于 x 轴的对称点 A' 的坐标为 _____.

14. (3分) 若代数式 $\frac{x^2-5x+6}{2x-6}$ 的值等于 0, 则 $x=$ _____.

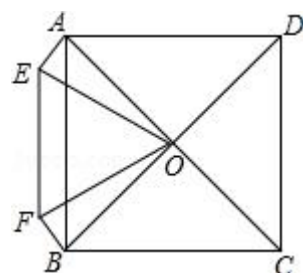
15. (3分) 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2x-1=0$ 无解, 则 a 的取值范围是_____.

16. (3分) 把二次函数 $y=2x^2$ 的图象向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度, 平移后抛物线的解析式为_____.

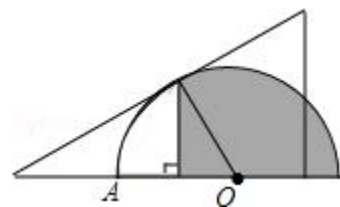
17. (3分) 在 2015 年的体育考试中某校 6 名学生的体育成绩统计如图所示, 这组数据的中位数是_____.



18. (3分) 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , $\triangle OEF$ 是正三角形, 且 $AE=BF$, 则 $\angle AOE=$ _____.



19. (3分) 如图, 将一块含 30° 角的直角三角板和半圆量角器按如图的方式摆放, 使斜边与半圆相切. 若半径 $OA=2$, 则图中阴影部分的面积为_____ (结果保留 π).



20. (3分) 填在下面各正方形中的四个数之间都有一定的规律, 按此规律得出 $a+b+c=$ _____.

0	3	2	5	4	7	6	c
4	13	6	31	8	57	a	b

21. (3分) 在矩形 ABCD 中, AB=4, BC=3, 点 P 在 AB 上. 若将 $\triangle DAP$ 沿 DP 折叠, 使点 A 落在矩形对角线上的 A' 处, 则 AP 的长为_____.

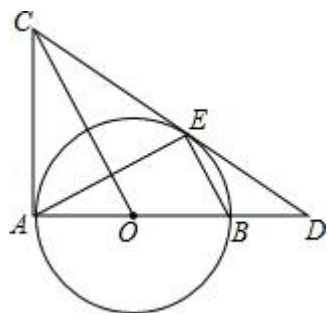
三、解答题 (满分 57 分)

22. (6分) 先化简, 再求值: $(\frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2-4x+4}) \div \frac{x-4}{x}$, 其中 $x = \tan 60^\circ + 2$.

23. (6分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B, 在 $\triangle AOB$ 内部作正方形, 使正方形的四个顶点都落在该三角形的边上, 求正方形落在 x 轴正半轴的顶点坐标.

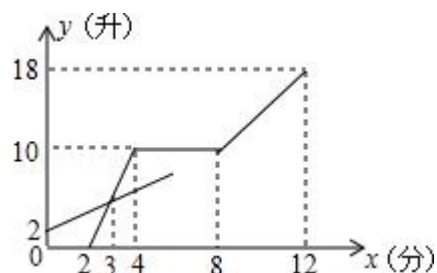
24. (6分) 如图, 以线段 AB 为直径作 $\odot O$, CD 与 $\odot O$ 相切于点 E, 交 AB 的延长线于点 D, 连接 BE, 过点 O 作 $OC \parallel BE$ 交切线 DE 于点 C, 连接 AC.

- (1) 求证: AC 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $BD = OB = 4$, 求弦 AE 的长.



25. (8分) 现有甲、乙两个容器, 分别装有进水管和出水管, 两容器的进出水速度不变, 先打开乙容器的进水管, 2 分钟后再打开甲容器的进水管, 又过 2 分钟关闭甲容器的进水管, 再过 4 分钟同时打开甲容器的进、出水管. 直到 12 分钟时, 同时关闭两容器的进出水管. 打开和关闭水管的时间忽略不计. 容器中的水量 y (升) 与乙容器注水时间 x (分) 之间的关系如图所示.

- (1) 求甲容器的进、出水速度.
- (2) 甲容器进、出水管都关闭后, 是否存在两容器的水量相等? 若存在, 求出此时的时间.
- (3) 若使两容器第 12 分钟时水量相等, 则乙容器 6 分钟后进水速度应变为多少?



26. (6分) 自学下面材料后, 解答问题.

分母中含有未知数的不等式叫分式不等式. 如: $\frac{x-2}{x+1} > 0$; $\frac{2x+3}{x-1} < 0$ 等. 那么如何求出它们的解集呢?

根据我们学过的有理数除法法则可知: 两数相除, 同号得正, 异号得负. 其字母表达式为:

(1) 若 $a > 0$, $b > 0$, 则 $\frac{a}{b} > 0$; 若 $a < 0$, $b < 0$, 则 $\frac{a}{b} > 0$;

(2) 若 $a > 0$, $b < 0$, 则 $\frac{a}{b} < 0$; 若 $a < 0$, $b > 0$, 则 $\frac{a}{b} < 0$.

反之: (1) 若 $\frac{a}{b} > 0$, 则 $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$

(2) 若 $\frac{a}{b} < 0$, 则 _____ 或 _____.

根据上述规律, 求不等式 $\frac{x-2}{x+1} > 0$ 的解集.

27. (8分) 某苹果生产基地, 用 30 名工人进行采摘或加工苹果, 每名工人只能做其中一项工作. 苹果的销售方式有两

种: 一种是可以直接出售; 另一种是可以将采摘的苹果加工成罐头出售. 直接出售每吨获利 4000 元; 加工成

罐头出售每吨获利 10000 元. 采摘的工人每人可以采摘苹果 0.4 吨; 加工罐头的工人每人可加工 0.3 吨. 设

有 x 名工人进行苹果采摘, 全部售出后, 总利润为 y 元.

(1) 求 y 与 x 的函数关系式.

(2) 如何分配工人才能获利最大?

28. (8分) 如图 1, 在正方形 ABCD 中, 延长 BC 至 M, 使 $BM=DN$, 连接 MN 交 BD 延长线于点 E.

(1) 求证: $BD+2DE=\sqrt{2}BM$.

(2) 如图 2, 连接 BN 交 AD 于点 F, 连接 MF 交 BD 于点 G. 若 $AF:FD=1:2$, 且 $CM=2$, 则线段 $DG=$ _____.

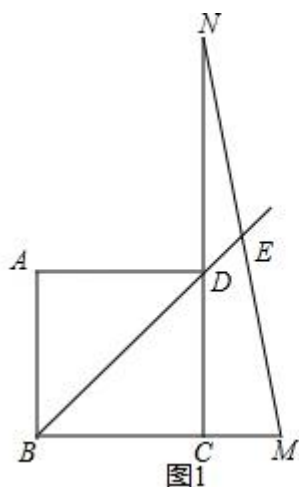


图1

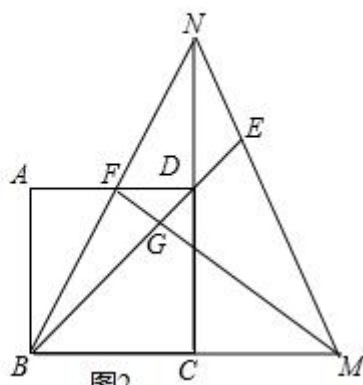


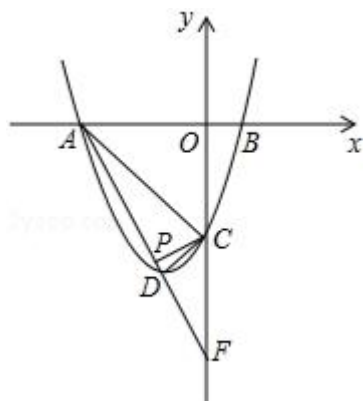
图2

29. (9分) 如图, 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A 、 B , 与直线 $AC: y=-x-6$ 交 y 轴于点 C 、 D , 点 D 是抛物线的顶点, 且横坐标为 -2 .

(1) 求出抛物线的解析式.

(2) 判断 $\triangle ACD$ 的形状, 并说明理由.

(3) 直线 AD 交 y 轴于点 F , 在线段 AD 上是否存在一点 P , 使 $\angle ADC=\angle PCF$? 若存在, 直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.



2015 年黑龙江省绥化市中考数学试题
参考答案与试题解析

一、选择题

1. (3 分) 下列图案中，既是中心对称又是轴对称图形的个数有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

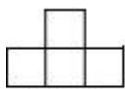
考点: 中心对称图形；轴对称图形.

分析: 根据轴对称图形与中心对称图形的概念对各图形分析判断后利用排除法求解.

解答: 解：第一个图形是轴对称图形，又是中心对称图形，
第二个图形既是轴对称图形，不是中心对称图形，
第三个图形是中心对称图形，不是轴对称图形，
第四个图形是轴对称图形，又是中心对称图形，
综上所述，既是轴对称图形又是中心对称图形的是第二个图形共 2 个.
故选 B.

点评: 本题考查了中心对称图形与轴对称图形，掌握中心对称图形与轴对称图形的概念：
轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；
中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

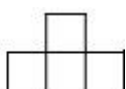
2. (3 分) 如图是一些完全相同的小正方体搭成的几何体的三视图. 这个几何体只能是 ()



主视图



左视图

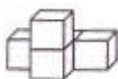


俯视图

A.



B.



C.



D.



考点: 由三视图判断几何体.

分析: 易得这个几何体共有 2 层，由俯视图可得第一层正方体的个数，由主视图和左视图可得第二层正方体的个数，相加即可.

解答: 解：由俯视图易得最底层有 4 个正方体，第二层有 1 个正方体，那么共有 $4+1=5$ 个正方体组成，
由主视图可知，一共有前后 2 排，第一排有 3 个正方体，第二排有 2 层位于第一排中间的后面；
故选 A.

点评: 考查学生对三视图掌握程度和灵活运用能力，同时也体现了对空间想象能力方面的考查. 如果掌握口诀“俯视图打地基，主视图疯狂盖，左视图拆违章”就更容易得到答案.

3. (3分) 从长度分别为 1、3、5、7 的四条线段中任选三条作边，能构成三角形的概率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

考点: 列表法与树状图法；三角形三边关系.

分析: 从四条线段中任意选取三条，找出所有的可能，以及能构成三角形的情况数，即可求出所求的概率.

解答: 解：从四条线段中任意选取三条，所有的可能有：1，3，5；1，3，7；1，5，7；3，5，7 共 4 种，
其中构成三角形的有 3，5，7 共 1 种，

$$\text{则 } P(\text{构成三角形}) = \frac{1}{4}.$$

故选 C.

点评: 此题考查了列表法与树状图法，以及三角形的三边关系，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

4. (3分) 石墨烯是现在世界上最薄的纳米材料，其理论厚度仅是 0.00000000034m，这个数用科学记数法表示正确的是 ()

- A. 3.4×10^{-9} B. 0.34×10^{-9} C. 3.4×10^{-10} D. 3.4×10^{-11}

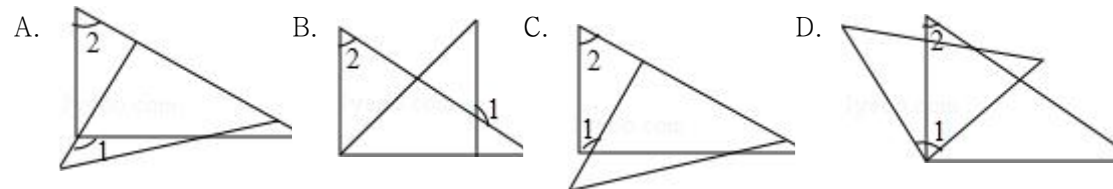
考点: 科学记数法—表示较小的数.

分析: 绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

解答: 解：0.00000000034 = 3.4×10^{-10} ，
故选：C.

点评: 本题考查用科学记数法表示较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

5. (3分) 将一副三角尺按如图方式进行摆放， $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 不一定互补的是 ()



考点: 余角和补角.

分析: 如果两个角的和等于 180° (平角)，就说这两个角互为补角. 即其中一个角是另一个角的补角，据此分别判断出每个选项中 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数和是不是 180° ，即可判断出它们是否一定互补.

解答: 解：如图 1，
 $\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ ， $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle 4$,
 $\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$,
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$,
 $\therefore \angle 1、\angle 2$ 互补.

如图 2,,
 $\angle 2 = \angle 3$,
 $\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$,
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$,
 $\therefore \angle 1、\angle 2$ 互补.

如图 3,,
 $\therefore \angle 2 = 60^\circ$, $\angle 1 = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$,
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$,
 $\therefore \angle 1、\angle 2$ 互补.

如图 4,,
 $\therefore \angle 1 = 90^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$,
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$,
 $\therefore \angle 1、\angle 2$ 不互补.

故选: D.

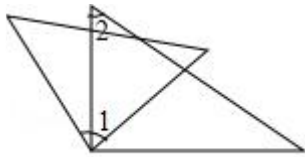


图4

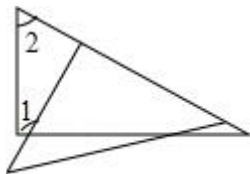


图3

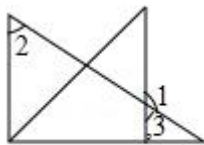


图2

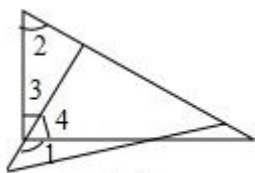


图1

点评: 此题主要考查了余角和补角的性质和应用, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确:
 等角的补角相等. 等角的余角相等; 并能分别判断出每个选项中的 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数和

是不是 180° .

6. (3分) 在实数 0 、 π 、 $\frac{22}{7}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $-\sqrt{9}$ 中, 无理数的个数有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

考点: 无理数.

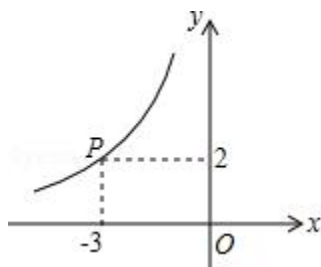
分析: 根据无理数是无限不循环小数, 可得答案.

解答: 解: π , $\sqrt{2}$ 是无理数,

故选: B.

点评: 本题考查了无理数, 无理数是无限不循环小数.

7. (3分) 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 的图象经过点 P, 则 k 的值为 ()



- A. -6 B. -5 C. 6 D. 5

考点: 反比例函数图象上点的坐标特征.

分析: 根据待定系数法, 可得答案.

解答: 解: 函数图象经过点 P,

$$k = xy = -3 \times 2 = -6,$$

故选: A.

点评: 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 利用待定系数法求函数解析式是解题关键.

8. (3分) 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > a \\ x > 1 \end{cases}$ 的解集为 $x > 1$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 1$ B. $a < 1$ C. $a \geq 1$ D. $a \leq 1$

考点: 不等式的解集.

分析: 解两个不等式后, 根据其解集得出关于 a 的不等式, 解答即可.

解答:

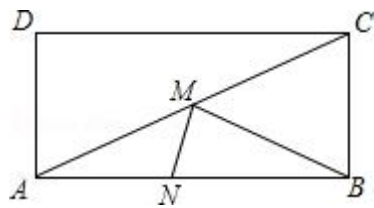
解: 因为不等式组 $\begin{cases} x > a \\ x > 1 \end{cases}$ 的解集为 $x > 1$,

所以可得 $a \leq 1$,

故选 D

点评: 此题主要考查了不等式组的解集, 关键是根据其解集得出关于 a 的不等式.

9. (3分) 如图, 在矩形 ABCD 中, AB=10, BC=5. 若点 M、N 分别是线段 AC 上的两个动点, 则 BM+MN 的最小值为 ()



A. 10

B. 8

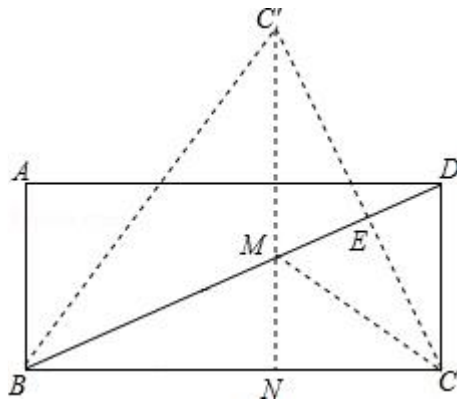
C. $5\sqrt{3}$

D. 6

考点: 轴对称-最短路线问题.

分析: 根据轴对称求最短路线的方法得出 M 点位置, 进而利用勾股定理及面积法求出 CC' 的值, 然后再证明 $\triangle BCD \sim \triangle C'NC$ 进而求出 $C'N$ 的值, 从而求出 $MC+NM$ 的值.

解答: 解: 如图所示: 由题意可得出: 作 C 点关于 BD 对称点 C' , 交 BD 于点 E, 连接 BC' , 过点 C' 作 $C'N \perp BC$ 于点 N, 交 BD 于点 M, 连接 MC, 此时 $CM+NM=C'N$ 最小,



$$\because AB=10, BC=5,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCD \text{ 中, 由勾股定理得: } BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=5\sqrt{5},$$

$$\because S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD=\frac{1}{2} \cdot BD \cdot CE,$$

$$\therefore CE=\frac{BC \cdot CD}{BD}=\frac{10 \times 5}{5\sqrt{5}}=2\sqrt{5},$$

$$\because CC'=2CE,$$

$$\therefore CC'=4\sqrt{5},$$

$$\because NC' \perp BC, DC \perp BC, CE \perp BD,$$

$$\therefore \angle BNC'=\angle BCD=\angle BEC=\angle BEC'=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle CC'N+\angle NCC'=\angle CBD+\angle NCC'=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle CC'N=\angle CBD,$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle C'NC,$$

$$\therefore \frac{CC'}{BD}=\frac{NC'}{BC},$$

$$\text{即 } \frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=\frac{NC'}{10},$$

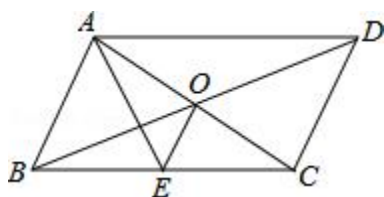
$$\therefore NC'=8,$$

即 $BM+MN$ 的最小值为 8.

故选 B.

点评: 此题主要考查了利用轴对称求最短路线以及勾股定理的应用和相似三角形的应用, 利用轴对称得出 M 点与 N 点的位置是解题的关键.

10. (3 分) 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E , 且 $\angle ADC=60^\circ$, $AB=\frac{1}{2}BC$, 连接 OE . 下列结论: ① $\angle CAD=30^\circ$; ② $S_{\square ABCD}=AB \cdot AC$; ③ $OB=AB$; ④ $OE=\frac{1}{4}BC$, 成立的个数有 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

考点: 平行四边形的性质; 等腰三角形的判定与性质; 等边三角形的判定与性质; 含 30° 度角的直角三角形.

分析: 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 得到 $\angle ABC=\angle ADC=60^\circ$, $\angle BAD=120^\circ$, 根据 AE 平分 $\angle BAD$, 得到 $\angle BAE=\angle EAD=60^\circ$ 推出 $\triangle ABE$ 是等边三角形, 由于 $AB=\frac{1}{2}BC$, 得到 $AE=\frac{1}{2}BC$, 得到 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 于是得到 $\angle CAD=30^\circ$, 故①正确; 由于 $AC \perp AB$, 得到 $S_{\square ABCD}=AB \cdot AC$, 故②正确, 根据 $AB=\frac{1}{2}BC$, $OB=\frac{1}{2}BD$, 且 $BD > BC$, 得到 $AB \neq OB$, 故③错误; 根据三角形的中位线定理得到 $OE=\frac{1}{2}AB$, 于是得到 $OE=\frac{1}{4}BC$, 故④正确.

解答: 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore \angle ABC=\angle ADC=60^\circ$, $\angle BAD=120^\circ$,
 $\therefore AE$ 平分 $\angle BAD$,
 $\therefore \angle BAE=\angle EAD=60^\circ$
 $\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形,
 $\therefore AE=AB=BE$,
 $\therefore AB=\frac{1}{2}BC$,
 $\therefore AE=\frac{1}{2}BC$,
 $\therefore \angle BAC=90^\circ$,
 $\therefore \angle CAD=30^\circ$, 故①正确;
 $\therefore AC \perp AB$,
 $\therefore S_{\square ABCD}=AB \cdot AC$, 故②正确,

$$\therefore AB = \frac{1}{2}BC, OB = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BD > BC,$$

$$\therefore AB \neq OB, \text{ 故③错误;}$$

$$\therefore CE = BE, CO = OA,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{4}BC, \text{ 故④正确.}$$

故选 C.

点评: 本题考查了平行四边形的性质, 等边三角形的判定和性质, 直角三角形的性质, 平行四边形的面积公式, 熟练掌握性质定理和判定定理是解题的关键.

二、填空题 (每题 3 分, 满分 33 分)

11. (3 分) 计算: $|\sqrt{3} - 4| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \underline{-\sqrt{3}}.$

考点: 实数的运算; 负整数指数幂.

分析: 分别根据负整数指数幂的计算法则、绝对值的性质分别计算出各数, 再根据实数混合运算的法则进行计算即可.

解答: 解: 原式 $= 4 - \sqrt{3} - 4$
 $= -\sqrt{3}.$

故答案为: $-\sqrt{3}.$

点评: 本题考查的是实数的运算, 熟记负整数指数幂的计算法则、绝对值的性质是解答此题的关键.

12. (3 分) 在函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + (x-2)^0$ 中, 自变量 x 的取值范围是 $\underline{x > -2 \text{ 且 } x \neq 2}.$

考点: 函数自变量的取值范围.

分析: 根据二次根式的性质和分式的意义, 被开方数大于等于 0, 分母不等于 0, 零指数幂的底数不等于 0 列式计算即可得解.

解答: 解: 由题意得, $x+2 > 0$ 且 $x-2 \neq 0$,
 解得 $x > -2$ 且 $x \neq 2$.

故答案为: $x > -2$ 且 $x \neq 2$.

点评: 本题考查了函数自变量的范围, 一般从三个方面考虑:

- (1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数;
- (2) 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0;
- (3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数为非负数.

13. (3 分) 点 A $(-3, 2)$ 关于 x 轴的对称点 A' 的坐标为 $\underline{(-3, -2)}.$

考点: 关于 x 轴、 y 轴对称的点的坐标.

分析: 根据“关于 x 轴对称的点, 横坐标相同, 纵坐标互为相反数”解答.

解答: 解: 点 A (-3, 2) 关于 x 轴对称的点的坐标为 (-3, -2).

故答案为: (-3, -2).

点评: 本题考查了关于 x 轴、y 轴对称的点的坐标, 解决本题的关键是掌握好对称点的坐标规律:

(1) 关于 x 轴对称的点, 横坐标相同, 纵坐标互为相反数;

(2) 关于 y 轴对称的点, 纵坐标相同, 横坐标互为相反数;

(3) 关于原点对称的点, 横坐标与纵坐标都互为相反数.

14. (3 分) 若代数式 $\frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 6}$ 的值等于 0, 则 $x = \underline{2}$.

考点: 分式的值为零的条件.

分析: 根据分式的值为零的条件可以求出 x 的值.

解答: 解: 由分式的值为零的条件得 $x^2 - 5x + 6 = 0$, $2x - 6 \neq 0$,

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 得 $x = 2$ 或 $x = 3$,

由 $2x - 6 \neq 0$, 得 $x \neq 3$,

$\therefore x = 2$,

故答案为 2.

点评: 本题考查了分式值为 0 的条件, 若分式的值为零, 需同时具备两个条件: (1) 分子为 0; (2) 分母不为 0. 这两个条件缺一不可.

15. (3 分) 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x - 1 = 0$ 无解, 则 a 的取值范围是 $\underline{a < -1}$.

考点: 根的判别式; 一元二次方程的定义.

分析: 根据一元二次方程的定义和根的判别式的意义得到 $a \neq 0$ 且 $\Delta = 2^2 - 4 \times a \times (-1) < 0$, 然后求出 a 的取值范围.

解答: 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x - 1 = 0$ 无解,

$\therefore a \neq 0$ 且 $\Delta = 2^2 - 4 \times a \times (-1) < 0$,

解得 $a < -1$,

$\therefore$ a 的取值范围是 $a < -1$.

故答案为: $a < -1$.

点评: 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$: 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根. 也考查了一元二次方程的定义.

16. (3 分) 把二次函数 $y = 2x^2$ 的图象向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度, 平移后抛物线的解析式为 $\underline{y = 2(x+1)^2 - 2}$.

考点: 二次函数图象与几何变换.

分析: 直接根据“上加下减, 左加右减”的原则进行解答.

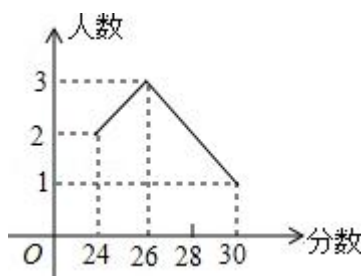
解答: 解: 由“左加右减”的原则可知, 将二次函数 $y = 2x^2$ 的图象向左平移 1 个单位长度所得抛物线的解析式为: $y = 2(x+1)^2$, 即 $y = 2(x+1)^2$; 由“上加下减”的原则可知, 将抛物线 $y = 2(x+1)^2$ 向下平移 2 个单位长度所得抛物线的解析式为: $y = 2(x+1)^2 - 2$.

-2, 即 $y=2(x+1)^2-2$.

故答案为: $y=2(x+1)^2-2$.

点评: 本题考查的是二次函数的图象与几何变换, 熟知函数图象平移的法则是解答此题的关键.

17. (3分) 在2015年的体育考试中某校6名学生的体育成绩统计如图所示, 这组数据的中位数是 26.



考点: 中位数; 折线统计图.

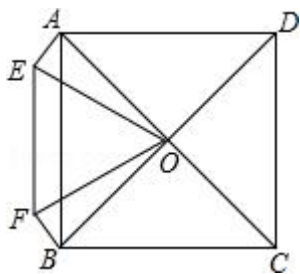
分析: 根据中位数的定义, 即可解答.

解答: 解: 把这组数据从小到大排列, 最中间两个数的平均数是 $(26+26) \div 2 = 26$, 则中位数是 26.

故答案为: 26.

点评: 本题考查了中位数, 中位数是将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (或最中间两个数的平均数).

18. (3分) 如图, 正方形 ABCD 的对角线相交于点 O, $\triangle OEF$ 是正三角形, 且 $AE=BF$, 则 $\angle AOE =$ 15° .



考点: 全等三角形的判定与性质; 等边三角形的性质; 正方形的性质.

分析: 根据正方形、等边三角形的性质, 可得 $AO=BO$, $OE=OF$, 根据 SSS 可得 $\triangle AOE \cong \triangle BOF$, 根据全等三角形的性质, 可得对应角相等, 根据角的和差, 可得答案.

解答: 解: $\because$ 四边形 ABCD 是正方形,

$\therefore OA=OB$, $\angle AOB=90^\circ$.

$\because \triangle OEF$ 是正三角形,

$\therefore OE=OF$, $\angle EOF=60^\circ$.

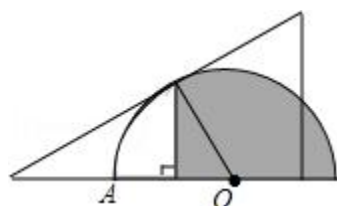
在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BOF$ 中,

$$\begin{cases} OA=OB \\ AE=BF, \\ OE=OF \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOF \text{ (SSS)}, \\
&\therefore \angle AOE = \angle BOF, \\
&\therefore \angle AOE = (\angle AOB - \angle EOF) \div 2 \\
&= (90^\circ - 60^\circ) \div 2 \\
&= 15^\circ, \\
&\text{故答案为 } 15^\circ.
\end{aligned}$$

点评: 本题考查了全等三角形的性质与判定, 正方形、等边三角形的性质, 利用 SSS 证明三角形全等得出 $\angle AOE = \angle BOF$ 是解题的关键.

19. (3分) 如图, 将一块含 30° 角的直角三角板和半圆量角器按如图的方式摆放, 使斜边与半圆相切. 若半径 $OA=2$, 则图中阴影部分的面积为 $\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. (结果保留 π)



考点: 切线的性质; 扇形面积的计算.

分析: 图中阴影部分的面积=扇形 BOD 的面积+ $\triangle BOC$ 的面积.

解答: 解: $\because$ 斜边与半圆相切, 点 B 是切点,

$$\therefore \angle EBO = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle E = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ECB = 60^\circ.$$

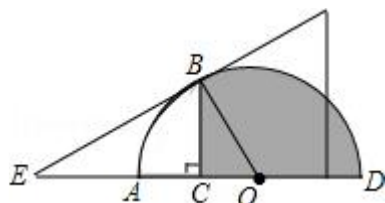
$$\therefore \angle BOD = 120^\circ,$$

$$\therefore OA = OB = 2,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}OB = 1, BC = \sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形 BOD}} + S_{\triangle BOC} = \frac{120\pi \times 2^2}{360} + \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{故答案是: } \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



点评: 本题考查了切线的性质, 扇形面积的计算. 此题利用了“分割法”求得阴影部分的面积.

20. (3分) 填在下面各正方形中的四个数之间都有一定的规律, 按此规律得出 $a+b+c=$ 110.

0	3	2	5	4	7	6	c
4	13	6	31	8	57	a	b

考点: 规律型: 数字的变化类.

分析: 观察不难发现, 左上角+4=左下角, 左上角+3=右上角, 右下角的数是左下角与右上角两个数的乘积减去1的差, 根据此规律列式进行计算即可得解.

解答: 解: 根据左上角+4=左下角, 左上角+3=右上角, 右下角的数是左下角与右上角两个数的乘积减去1的差,

可得 $6+4=a$, $6+3=c$, $ac+1=b$,

可得: $a=10$, $c=9$, $b=91$,

所以 $a+b+c=10+9+91=110$,

故答案为: 110

点评: 本题是对数字变化规律的考查, 仔细观察前三个图形, 找出四个数之间的变化规律是解题的关键.

21. (3分) 在矩形 ABCD 中, $AB=4$, $BC=3$, 点 P 在 AB 上. 若将 $\triangle DAP$ 沿 DP 折叠, 使点 A 落在矩形对角线上的 A' 处, 则 AP 的长为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{9}{4}$.

考点: 翻折变换 (折叠问题).

专题: 分类讨论.

分析: 分两种情况探讨: 点 A 落在矩形对角线 BD 上, 点 A 落在矩形对角线 AC 上, 在直角三角形中利用勾股定理列出方程, 通过解方程可得答案.

解答: 解: ①点 A 落在矩形对角线 BD 上, 如图 1,

$\because AB=4$, $BC=3$,

$\therefore BD=5$,

根据折叠的性质, $AD=A'D=3$, $AP=A'P$, $\angle A=\angle PA'D=90^\circ$,

$\therefore BA'=2$,

设 $AP=x$, 则 $BP=4-x$,

$\therefore BP^2=BA'^2+PA'^2$,

$\therefore (4-x)^2=x^2+2^2$,

解得: $x=\frac{3}{2}$,

$\therefore AP=\frac{3}{2}$;

②点 A 落在矩形对角线 AC 上, 如图 2,

根据折叠的性质可知 $DP \perp AC$,

$\therefore \triangle DAP \sim \triangle ABC$,

$\therefore \frac{AD}{AP} = \frac{AB}{BC}$,

$\therefore AP = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 3}{4} = \frac{9}{4}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{9}{4}$.

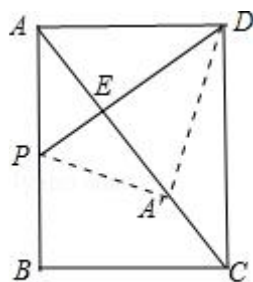


图2

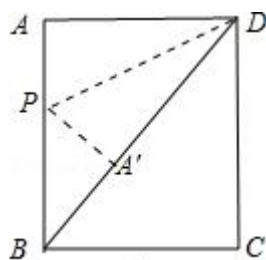


图1

点评: 本题考查了折叠问题、勾股定理, 矩形的性质以及三角形相似的判定与性质; 解题中, 找准相等的量是正确解答题目的关键.

三、解答题 (满分 57 分)

22. (6 分) 先化简, 再求值: $(\frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2-4x+4}) \div \frac{x-4}{x}$, 其中 $x = \tan 60^\circ + 2$.

考点: 分式的化简求值; 特殊角的三角函数值.

点:

专 计算题.

题:

分 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分

析: 得到最简结果, 把 x 的值代入计算即可求出值.

解

答: 解: 原式 $= [\frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{x-1}{(x-2)^2}] \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{x^2-4-x(x-1)}{x(x-2)^2}$.

$$\frac{x}{x-4} - \frac{x-4}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{x-4} = \frac{1}{(x-2)^2},$$

$$\text{当 } x = \tan 60^\circ + 2 = \sqrt{3} + 2 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{3}.$$

点 此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握运算是解本题的关键.

评:

23. (6分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B , 在 $\triangle AOB$ 内部作正方形, 使正方形的四个顶点都落在该三角形的边上, 求正方形落在 x 轴正半轴的顶点坐标.

考点: 正方形的性质; 一次函数图象上点的坐标特征.

分析: 分两种情况: ①如图 1, 令 $x=0$, 则 $y=3$, 令 $y=0$, 则 $x=3$, 得到 $OA=OB=3$, $\angle BAO=45^\circ$, 根据 $DE \perp OA$, 推出 $DE=AE$, 由于四边形 $COED$ 是正方形, 得到 $OE=DE$, 等量代换得到 $OE=AE$, 即可得到结论; ②如图 2, 由 (1) 知 $\triangle OFC$, $\triangle EFA$ 是等腰直角三角形, 由四边形 $CDEF$ 是正方形, 得到 $EF=CF$, 于是得到 $AF=\sqrt{2} \times \sqrt{2}OF=2OF$, 求出 $OA=OF+2OF=3$, 即可得到结论.

解答: 解: 分两种情况;

①如图 1, 令 $x=0$, 则 $y=3$, 令 $y=0$, 则 $x=3$,

$$\therefore OA=OB=3,$$

$$\therefore \angle BAO=45^\circ,$$

$$\because DE \perp OA,$$

$$\therefore DE=AE,$$

$$\because \text{四边形 } COED \text{ 是正方形},$$

$$\therefore OE=DE,$$

$$\therefore OE=AE,$$

$$\therefore OE=\frac{1}{2}OA=\frac{3}{2},$$

$$\therefore E\left(\frac{3}{2}, 0\right);$$

②如图 2, 由①知 $\triangle OFC$, $\triangle EFA$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CF=\sqrt{2}OF, AF=\sqrt{2}EF,$$

$$\because \text{四边形 } CDEF \text{ 是正方形},$$

$$\therefore EF=CF,$$

$$\therefore AF=\sqrt{2} \times \sqrt{2}OF=2OF,$$

$$\therefore OA=OF+2OF=3,$$

$$\therefore OF=1,$$

$$\therefore F(1, 0).$$

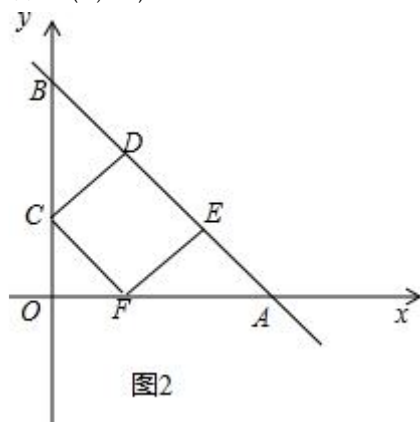


图2

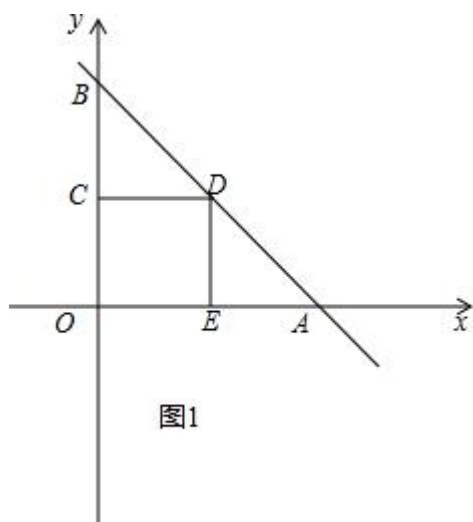
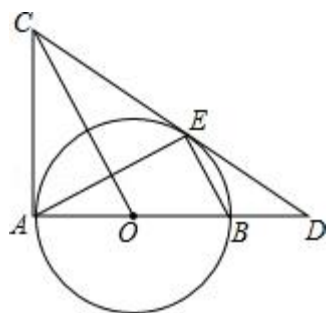


图1

点评: 本题考查了正方形的性质，一次函数图象上点的坐标特征，等腰直角三角形的性质，正确的画出图形是解题的关键.

24. (6分) 如图，以线段 AB 为直径作 $\odot O$ ， CD 与 $\odot O$ 相切于点 E ，交 AB 的延长线于点 D ，连接 BE ，过点 O 作 $OC \parallel BE$ 交切线 DE 于点 C ，连接 AC 。

- (1) 求证： AC 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 若 $BD=OB=4$ ，求弦 AE 的长。



考点: 切线的判定与性质.

专题: 计算题.

分析: (1) 连接 OE ，根据 CD 与圆 O 相切，利用切线的性质得到 OE 垂直于 CD ，再由 OC 与 BE 平行，得到同位角相等与内错角相等，根据 $OB=OE$ ，利用等边对等角得到一对角相等，等量代换得到夹角相等，再由 $OA=OE$ ， $OC=OC$ ，利用 SAS 得到三角形 AOC 与三角形 EOC 全等，利用全等三角形对应角相等得到 $\angle OAC = \angle OEC = 90^\circ$ ，即可得证；

(2) 根据题意得到 EB 为直角三角形斜边上的中线，求出 EB 的长，再由 $OE=OB=EB$ 得到三角形 OEB 为等边三角形，求出 $\angle ABE=60^\circ$ ，根据 AB 为圆 O 直径，利用直径所对的圆周角为直角得到三角形 AEB 为直角三角形，利用锐角三角函数定义求出 AE 的长即可。

解答: (1) 证明：连接 OE ，

$\because CD$ 与圆 O 相切，

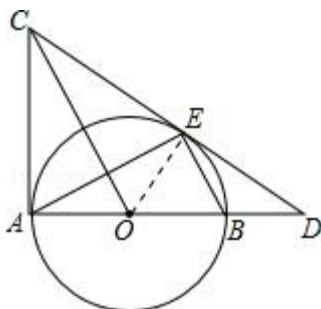
$\therefore OE \perp CD$ ，

$\therefore \angle CEO = 90^\circ$ ，

$\because BE \parallel OC$,
 $\therefore \angle AOC = \angle OBE$, $\angle COE = \angle OEB$,
 $\because OB = OE$,
 $\therefore \angle OBE = \angle OEB$,
 $\therefore \angle AOC = \angle COE$,
 在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle EOC$ 中,

$$\begin{cases} OA = OE \\ \angle AOC = \angle COE \\ OC = OC \end{cases}$$
 $\therefore \triangle AOC \cong \triangle EOC$ (SAS),
 $\therefore \angle CAO = \angle CEO = 90^\circ$,
 则 AC 与圆 O 相切;

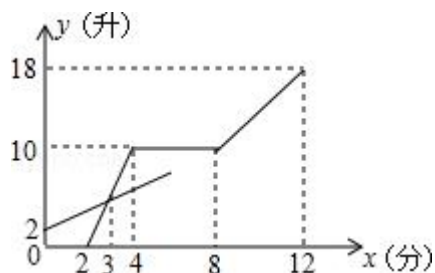
(2) 在 $Rt\triangle DEO$ 中, $BD = OB$,
 $\therefore BE = \frac{1}{2}OD = OB = 4$,
 $\because OB = OE$,
 $\therefore \triangle BOE$ 为等边三角形,
 $\therefore \angle ABE = 60^\circ$,
 $\because AB$ 为圆 O 的直径,
 $\therefore \angle AEB = 90^\circ$,
 $\therefore AE = BE \cdot \tan 60^\circ = 4\sqrt{3}$.



点评: 此题考查了切线的判定与性质, 等边三角形的判定与性质, 以及全等三角形的判定与性质, 熟练掌握切线的判定与性质是解本题的关键.

25. (8分) 现有甲、乙两个容器, 分别装有进水管和出水管, 两容器的进出水速度不变, 先打开乙容器的进水管, 2分钟时再打开甲容器的进水管, 又过2分钟关闭甲容器的进水管, 再过4分钟同时打开甲容器的进、出水管. 直到12分钟时, 同时关闭两容器的进水管. 打开和关闭水管的时间忽略不计. 容器中的水量 y (升) 与乙容器注水时间 x (分) 之间的关系如图所示.

- (1) 求甲容器的进、出水速度.
- (2) 甲容器进、出水管都关闭后, 是否存在两容器的水量相等? 若存在, 求出此时的时间.
- (3) 若使两容器第12分钟时水量相等, 则乙容器6分钟后进水速度应变为多少?



考点: 一次函数的应用.

分析: (1) 根据图可知, 甲容器是在 2 分钟内进水量为 10 升.

(2) 由图可知, 甲容器在第 3 分钟时水量为: $5 \times (3-2) = 5$ (升), 则 A (3, 5). 设 $y_Z = kx + b$ ($k \neq 0$), 利用待定系数法求得该函数解析式, 把 $y=10$ 代入求值即可;

(3) 使两容器第 12 分钟时水量相等时, 即 $x=6$ 时, $y_Z=8$. 故 $(18-8) \div (12-6) = \frac{5}{3}$ (升/分).

解答: 解: (1) 甲的进水速度: $\frac{10}{4-2} = 5$ (升/分),

甲的出水速度: $5 - \frac{18-10}{12-8} = 3$ (升/分);

(2) 存在.

由图可知, 甲容器在第 3 分钟时水量为: $5 \times (3-2) = 5$ (升), 则 A (3, 5).

设 $y_Z = kx + b$ ($k \neq 0$), 依题意得:

$$\begin{cases} 3k+b=6 \\ b=2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=1 \\ b=2 \end{cases},$$

所以 $y_Z = x + 2$.

当 $y_Z = 10$ 时, $x = 8$.

所以乙容器进水管打开 8 分钟时两容器的水量相等;

(3) 当 $x=6$ 时, $y_Z=8$.

所以 $(18-8) \div (12-6) = \frac{5}{3}$ (升/分),

所以乙容器 6 分钟后进水的速度应变为 $\frac{5}{3}$ 升/分.

点评: 本题考查了一次函数的应用. 简单的一次函数问题: ①建立函数模型的方法; ②分段函数思想的应用.

26. (6 分) 自学下面材料后, 解答问题.

分母中含有未知数的不等式叫分式不等式. 如: $\frac{x-2}{x+1} > 0$; $\frac{2x+3}{x-1} < 0$ 等. 那么如何求出它们的解集呢?

根据我们学过的有理数除法法则可知: 两数相除, 同号得正, 异号得负. 其字母表达式为:

(1) 若 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{a}{b} > 0$; 若 $a < 0, b < 0$, 则 $\frac{a}{b} > 0$;

(2) 若 $a > 0, b < 0$, 则 $\frac{a}{b} < 0$; 若 $a < 0, b > 0$, 则 $\frac{a}{b} < 0$.

反之: (1) 若 $\frac{a}{b} > 0$, 则 $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$

(2) 若 $\frac{a}{b} < 0$, 则 $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

根据上述规律, 求不等式 $\frac{x-2}{x+1} > 0$ 的解集.

考点: 一元一次不等式组的应用.

专题: 阅读型.

分析: 根据两数相除, 异号得负解答;

先根据同号得正把不等式转化成不等式组, 然后根据一元一次不等式组的解法求解即可.

解答:

解: (2) 若 $\frac{a}{b} < 0$, 则 $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$;

故答案为: $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$;

由上述规律可知, 不等式转化为 $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$,

所以, $x > 2$ 或 $x < -1$.

点评: 本题考查了一元一次不等式组的应用, 读懂题目信息, 理解不等式转化为不等式组的方法是解题的关键.

27. (8分) 某苹果生产基地, 用 30 名工人进行采摘或加工苹果, 每名工人只能做其中一项工作. 苹果的销售方式有两

种: 一种是可以直接出售; 另一种是可以将采摘的苹果加工成罐头出售. 直接出售每吨获利 4000 元; 加工成

罐头出售每吨获利 10000 元. 采摘的工人每人可以采摘苹果 0.4 吨; 加工罐头的工人每人可加工 0.3 吨. 设

有 x 名工人进行苹果采摘, 全部售出后, 总利润为 y 元.

(1) 求 y 与 x 的函数关系式.

(2) 如何分配工人才能获利最大?

考点: 一次函数的应用.

分析: (1) 根据题意可知进行加工的人数为 $(30-x)$ 人, 采摘的数量为 $0.4x$ 吨, 加工的数

量为 $(9 - 0.3x)$ 吨，直接出售的数量为 $0.4x - (9 - 0.3x) = (0.7x - 9)$ 吨，由此可得出 y 与 x 的关系式；

(2) 先求出 x 的取值范围，再由 x 为整数即可得出结论.

解答: 解: (1) 根据题意得，进行加工的人数为 $(30 - x)$ 人，采摘的数量为 $0.4x$ 吨，加工的数量为 $(9 - 0.3x)$ 吨，直接出售的数量为 $0.4x - (9 - 0.3x) = (0.7x - 9)$ 吨，
 $y = 4000 \times (0.7x - 9) + 10000 \times (9 - 0.3x) = -200x + 54000$;

(2) 根据题意得， $0.4x \geq 9 - 0.3x$ ，解得 $x \geq 12\frac{6}{7}$.

$\therefore x$ 的取值是 $12\frac{6}{7} \leq x \leq 30$ 的整数.

$\therefore k = -200 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

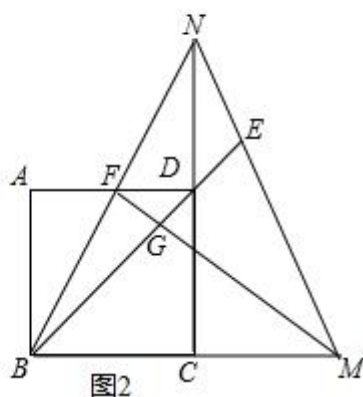
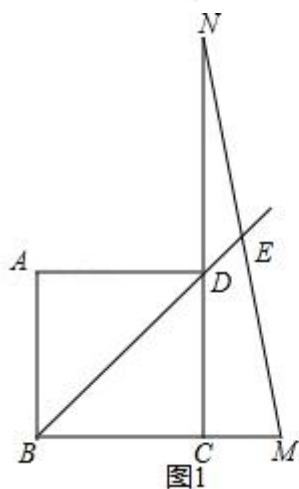
$\therefore$ 当 $x = 13$ 时利润最大，即 13 名工人进行苹果采摘，17 名工人进行加工，获利最大.

点评: 本题考查的是一次函数的应用，根据题意列出关于 x 、 y 的关系式是解答此题的关键.

28. (8分) 如图 1，在正方形 ABCD 中，延长 BC 至 M，使 $BM = DN$ ，连接 MN 交 BD 延长线于点 E.

(1) 求证: $BD + 2DE = \sqrt{2}BM$.

(2) 如图 2，连接 BN 交 AD 于点 F，连接 MF 交 BD 于点 G. 若 $AF:FD = 1:2$ ，且 $CM = 2$ ，则线段 $DG = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



考点: 相似三角形的判定与性质；勾股定理；正方形的性质.

分析: (1) 过点 M 作 $MP \perp BC$ 交 BD 的延长线于点 P，首先证明 $\triangle DEN \cong \triangle PEM$ ，得到 $DE = PE$ ，由 $\triangle BMP$ 是等腰直角三角形可知 $BP = \sqrt{2}BM$ ，即可得到结论；

(2) 由 $AF:FD = 1:2$ ，可知 $DF:BC = 2:3$ ，由 $\triangle BCN \sim \triangle FDN$ ，可求出 $BC = 2$ ，再由 $\triangle DFG \sim \triangle BMG$ 即可求出 DG 的长.

解答: (1) 证明: 过点 M 作 $MP \perp BC$ 交 BD 的延长线于点 P，

$\therefore$ 四边形 ABCD 是正方形，

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$ ， $\angle DBC = \angle BDC = 45^\circ$ ，

$\therefore PM \parallel CN$ ，

$$\therefore \angle N = \angle EMP, \quad \angle BDC = \angle MPB = 45^\circ,$$

$$\therefore BM = PM,$$

$$\therefore BM = DN,$$

$$\therefore DN = MP,$$

在 $\triangle DEN$ 和 $\triangle PEM$ 中

$$\begin{cases} \angle DEN = \angle PEM \\ \angle P = \angle NDE = 45^\circ \\ DN = MP \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DEN \cong \triangle PEM,$$

$$\therefore DE = EP,$$

$\therefore \triangle BMP$ 是等腰直角三角形

$$\therefore BP = \sqrt{2}BM,$$

$$\therefore BD + 2DE = \sqrt{2}BM.$$

$$(2) \text{ 解: } \therefore AF : FD = 1 : 2,$$

$$\therefore DF : BC = 2 : 3,$$

$$\therefore \triangle BCN \sim \triangle FDN,$$

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{DN}{CN}$$

设正方形边长为 a , 又知 $CM = 2$,

$$\therefore BM = DN = a + 2, \quad CN = 2a + 2$$

$$\therefore \frac{a+2}{2a+2} = \frac{2}{3},$$

$$\text{解得: } a = 2,$$

$$\therefore DF = \frac{4}{3}, \quad BM = 4, \quad BD = 2\sqrt{2}.$$

又 $\therefore \triangle DFG \sim \triangle BMG$,

$$\therefore \frac{DG}{BG} = \frac{DF}{BM},$$

$$\therefore \frac{DG}{2\sqrt{2} - DG} = \frac{\frac{4}{3}}{4},$$

$$\therefore DG = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

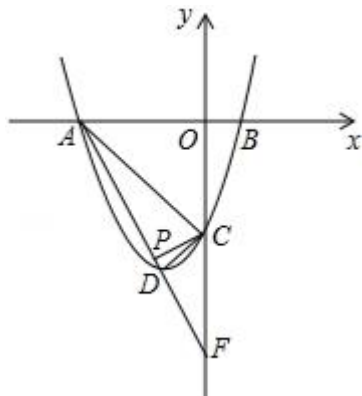
$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



点评: 本题主要考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、等腰直角三角形的性质、相似三角形的判定与性质以及勾股定理的综合运用,运用三角形相似求出正方形的边长是解决第 2 小题的关键.

29. (9分) 如图, 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A、B, 与直线 AC: $y=-x-6$ 交 y 轴于点 C、D, 点 D 是抛物线的顶点, 且横坐标为 -2 .

- (1) 求出抛物线的解析式.
- (2) 判断 $\triangle ACD$ 的形状, 并说明理由.
- (3) 直线 AD 交 y 轴于点 F , 在线段 AD 上是否存在一点 P , 使 $\angle ADC = \angle PCF$? 若存在, 直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.



考点：二次函数综合题.

分析: (1) 先由直线 AC 的解析式为 $y = -x - 6$, 可得 A $(-6, 0)$, C $(0, -6)$, 再根据抛物线的对称性求出 B $(2, 0)$. 然后把 A、B、C 三点坐标分别代入 $y = ax^2 + bx + c$, 利用待定系数法即可求解;

(2) 先求出抛物线顶点 D 的坐标, 再根据两点间的距离公式计算得出 $AC^2 = 6^2 + 6^2 = 72$, $CD^2 = 2^2 + (-8 + 6)^2 = 8$, $AD^2 = (-2 + 6)^2 + 8^2 = 80$, 那么 $AC^2 + CD^2 = AD^2$, 利用勾股定理的逆定理即可得到 $\triangle ACD$ 是直角三角形;

(3) 先利用待定系数法求出直线 AD 的解析式为 $y = -2x - 12$, 得到 F $(0, -12)$, 设点 P 的坐标为 $(x, -2x - 12)$. 由 $\angle ADC = \angle DCF + \angle DFC$, $\angle PCF = \angle DCF + \angle PCD$, $\angle ADC = \angle PCF$, 可得 $\angle DFC = \angle PCD$. 根据两角对应相等的两三角形相似证明 $\triangle CPD \sim \triangle FPC$, 那么 $\frac{CP}{FP} = \frac{CD}{FC}$, 依此列出比例式 $\frac{x^2 + (-2x - 12 + 6)^2}{x^2 + (2x)^2} = \frac{8}{6^2}$, 解方程求出

x 的值, 进而得到点 P 的坐标.

解答: 解: (1) 由直线 AC: $y = -x - 6$, 可得 A $(-6, 0)$, C $(0, -6)$,
 $\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A、B, 抛物线的顶点 D 的横坐标为 -2 ,
 $\therefore$ B $(2, 0)$.

把 A、B、C 三点坐标分别代入 $y = ax^2 + bx + c$, 得

$$\begin{cases} 36a - 6b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = -6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = -6 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$;

(2) $\triangle ACD$ 是直角三角形, 理由如下:

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 8,$$

$\therefore$ 顶点 D 的坐标是 $(-2, -8)$.

$\therefore$ A $(-6, 0)$, C $(0, -6)$,

$$\therefore AC^2 = 6^2 + 6^2 = 72, CD^2 = 2^2 + (-8 + 6)^2 = 8, AD^2 = (-2 + 6)^2 + 8^2 = 80,$$

$$\therefore AC^2 + CD^2 = AD^2,$$

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形, $\angle ACD = 90^\circ$;

(3) 假设在线段 AD 上存在一点 P, 使 $\angle ADC = \angle PCF$.

设直线 AD 的解析式为 $y = mx + n$,

$\therefore$ A $(-6, 0)$, D $(-2, -8)$,

$$\therefore \begin{cases} -6m + n = 0 \\ -2m + n = -8 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = -2 \\ n = -12 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AD 的解析式为 $y = -2x - 12$,

$\therefore$ F 点坐标为 $(0, -12)$, 设点 P 的坐标为 $(x, -2x - 12)$.

$$\therefore \angle ADC = \angle DCF + \angle DFC, \angle PCF = \angle DCF + \angle PCD, \angle ADC = \angle PCF,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle PCD.$$

在 $\triangle CPD$ 与 $\triangle FPC$ 中,

$$\begin{cases} \angle PCD = \angle PFC \\ \angle CPD = \angle FPC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CPD \sim \triangle FPC,$$

$$\therefore \frac{CP}{FP} = \frac{CD}{FC},$$

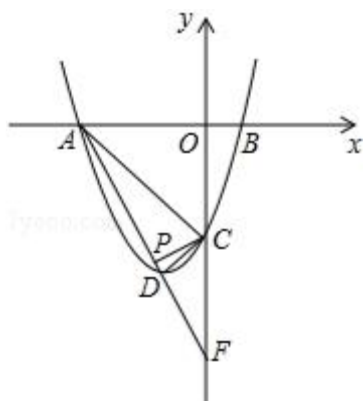
$$\therefore \frac{x^2 + (-2x - 12 + 6)^2}{x^2 + (2x)^2} = \frac{8}{6^2},$$

$$\text{整理得, } 35x^2 + 216x + 324 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{18}{7}, \quad x_2 = -\frac{18}{5} \text{ (舍去)},$$

$$\text{当 } x = -\frac{18}{7} \text{ 时, } -2x - 12 = -2 \times \left(-\frac{18}{7}\right) - 12 = -\frac{48}{7},$$

$$\text{故所求点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{18}{7}, -\frac{48}{7}\right).$$



点评: 本题是二次函数的综合题型, 其中涉及到利用待定系数法求二次函数、一次函数的解析式, 二次函数的性质, 勾股定理的逆定理, 相似三角形的判定与性质等知识, 综合性较强, 难度适中. 利用数形结合、方程思想是解题的关键.