

2015 年黑龙江省哈尔滨市中考数学试卷

一、选择题（每小题 3 分，共计 30 分）

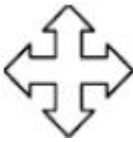
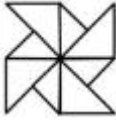
1. (3 分) (2015•本溪) 实数 $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

- A $\frac{1}{2}$ B $-\frac{1}{2}$ C 2 D -2

2. (3 分) (2015•哈尔滨) 下列运算正确的是 ()

- A $(a^2)^5 = a^7$ B $a^2 \cdot a^4 = a^6$ C $3a^2b - 3ab^2 = 0$ D $(\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{2}$

3. (3 分) (2015•龙岩) 下列图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

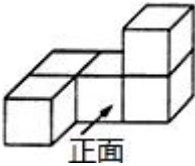
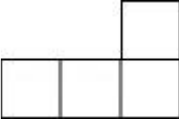
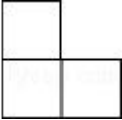
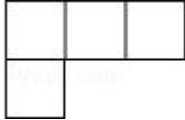
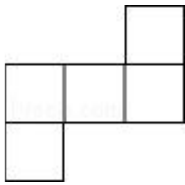
- A  B  C  D 

4. (3 分) (2015•哈尔滨) 点 A $(-1, y_1)$, B $(-2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上, 则

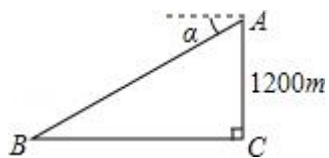
y_1, y_2 的大小关系是 ()

- A $y_1 > y_2$ B $y_1 = y_2$ C $y_1 < y_2$ D 不能确定

5. (3 分) (2015•哈尔滨) 如图所示的几何体是由五个小正方体组合而成的, 它的主视图是 ()

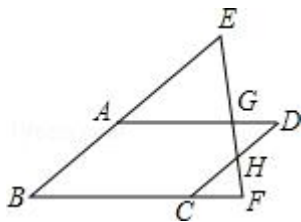
- 
- A  B  C  D 

6. (3 分) (2015•哈尔滨) 如图, 某飞机在空中 A 处探测到它的正下方地平面上目标 C, 此时飞行高度 $AC = 1200\text{m}$, 从飞机上看地平面指挥台 B 的仰角 $\alpha = 30^\circ$, 则飞机 A 与指挥台 B 的距离为 ()



- A 1200m B $1200\sqrt{2}$ m C $1200\sqrt{3}$ m D 2400m

7. (3 分) (2015•哈尔滨) 如图，四边形 ABCD 是平行四边形，点 E 在 BA 的延长线上，点 F 在 BC 的延长线上，连接 EF，分别交 AD，CD 于点 G，H，则下列结论错误的是 ()

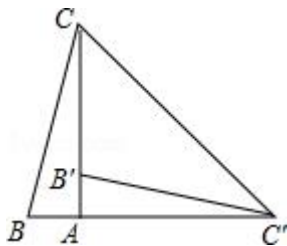


- A $\frac{EA}{BE} = \frac{EG}{EF}$ B $\frac{EG}{GH} = \frac{AG}{GD}$ C $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{CF}$ D $\frac{FH}{EH} = \frac{CF}{AD}$

8. (3 分) (2015•哈尔滨) 今年我市计划扩大城区绿地面积，现有一块长方形绿地，它的短边长为 60m，若将短边增大到与长边相等 (长边不变)，使扩大后的绿地的形状是正方形，则扩大后的绿地面积比原来增加 1600m^2 。设扩大后的正方形绿地边长为 x m，下面所列方程正确的是 ()

- A $x(x-60)=1600$ B $x(x+60)=1600$ C $60(x+60)=1600$ D $60(x-60)=1600$

9. (3 分) (2015•哈尔滨) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后得到的 $\triangle AB'C'$ (点 B 的对应点是点 B' ，点 C 的对应点是点 C')，连接 CC' 。若 $\angle CC'B'=32^\circ$ ，则 $\angle B$ 的大小是 ()

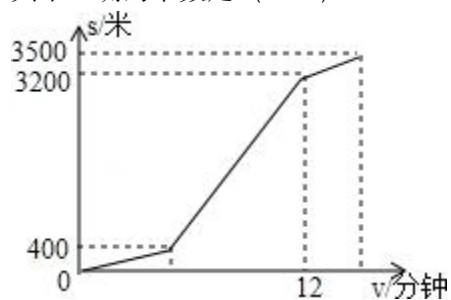


- A 32° B 64° C 77° D 87°

10. (3 分) (2015•哈尔滨) 小明家、公交车站、学校在一条笔直的公路旁 (小明家、学校到这条公路的距离忽略不计)，一天，小明从家出发去上学，沿这条公路步行到公交车站恰好乘上一辆公交车，公交车沿这条公路匀速行驶，小明下车时发现还有 4 分钟上课，于是他沿这条公路跑步赶到学校 (上、下车时间忽略不计)，小明与家的距离 s (单位：米) 与他所用时间 t (单位：分钟) 之间的函数关系如图所示，已知小明从家出发 7 分钟时与家的距离为 1200 米，从上公交车到他到达学校共用 10 分钟，下列说法：

- ①小明从家出发 5 分钟时乘上公交车 ②公交车的速度为 400 米/分钟

③小明下公交车后跑向学校的速度为 100 米/分钟 ④小明上课没有迟到
其中正确的个数是 ()



A 1 个

B 2 个

C 3 个

D 4 个

二、填空题 (每小题 3 分, 共计 30 分)

11. (3 分) (2015•哈尔滨) 将 123000000 用科学记数法表示为_____.

12. (3 分) (2015•哈尔滨) 在函数 $y = \frac{1-x}{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

13. (3 分) (2015•哈尔滨) 计算 $\sqrt{24} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$ =_____.

14. (3 分) (2015•哈尔滨) 把多项式 $9a^3 - ab^2$ 因式分解的结果是_____.

15. (3 分) (2015•哈尔滨) 一个扇形的半径为 3cm, 面积为 $\pi \text{ cm}^2$, 则此扇形的圆心角为_____度.

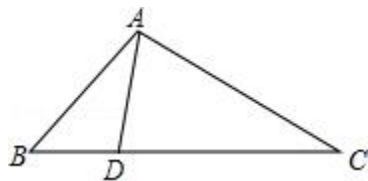
16. (3 分) (2015•哈尔滨) 不等式组 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-1 \leq 3 \end{cases}$ 的解集为_____.

17. (3 分) (2015•哈尔滨) 美术馆举办的一次画展中, 展出的油画作品和国画作品共有 100 幅, 其中油画作品的数量是国画作品数量的 2 倍多 7 幅, 则展出的油画作品有_____幅.

18. (3 分) (2015•哈尔滨) 从甲、乙、丙、丁 4 名三好学生中随机抽取 2 名学生担任升旗手, 则抽取的 2 名学生是甲和乙的概率为_____.

19. (3 分) (2015•哈尔滨) 在矩形 ABCD 中, $AD=5$, $AB=4$, 点 E, F 在直线 AD 上, 且四边形 BCFE 为菱形. 若线段 EF 的中点为点 M, 则线段 AM 的长为_____.

20. (3 分) (2015•哈尔滨) 如图, 点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, $\angle C + \angle BAD = \angle DAC$, $\tan \angle BAD = \frac{4}{7}$, $AD = \sqrt{65}$, $CD = 13$, 则线段 AC 的长为_____.



三、解答题（其中 21-22 题各 7 分，23-24 题各 8 分，25-27 题各 10 分，共计 60 分）

21. (7 分) (2015•哈尔滨) 先化简，再求代数式： $(\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x^2-xy}) \div \frac{x-2}{3x}$ 的值，其中

$$x=2+\tan 60^{\circ}, y=4 \sin 30^{\circ}.$$

22. (7 分) (2015•哈尔滨) 图 1、图 2 是两张形状、大小完全相同的方格纸，方格纸中的每个小正方形的边长均为 1，每个小正方形的顶点叫做格点.

(1) 在图 1 中画出等腰直角三角形 MON，使点 N 在格点上，且 $\angle MON=90^{\circ}$;

(2) 在图 2 中以格点为顶点画一个正方形 ABCD，使正方形 ABCD 面积等于 (1) 中等腰直角三角形 MON 面积的 4 倍，并将正方形 ABCD 分割成以格点为顶点的四个全等的直角三角形和一个正方形，且正方形 ABCD 面积没有剩余（画出一种即可）.

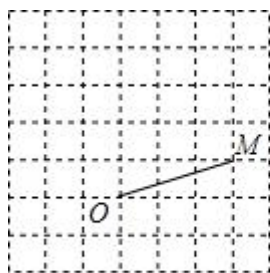


图1

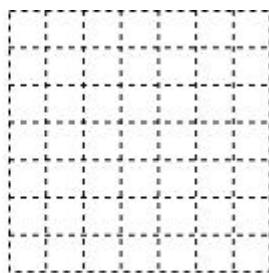
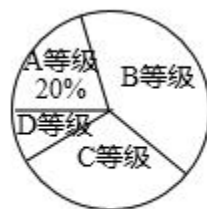
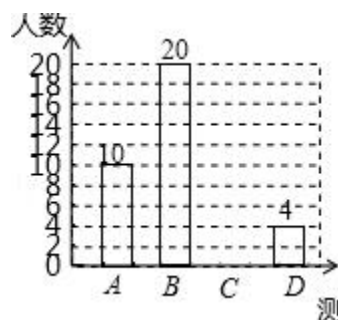


图2

23. (8 分) (2015•哈尔滨) 某中学为了了解八年级学生体能状况，从八年级学生中随机抽取部分学生进行体能测试，测试结果分为 A，B，C，D 四个等级，请根据两幅统计图中的信息，回答下列问题：



(1) 本次抽样调查共抽取了多少名学生？

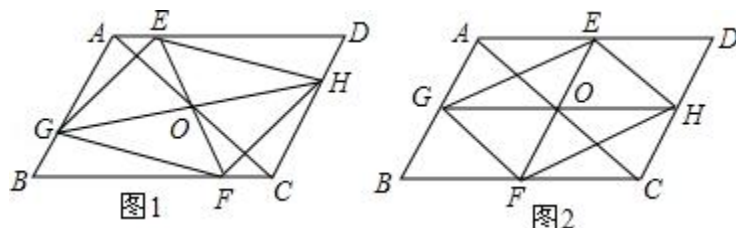
(2) 求测试结果为 C 等级的学生数，并补全条形图；

(3) 若该中学八年级共有 700 名学生，请你估计该中学八年级学生中体能测试结果为 D 等级的学生有多少名？

24. (8分) (2015•哈尔滨) 如图1, $\square ABCD$ 中, 点 O 是对角线 AC 的中点, EF 过点 O , 与 AD , BC 分别相交于点 E , F , GH 过点 O , 与 AB , CD 分别相交于点 G , H , 连接 EG , FG , FH , EH .

(1) 求证: 四边形 $EGFH$ 是平行四边形;

(2) 如图2, 若 $EF \parallel AB$, $GH \parallel BC$, 在不添加任何辅助线的情况下, 请直接写出图2中与四边形 $AGHD$ 面积相等的所有平行四边形 (四边形 $AGHD$ 除外).



25. (10分) (2015•哈尔滨) 华昌中学开学初在金利源商场购进 A、B 两种品牌的足球, 购买 A 品牌足球花费了 2500 元, 购买 B 品牌足球花费了 2000 元, 且购买 A 品牌足球数量是购买 B 品牌足球数量的 2 倍, 已知购买一个 B 品牌足球比购买一个 A 品牌足球多花 30 元.

(1) 求购买一个 A 品牌、一个 B 品牌的足球各需多少元?

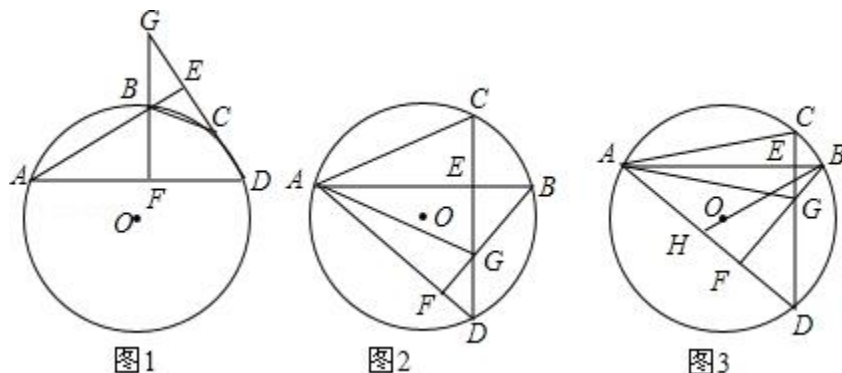
(2) 华昌中学响应习总书记“足球进校园”的号召, 决定两次购进 A、B 两种品牌足球共 50 个, 恰逢金利源商场对两种品牌足球的售价进行调整, A 品牌足球售价比第一次购买时提高了 8%, B 品牌足球按第一次购买时售价的 9 折出售, 如果这所中学此次购买 A、B 两种品牌足球的总费用不超过 3260 元, 那么华昌中学此次最多可购买多少个 B 品牌足球?

26. (10分) (2015•哈尔滨) AB , CD 是 $\odot O$ 的两条弦, 直线 AB , CD 互相垂直, 垂足为点 E , 连接 AD , 过点 B 作 $BF \perp AD$, 垂足为点 F , 直线 BF 交直线 CD 于点 G .

(1) 如图1, 当点 E 在 $\odot O$ 外时, 连接 BC , 求证: BE 平分 $\angle GBC$;

(2) 如图2, 当点 E 在 $\odot O$ 内时, 连接 AC , AG , 求证: $AC=AG$;

(3) 如图3, 在 (2) 条件下, 连接 BO 并延长交 AD 于点 H , 若 BH 平分 $\angle ABF$, $AG=4$, $\tan \angle D = \frac{4}{3}$, 求线段 AH 的长.



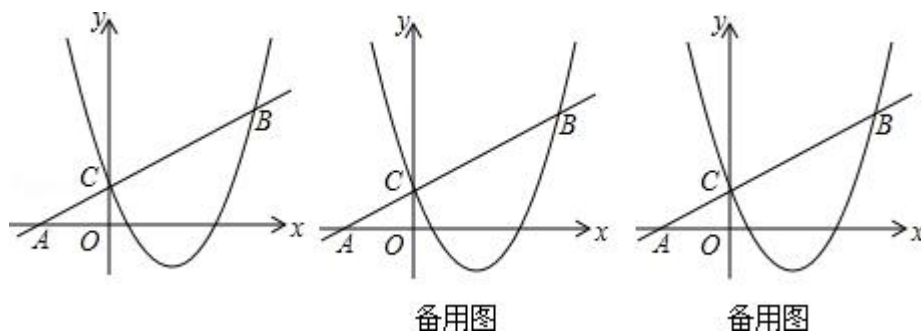
27. (10分) (2015•哈尔滨) 如图, 在平面直角坐标系中, 点 O 为坐标原点, 直线 $y=kx+1$ ($k \neq 0$) 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 C , 过点 C 的抛物线 $y=ax^2 - (6a-2)x+b$ ($a \neq 0$) 与直线 AC 交于另一点 B , 点 B 坐标为 $(4, 3)$.

(1) 求 a 的值;

(2) 点 P 是射线 CB 上的一个动点，过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴，垂足为点 Q，在 x 轴上点 Q 的右侧取点 M，使 $MQ = \frac{5}{8}$ ，在 QP 的延长线上取点 N，连接 PM，AN，已知 $\tan \angle NAQ =$

$\tan \angle MPQ = \frac{1}{2}$ ，求线段 PN 的长；

(3) 在 (2) 的条件下，过点 C 作 $CD \perp AB$ ，使点 D 在直线 AB 下方，且 $CD = AC$ ，连接 PD，NC，当以 PN，PD，NC 的长为三边长构成的三角形面积是 $\frac{25}{8}$ 时，在 y 轴左侧的抛物线上是否存在点 E，连接 NE，PE，使得 $\triangle ENP$ 与以 PN，PD，NC 的长为三边长的三角形全等？若存在，求出 E 点坐标；若不存在，请说明理由。



2015 年黑龙江省哈尔滨市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 3 分，共计 30 分）

1. (3 分) (2015•本溪) 实数 $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

A $\frac{1}{2}$

B $-\frac{1}{2}$

C 2

D -2

考点: 相反数.

分析: 根据只有符号不同的两数叫做互为相反数解答.

解答: 解: 实数 $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 $\frac{1}{2}$,

故选 A

点评: 本题考查了实数的性质, 熟记相反数的定义是解题的关键.

2. (3 分) (2015•哈尔滨) 下列运算正确的是 ()

A $(a^2)^5=a^7$

B $a^2 \cdot a^4=a^6$

C $3a^2b - 3ab^2=0$

D $(\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{2}$

考点: 幂的乘方与积的乘方; 合并同类项; 同底数幂的乘法.

分析: 根据幂的乘方、同底数幂的乘法和同类项合并计算即可.

解答: 解: A、 $(a^2)^5=a^{10}$, 错误;

B、 $a^2 \cdot a^4=a^6$, 正确;

C、 $3a^2b$ 与 $3ab^2$ 不能合并, 错误;

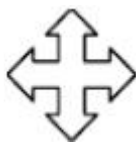
D、 $(\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}$, 错误;

故选 B.

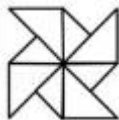
点评: 此题考查幂的乘方、同底数幂的乘法和同类项合并, 关键是根据法则进行计算.

3. (3 分) (2015•龙岩) 下列图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

A



B



C



D



考点: 中心对称图形; 轴对称图形.

分析: 根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

解答: 解: A、既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 故 A 正确;

B、不是轴对称图形, 是中心对称图形, 故 B 错误;

C、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故 C 错误;

D、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故 D 错误.

故选：A.

点评：本题考查了中心对称及轴对称的知识，解题时掌握好中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后两部分重合.

4. (3 分) (2015•哈尔滨) 点 A $(-1, y_1)$ ，B $(-2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上，则

y_1, y_2 的大小关系是 ()

A $y_1 > y_2$

B $y_1 = y_2$

C $y_1 < y_2$

D 不能确定

考点：反比例函数图象上点的坐标特征.

分析：先根据反比例函数的解析式判断出反比例函数的图象所在的象限及其增减性，再根据 A、B 两点的横坐标判断出两点所在的象限，进而可得出结论.

解答：解：∵反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中， $k = 2 > 0$,

∴此函数图象的两个分支分别位于一、三象限，且在每一象限内 y 随 x 的增大而减小，

∵ $-1 < 0$ ， $-2 < 0$,

∴点 A $(-1, y_1)$ 、B $(-2, y_2)$ 均位于第三象限，

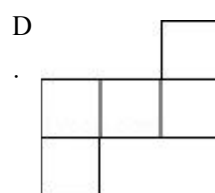
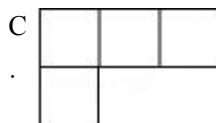
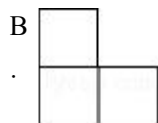
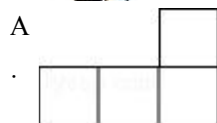
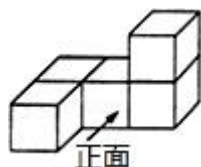
∵ $-1 > -2$,

∴ $y_1 < y_2$.

故选 C.

点评：本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

5. (3 分) (2015•哈尔滨) 如图所示的几何体是由五个小正方体组合而成的，它的主视图是 ()



考点：简单组合体的三视图.

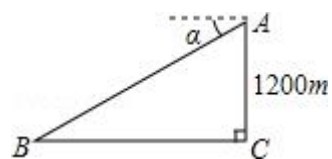
分析：从正面看得到从左往右 3 列正方形的个数依次为 1，1，2，依此判断即可.

解答：解：从正面看得到从左往右 3 列正方形的个数依次为 1，1，2，

故选 A

点评：此题考查三视图，关键是根据三视图分为主视图、左视图、俯视图，分别是物体正面、左面和上面看，所得到的图形.

6. (3分) (2015•哈尔滨) 如图, 某飞机在空中 A 处探测到它的正下方地平面上目标 C, 此时飞行高度 AC=1200m, 从飞机上看地平线指挥台 B 的仰角 $\alpha=30^\circ$, 则飞机 A 与指挥台 B 的距离为 ()



A 1200m

B $1200\sqrt{2}$ m

C $1200\sqrt{3}$ m

D 2400m

考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析: 首先根据图示, 可得 $\angle ABC = \angle \alpha = 30^\circ$, 然后在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 用 AC 的长度除以 $\sin 30^\circ$, 求出飞机 A 与指挥台 B 的距离为多少即可.

解答: 解: $\because \angle ABC = \angle \alpha = 30^\circ$,

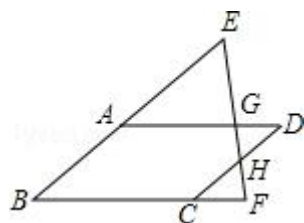
$$\therefore AB = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{1200}{\frac{1}{2}} = 2400 \text{ (m)},$$

即飞机 A 与指挥台 B 的距离为 2400m.

故选: D.

点评: 此题主要考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要善于读懂题意, 把实际问题划归为直角三角形中边角关系问题加以解决.

7. (3分) (2015•哈尔滨) 如图, 四边形 ABCD 是平行四边形, 点 E 在 BA 的延长线上, 点 F 在 BC 的延长线上, 连接 EF, 分别交 AD, CD 于点 G, H, 则下列结论错误的是 ()



A $\frac{EA}{BE} = \frac{EG}{EF}$

B $\frac{EG}{GH} = \frac{AG}{GD}$

C $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{CF}$

D $\frac{FH}{EH} = \frac{CF}{AD}$

考点: 相似三角形的判定与性质; 平行四边形的性质.

分析: 根据相似三角形的判定和性质进行判断即可.

解答: 解: $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BF$, $BE \parallel DC$, $AD = BC$,

$$\therefore \frac{EA}{BE} = \frac{EG}{EF}, \frac{EG}{GH} = \frac{AG}{GD}, \frac{HF}{EH} = \frac{FC}{BC} = \frac{CF}{AD},$$

故选 C.

点评: 此题考查相似三角形的判定和性质, 关键是根据相似三角形的判定和性质来分析判断.

8. (3分) (2015•哈尔滨) 今年我市计划扩大城区绿地面积, 现有一块长方形绿地, 它的短边长为 60m, 若将短边增大到与长边相等 (长边不变), 使扩大后的绿地的形状是正方形, 则扩大后的绿地面积比原来增加 1600m^2 . 设扩大后的正方形绿地边长为 $x\text{m}$, 下面所列方程正确的是 ()

A $x(x-60)=1600$ B $x(x+60)=1600$ C $60(x+60)=1600$ D $60(x-60)=1600$

考点: 由实际问题抽象出一元二次方程.

专题: 几何图形问题.

分析: 设扩大后的正方形绿地边长为 $x\text{m}$, 根据“扩大后的绿地面积比原来增加 1600m^2 ”建立方程即可.

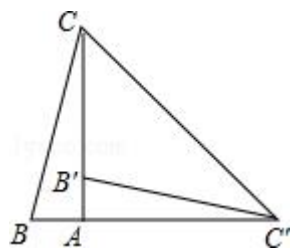
解答: 解: 设扩大后的正方形绿地边长为 $x\text{m}$, 根据题意得

$$x^2 - 60x = 1600, \text{ 即 } x(x-60) = 1600.$$

故选 A.

点评: 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程, 解题的关键是弄清题意, 并找到等量关系.

9. (3分) (2015•哈尔滨) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后得到的 $\triangle AB'C'$ (点 B 的对应点是点 B' , 点 C 的对应点是点 C'), 连接 CC' . 若 $\angle CC'B'=32^\circ$, 则 $\angle B$ 的大小是 ()



A 32°

B 64°

C 77°

D 87°

考点: 旋转的性质.

分析: 旋转中心为点 A, C、 C' 为对应点, 可知 $AC=AC'$, 又因为 $\angle CAC'=90^\circ$, 根据三角形外角的性质求出 $\angle C'B'A$ 的度数, 进而求出 $\angle B$ 的度数.

解答: 解: 由旋转的性质可知, $AC=AC'$,

$\because \angle CAC'=90^\circ$, 可知 $\triangle CAC'$ 为等腰直角三角形, 则 $\angle CC'A=45^\circ$.

$\because \angle CC'B'=32^\circ$,

$\therefore \angle C'B'A = \angle C'CA + \angle CC'B' = 45^\circ + 32^\circ = 77^\circ$,

$\because \angle B = \angle C'B'A$,

$\therefore \angle B = 77^\circ$,

故选 C.

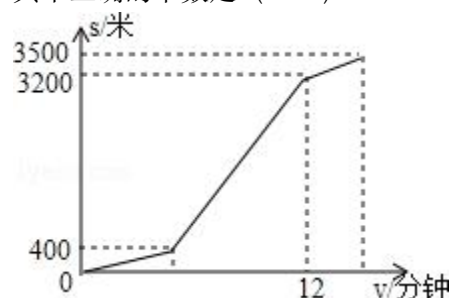
点评: 本题考查了旋转的性质: 旋转前后两图形全等, 即对应角相等, 对应线段相等. 也考查了等腰直角三角形的性质.

10. (3分) (2015•哈尔滨) 小明家、公交车站、学校在一条笔直的公路旁 (小明家、学校到这条公路的距离忽略不计), 一天, 小明从家出发去上学, 沿这条公路步行到公交车站恰

好乘上一辆公交车，公交车沿这条公路匀速行驶，小明下车时发现还有4分钟上课，于是他沿这条公路跑步赶到学校（上、下车时间忽略不计），小明与家的距离 s （单位：米）与他所用时间 t （单位：分钟）之间的函数关系如图所示，已知小明从家出发7分钟时与家的距离为1200米，从上公交车到他到达学校共用10分钟，下列说法：

- ①小明从家出发5分钟时乘上公交车 ②公交车的速度为400米/分钟
③小明下公交车后跑向学校的速度为100米/分钟 ④小明上课没有迟到

其中正确的个数是（ ）



- A 1个 B 2个 C 3个 D 4个

考点：一次函数的应用.

分析：根据图象可以确定他家与学校的距离，公交车时间是多少，他步行的时间和公交车的速度和小明从家出发到学校所用的时间.

解答：解：①小明从家出发乘上公交车的时间为 $7 - (1200 - 400) \div 400 = 5$ 分钟，①正确；
②公交车的速度为 $(3200 - 1200) \div (12 - 7) = 400$ 米/分钟，②正确；
③小明下公交车后跑向学校的速度为 $(3500 - 3200) \div 3 = 100$ 米/分钟，③正确；
④上公交车的时间为 $12 - 5 = 7$ 分钟，跑步的时间为 $10 - 7 = 3$ 分钟，因为 $3 < 4$ ，小明上课没有迟到，④正确；

故选：D.

点评：本题考查利用函数的图象解决实际问题，正确理解函数图象横、纵坐标表示的意义是解题的关键，注意，在解答时，单位要统一.

二、填空题（每小题3分，共计30分）

11. (3分) (2015•哈尔滨) 将123000000用科学记数法表示为 1.23×10^8 .

考点：科学记数法—表示较大的数.

分析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

解答：解：将123000000用科学记数法表示为： 1.23×10^8 .

故答案为： 1.23×10^8 .

点评：此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. (3分) (2015•哈尔滨) 在函数 $y = \frac{1-x}{x-2}$ 中，自变量 x 的取值范围是 $x \neq 2$.

考点: 函数自变量的取值范围.

分析: 求函数自变量的取值范围, 就是求函数解析式有意义的条件, 分式有意义的条件是: 分母不为 0.

解答: 解: 要使分式有意义, 即: $x - 2 \neq 0$,

解得: $x \neq 2$.

故答案为: $x \neq 2$.

点评: 本题主要考查函数自变量的取值范围, 考查的知识点为: 分式有意义, 分母不为 0.

13. (3 分) (2015•哈尔滨) 计算 $\sqrt{24} - 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}$.

考点: 二次根式的加减法.

专题: 计算题.

分析: 原式各项化为最简二次根式, 合并即可得到结果.

解答: 解: 原式 $= 2\sqrt{6} - 3 \times \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$= 2\sqrt{6} - \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{6}.$$

故答案为: $\sqrt{6}$.

点评: 此题考查了二次根式的加减法, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

14. (3 分) (2015•哈尔滨) 把多项式 $9a^3 - ab^2$ 因式分解的结果是 $a(3a+b)(3a-b)$.

考点: 提公因式法与公式法的综合运用.

专题: 计算题.

分析: 原式提取 a , 再利用平方差公式分解即可.

解答: 解: 原式 $= a(9a^2 - b^2) = a(3a+b)(3a-b)$,

故答案为: $a(3a+b)(3a-b)$.

点评: 此题考查了提公因式法与公式法的综合运用, 熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

15. (3 分) (2015•哈尔滨) 一个扇形的半径为 3cm, 面积为 $\pi \text{ cm}^2$, 则此扇形的圆心角为 40 度.

考点: 扇形面积的计算.

分析: 设扇形的圆心角是 n° , 根据扇形的面积公式即可得到一个关于 n 的方程, 解方程即可求解.

解答: 解: 设扇形的圆心角是 n° ,

$$\text{根据题意可知: } S = \frac{n\pi 3^2}{360} = \pi,$$

解得 $n = 40^\circ$,

故答案为 40.

点评: 本题考查了扇形的面积公式, 正确理解公式 $S = \frac{n\pi r^2}{360}$ 是解题的关键, 此题难度不大.

16. (3 分) (2015•哈尔滨) 不等式组 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-1 \leq 3 \end{cases}$ 的解集为 $-1 < x \leq 2$.

考点: 解一元一次不等式组.

分析: 分别求出各不等式的解集, 再求出其公共解集即可.

解答:

$$\text{解: } \begin{cases} x+1 > 0 \text{ ①} \\ 2x-1 \leq 3 \text{ ②} \end{cases},$$

由①得, $x > -1$,

由②得 $x \leq 2$,

故此不等式组的解集为: $-1 < x \leq 2$.

故答案为: $-1 < x \leq 2$.

点评: 本题解一元一次不等式组, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的法则是解答此题的关键.

17. (3 分) (2015•哈尔滨) 美术馆举办的一次画展中, 展出的油画作品和国画作品共有 100 幅, 其中油画作品的数量是国画作品数量的 2 倍多 7 幅, 则展出的油画作品有 69 幅.

考点: 二元一次方程组的应用.

分析: 设展出的油画作品的数量是 x 幅, 展出的国画作品是 y 幅, 则根据“展出的油画作品和国画作品共有 100 幅, 其中油画作品的数量是国画作品数量的 2 倍多 7 幅”列出方程组并解答.

解答: 解: 设展出的油画作品的数量是 x 幅, 展出的国画作品是 y 幅, 依题意得

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 2y+7=x \end{cases},$$
$$\text{解得} \begin{cases} x=69 \\ y=31 \end{cases},$$

故答案是: 69.

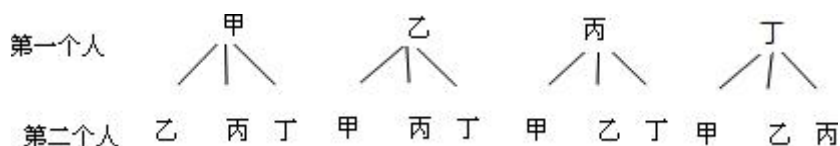
点评: 本题考查了二元一次方程组的应用. 解题关键是要读懂题目的意思, 根据题目给出的条件, 找出合适的等量关系, 列出方程组, 再求解. 利用二元一次方程组求解的应用题一般情况下题中要给出 2 个等量关系, 准确的找到等量关系并用方程组表示出来是解题的关键.

18. (3 分) (2015•哈尔滨) 从甲、乙、丙、丁 4 名三好学生中随机抽取 2 名学生担任升旗手, 则抽取的 2 名学生是甲和乙的概率为 $\frac{1}{6}$.

考点: 列表法与树状图法.

分析: 根据题意画出树状图, 然后求得全部情况的总数与符合条件的情況数目; 二者的比值就是其发生的概率.

解答: 解: 画树形图得:



∴一共有 12 种情况，抽取到甲和乙的有 2 种，

$$\therefore P(\text{抽到甲和乙}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

故答案为: $\frac{1}{6}$.

点评: 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 适合于两步完成的事件. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

19. (3 分) (2015•哈尔滨) 在矩形 ABCD 中, AD=5, AB=4, 点 E, F 在直线 AD 上, 且四边形 BCFE 为菱形. 若线段 EF 的中点为点 M, 则线段 AM 的长为 5.5, 或 0.5.

考点: 矩形的性质; 菱形的性质.

专题: 分类讨论.

分析: 两种情况: ①由矩形的性质得出 CD=AB=4, BC=AD=5, $\angle ADB = \angle CDF = 90^\circ$, 由菱形的性质得出 CF=EF=BE=BC=5, 由勾股定理求出 DF, 得出 MF, 即可求出 AM; ②同①得出 AE=3, 求出 ME, 即可得出 AM 的长.

解答: 解: 分两种情况: ①如图 1 所示:

∵ 四边形 ABCD 是矩形,

∴ CD=AB=4, BC=AD=5, $\angle ADB = \angle CDF = 90^\circ$,

∵ 四边形 BCFE 为菱形,

∴ CF=EF=BE=BC=5,

$$\therefore DF = \sqrt{CF^2 - CD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

∴ AF=AD+DF=8,

∵ M 是 EF 的中点,

$$\therefore MF = \frac{1}{2}EF = 2.5,$$

$$\therefore AM = AF - DF = 8 - 2.5 = 5.5;$$

②如图 2 所示: 同①得: AE=3,

∵ M 是 EF 的中点,

$$\therefore ME = 2.5,$$

$$\therefore AM = AE - ME = 0.5;$$

综上所述: 线段 AM 的长为: 5.5, 或 0.5;

故答案为: 5.5, 或 0.5.

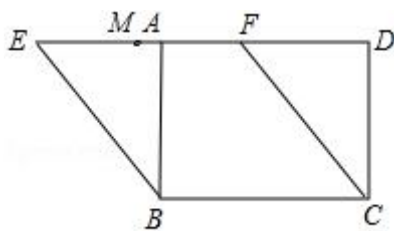


图2

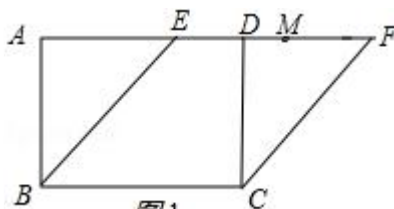
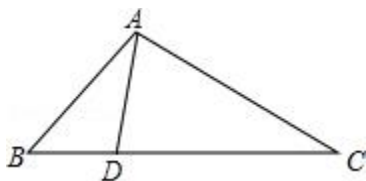


图1

点评: 本题考查了矩形的性质、菱形的性质、勾股定理；熟练掌握矩形和菱形的性质，并能进行推理计算是解决问题的关键。

20. (3分) (2015•哈尔滨) 如图，点D在 $\triangle ABC$ 的边BC上， $\angle C + \angle BAD = \angle DAC$,

$\tan \angle BAD = \frac{4}{7}$, $AD = \sqrt{65}$, $CD = 13$, 则线段AC的长为 $4\sqrt{13}$.



考点: 勾股定理；角平分线的性质；等腰三角形的判定与性质；解直角三角形.

分析: 作 $\angle DAE = \angle BAD$ 交BC于E, 作 $AF \perp BC$ 交BC于F, 作 $AG \perp BC$ 交BC于G. 根据三角函数设 $DF = 4x$, 则 $AF = 7x$, 在 $Rt\triangle ADF$ 中, 根据勾股定理得到 $DF = 4$, $AF = 7$, 设 $EF = y$, 则 $CE = 7 + y$, 则 $DE = 6 - y$, 在 $Rt\triangle DEF$ 中, 根据勾股定理得到 $DE = \frac{13}{3}$, $AE = \frac{26}{3}$, 设 $DG = z$, 则 $EG = \frac{13}{3} - z$, 则 $(\sqrt{65})^2 - z^2 = (\frac{26}{3})^2 - (\frac{13}{3} - z)^2$, 依此可得 $CG = 12$, 在 $Rt\triangle ADG$ 中, 据勾股定理得到 $AG = 8$, 在 $Rt\triangle ACG$ 中, 据勾股定理得到 $AC = 4\sqrt{13}$.

解答: 解: 作 $\angle DAE = \angle BAD$ 交BC于E, 作 $DF \perp AE$ 交AE于F, 作 $AG \perp BC$ 交BC于G.

$$\because \angle C + \angle BAD = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ACB,$$

$$\therefore AE = EC,$$

$$\because \tan \angle BAD = \frac{4}{7},$$

$$\therefore \text{设 } DF = 4x, \text{ 则 } AF = 7x,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ADF \text{ 中, } AD^2 = DF^2 + AF^2, \text{ 即 } (\sqrt{65})^2 = (4x)^2 + (7x)^2,$$

$$\text{解得 } x_1 = -1 \text{ (不合题意舍去), } x_2 = 1,$$

$$\therefore DF = 4, \quad AF = 7,$$

$$\text{设 } EF = y, \text{ 则 } CE = 7 + y, \text{ 则 } DE = 6 - y,$$

$$\text{在 } Rt\triangle DEF \text{ 中, } DE^2 = DF^2 + EF^2, \text{ 即 } (6 - y)^2 = 4^2 + y^2,$$

$$\text{解得 } y = \frac{5}{3},$$

$$\therefore DE = 6 - y = \frac{13}{3}, \quad AE = \frac{26}{3},$$

$$\therefore \text{设 } DG = z, \text{ 则 } EG = \frac{13}{3} - z, \text{ 则}$$

$$(\sqrt{65})^2 - z^2 = \left(\frac{26}{3}\right)^2 - \left(\frac{13}{3} - z\right)^2,$$

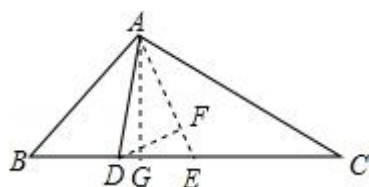
$$\text{解得 } z = 1,$$

$$\therefore CG = 12,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADG \text{ 中, } AG = \sqrt{AD^2 - DG^2} = 8,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACG \text{ 中, } AC = \sqrt{AG^2 + CG^2} = 4\sqrt{13}.$$

故答案为: $4\sqrt{13}$.



点评: 考查了勾股定理, 等腰三角形的判定与性质, 解直角三角形, 解题的关键是根据勾股定理得到 AG 和 CG 的长.

三、解答题 (其中 21-22 题各 7 分, 23-24 题各 8 分, 25-27 题各 10 分, 共计 60 分)

21. (7 分) (2015•哈尔滨) 先化简, 再求代数式: $\left(\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x^2-xy}\right) \div \frac{x-2}{3x}$ 的值, 其中

$$x = 2 + \tan 60^\circ, \quad y = 4 \sin 30^\circ.$$

考点: 分式的化简求值; 特殊角的三角函数值.

专题: 计算题.

分析: 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分得到最简结果, 把 x 与 y 的值代入计算即可求出值.

解答: 解: 原式 = $\frac{x-2}{x(x-y)} \cdot \frac{3x}{x-2} \cdot \frac{3}{x-y},$

$$\text{当 } x = 2 + \sqrt{3}, \quad y = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ 时, 原式} = \sqrt{3}.$$

点评: 此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

22. (7 分) (2015•哈尔滨) 图 1、图 2 是两张形状、大小完全相同的方格纸, 方格纸中的每个小正方形的边长均为 1, 每个小正方形的顶点叫做格点.

(1) 在图 1 中画出等腰直角三角形 MON, 使点 N 在格点上, 且 $\angle MON = 90^\circ$;

(2) 在图 2 中以格点为顶点画一个正方形 ABCD，使正方形 ABCD 面积等于 (1) 中等腰直角三角形 MON 面积的 4 倍，并将正方形 ABCD 分割成以格点为顶点的四个全等的直角三角形和一个正方形，且正方形 ABCD 面积没有剩余（画出一种即可）。

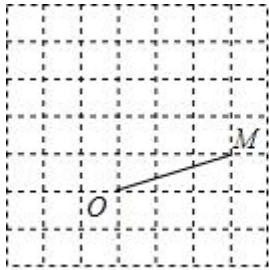


图1

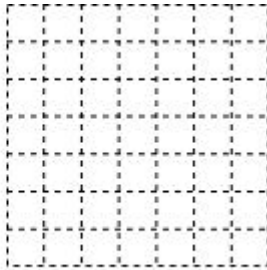


图2

考点：作图—应用与设计作图.

分析：（1）过点 O 向线段 OM 作垂线，此直线与格点的交点为 N，连接 MN 即可；

（2）根据勾股定理画出图形即可.

解答：解：（1）如图 1 所示；

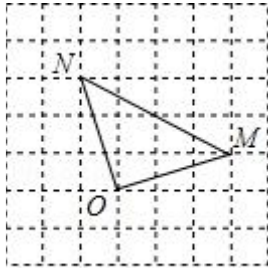


图1

（2）如图 2、3 所示；

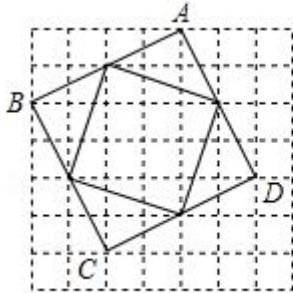


图2

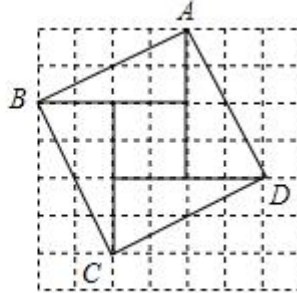
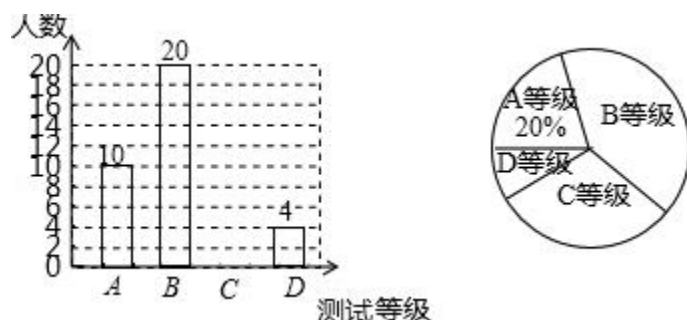


图3

点评： 本题考查的是作图 – 应用与设计作图，熟知勾股定理是解答此题的关键.

23. (8 分) (2015•哈尔滨) 某中学为了了解八年级学生体能状况，从八年级学生中随机抽取部分学生进行体能测试，测试结果分为 A，B，C，D 四个等级，请根据两幅统计图中的信息，回答下列问题：



- (1) 本次抽样调查共抽取了多少名学生？
- (2) 求测试结果为 C 等级的学生数，并补全条形图；
- (3) 若该中学八年级共有 700 名学生，请你估计该中学八年级学生中体能测试结果为 D 等级的学生有多少名？

考点：条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

分析： (1) 用 A 等级的人数 $\div$ A 等级的百分比，即可解答；

(2) 用总人数 - A 等级的人数 - B 等级的人数 - D 等级的人数，即可得到 C 等级的学生数；

(3) 根据用样本估计总体，即可解答.

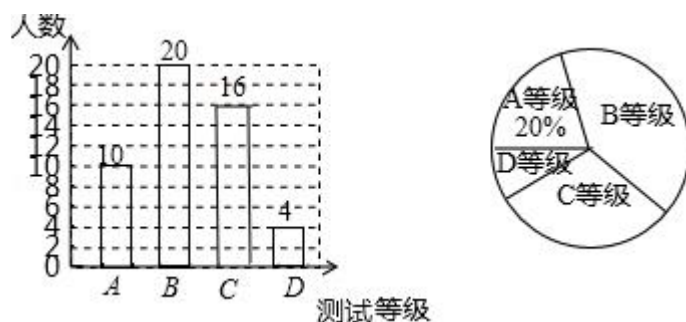
解答： 解：(1) $10 \div 20\% = 50$ (名).

答：本次抽样调查共抽取了 50 名学生；

(2) $50 - 10 - 20 - 4 = 16$ (名).

答：测试结果为 C 等级的学生有 16 名；

如图所示：



(3) $700 \times \frac{4}{50} = 56$ (名).

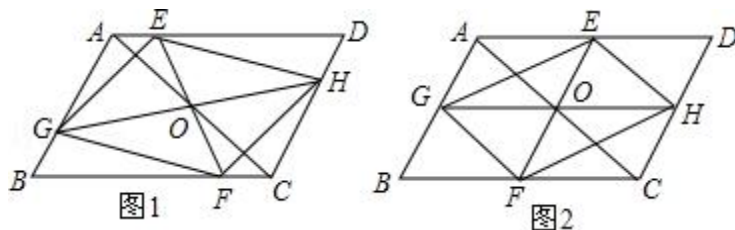
答：估计该中学八年级学生中体能测试结果为 D 等级的学生有 56 名.

点评： 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

24. (8 分) (2015•哈尔滨) 如图 1, $\square ABCD$ 中, 点 O 是对角线 AC 的中点, EF 过点 O, 与 AD, BC 分别相交于点 E, F, GH 过点 O, 与 AB, CD 分别相交于点 G, H, 连接 EG, FG, FH, EH.

(1) 求证: 四边形 EGFH 是平行四边形;

(2) 如图 2, 若 $EF \parallel AB$, $GH \parallel BC$, 在不添加任何辅助线的情况下, 请直接写出图 2 中与四边形 AGHD 面积相等的所有平行四边形 (四边形 AGHD 除外).



考点: 平行四边形的判定与性质；全等三角形的判定与性质.

分析: (1) 由四边形 ABCD 是平行四边形, 得到 $AD \parallel BC$, 根据平行四边形的性质得到 $\angle EAO = \angle FCO$, 证出 $\triangle OAE \cong \triangle OCF$, 得到 $OE = OF$, 同理 $OG = OH$, 根据对角线互相平分的四边形是平行四边形得到结论;

(2) 根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形即可得到结论.

解答: (1) 证明: $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle EAO = \angle FCO$,

在 $\triangle OAE$ 与 $\triangle OCF$ 中 $\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO \\ \angle AOE = \angle COF, \\ OA = OC \end{cases}$

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCF$,

$\therefore OE = OF$,

同理 $OG = OH$,

$\therefore$ 四边形 EGFH 是平行四边形;

(2) 解: 与四边形 AGHD 面积相等的所有平行四边形有 $\square GBCH$, $\square ABFE$, $\square EFCD$, $\square EGFH$;

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$,

$\therefore EF \parallel AB$, $GH \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 GBCH, ABFE, EFCD, EGFH 为平行四边形,

$\therefore EF$ 过点 O, GH 过点 O,

$\therefore OE = OF$, $OG = OH$,

$\therefore \square GBCH$, $\square ABFE$, $\square EFCD$, $\square EGFH$, $\square ACHD$ 它们面积 $= \frac{1}{2} \square ABCDA$ 的面积,

$\therefore$ 与四边形 AGHD 面积相等的所有平行四边形有 $\square GBCH$, $\square ABFE$, $\square EFCD$, $\square EGFH$.

点评: 本题考查了平行四边形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 熟练掌握平行四边形的判定定理是解题的关键.

25. (10 分) (2015•哈尔滨) 华昌中学开学初在金利源商场购进 A、B 两种品牌的足球, 购买 A 品牌足球花费了 2500 元, 购买 B 品牌足球花费了 2000 元, 且购买 A 品牌足球数量是购买 B 品牌足球数量的 2 倍, 已知购买一个 B 品牌足球比购买一个 A 品牌足球多花 30 元.

(1) 求购买一个 A 品牌、一个 B 品牌的足球各需多少元?

(2) 华昌中学响应习总书记“足球进校园”的号召, 决定两次购进 A、B 两种品牌足球共 50 个, 恰逢金利源商场对两种品牌足球的售价进行调整, A 品牌足球售价比第一次购买时提高

了8%，B品牌足球按第一次购买时售价的9折出售，如果这所中学此次购买A、B两种品牌足球的总费用不超过3260元，那么华昌中学此次最多可购买多少个B品牌足球？

考点：分式方程的应用；一元一次不等式的应用.

分析：（1）设一个A品牌的足球需x元，则一个B品牌的足球需x+30元，根据购买A品牌足球数量是购买B品牌足球数量的2倍列出方程解答即可；

（2）设此次可购买a个B品牌足球，则购进A牌足球（50-a）个，根据购买A、B两种品牌足球的总费用不超过3260元，列出不等式解决问题.

解答：解：（1）设一个A品牌的足球需x元，则一个B品牌的足球需x+30元，由题意得

$$\frac{2500}{x} = \frac{2000}{x+30} \times 2$$

解得：x=50

经检验x=50是原方程的解，

$$x+30=80$$

答：一个A品牌的足球需50元，则一个B品牌的足球需80元.

（2）设此次可购买a个B品牌足球，则购进A牌足球（50-a）个，由题意得

$$50 \times (1+8\%) (50-a) + 80 \times 0.9a \leq 3260$$

$$\text{解得 } a \leq 31\frac{1}{9}$$

∵a是整数，

∴a最大等于31，

答：华昌中学此次最多可购买31个B品牌足球.

点评：此题考查二元一次方程组与分式方程的应用，找出题目蕴含的等量关系与不等关系是解决问题的关键.

26. (10分) (2015•哈尔滨) AB, CD是⊙O的两条弦，直线AB, CD互相垂直，垂足为点E，连接AD，过点B作BF⊥AD，垂足为点F，直线BF交直线CD于点G.

(1) 如图1，当点E在⊙O外时，连接BC，求证：BE平分∠GBC；

(2) 如图2，当点E在⊙O内时，连接AC，AG，求证：AC=AG；

(3) 如图3，在(2)条件下，连接BO并延长交AD于点H，若BH平分∠ABF，AG=4， $\tan \angle D = \frac{4}{3}$ ，求线段AH的长.

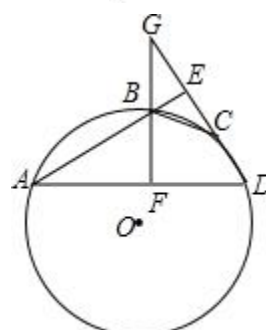


图1

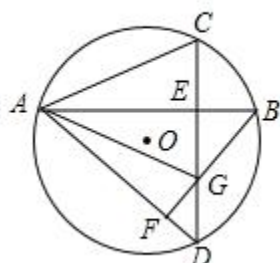


图2

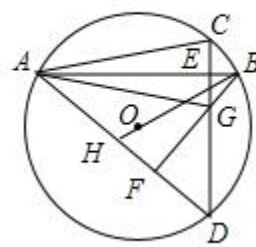


图3

考点：圆的综合题.

分析：（1）利用圆内接四边形的性质得出∠D=∠EBC，进而利用互余的关系得出

$\angle GBE = \angle EBC$, 进而求出即可;

(2) 首先得出 $\angle D = \angle ABG$, 进而利用全等三角形的判定与性质得出 $\triangle BCE \cong \triangle BGE$ (ASA), 则 $CE = EG$, 再利用等腰三角形的性质求出即可;

(3) 首先求出 CO 的长, 再求出 $\tan \angle ABH = \frac{NH}{NB} = \frac{3a}{6a} = \frac{1}{2}$, 利用 $OP^2 + PB^2 = OB^2$, 得出 a

的值进而求出答案.

解答: (1) 证明: 如图 1, $\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,

$$\therefore \angle D + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\because \angle ABC + \angle EBC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle EBC,$$

$$\because GF \perp AD, AE \perp DG,$$

$$\therefore \angle A + \angle ABF = 90^\circ, \angle A + \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle D,$$

$$\because \angle ABF = \angle GBE,$$

$$\therefore \angle GBE = \angle EBC,$$

即 BE 平分 $\angle GBC$;

(2) 证明: 如图 2, 连接 CB ,

$$\because AB \perp CD, BF \perp AD,$$

$$\therefore \angle D + \angle BAD = 90^\circ, \angle ABG + \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle ABG,$$

$$\because \angle D = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABG,$$

$$\because AB \perp CD,$$

$$\therefore \angle CEB = \angle GEB = 90^\circ,$$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BGE$ 中

$$\begin{cases} \angle ABC = \angle ABG \\ BE = BE \\ \angle BEC = \angle BEG \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle BGE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore CE = EG,$$

$$\because AE \perp CG,$$

$$\therefore AC = AG;$$

(3) 解: 如图 3, 连接 CO 并延长交 $\odot O$ 于 M , 连接 AM ,

$$\because CM \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore \angle MAC = 90^\circ,$$

$$\because \angle M = \angle D, \tan D = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \tan M = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{AC}{AM} = \frac{4}{3},$$

$$\because AG = 4, AC = AG,$$

$$\therefore AC=4, AM=3,$$

$$\therefore MC=\sqrt{AC^2+AM^2}=5,$$

$$\therefore CO=\frac{5}{2},$$

过点 H 作 $HN \perp AB$, 垂足为点 N,

$$\therefore \tan D = \frac{4}{3}, AE \perp DE,$$

$$\therefore \tan \angle BAD = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{NH}{AN} = \frac{3}{4},$$

设 $NH=3a$, 则 $AN=4a$,

$$\therefore AH=\sqrt{NH^2+AN^2}=5a,$$

$\therefore HB$ 平分 $\angle ABF$, $NH \perp AB$, $HF \perp BF$,

$$\therefore HF=NH=3a,$$

$$\therefore AF=8a,$$

$$\cos \angle BAF = \frac{AN}{AH} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore AB = \frac{AF}{\cos \angle BAF} = 10a,$$

$$\therefore NB=6a,$$

$$\therefore \tan \angle ABH = \frac{NH}{NB} = \frac{3a}{6a} = \frac{1}{2},$$

过点 O 作 $OP \perp AB$ 垂足为点 P,

$$\therefore PB = \frac{1}{2}AB = 5a, \tan \angle ABH = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OP = \frac{5}{2}a,$$

$$\therefore OB=OC=\frac{5}{2}, OP^2+PB^2=OB^2,$$

$$\therefore 25a^2 + \frac{25}{4}a^2 = \frac{25}{4},$$

$$\therefore \text{解得: } a = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AH=5a=\sqrt{5}.$$

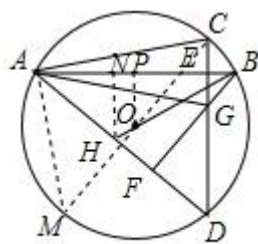


图3

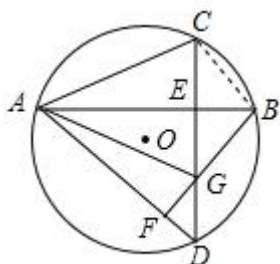


图2

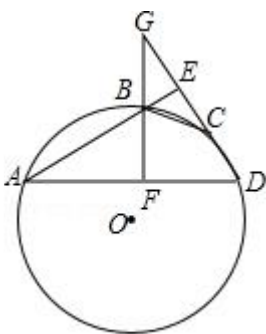


图1

点评: 此题主要考查了圆的综合以及勾股定理和锐角三角函数关系等、全等三角形的判定与性质知识，正确作出辅助线得出 $\tan \angle ABH = \frac{OF}{PB} = \frac{1}{2}$ 是解题关键.

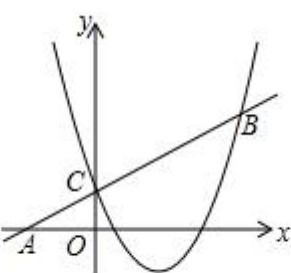
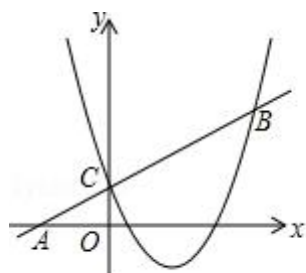
27. (10 分) (2015•哈尔滨) 如图，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，直线 $y=kx+1$ ($k \neq 0$) 与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于点 A，过点 C 的抛物线 $y=ax^2 - (6a-2)x+b$ ($a \neq 0$) 与直线 AC 交于另一点 B，点 B 坐标为 (4, 3).

(1) 求 a 的值；

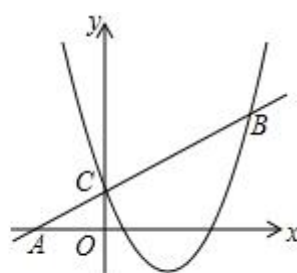
(2) 点 P 是射线 CB 上的一个动点，过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴，垂足为点 Q，在 x 轴上点 Q 的右侧取点 M，使 $MQ = \frac{5}{8}$ ，在 QP 的延长线上取点 N，连接 PM，AN，已知 $\tan \angle NAQ =$

$\tan \angle MPQ = \frac{1}{2}$ ，求线段 PN 的长；

(3) 在 (2) 的条件下，过点 C 作 $CD \perp AB$ ，使点 D 在直线 AB 下方，且 $CD=AC$ ，连接 PD，NC，当以 PN，PD，NC 的长为三边长构成的三角形面积是 $\frac{25}{8}$ 时，在 y 轴左侧的抛物线上是否存在点 E，连接 NE，PE，使得 $\triangle ENP$ 与以 PN，PD，NC 的长为三边长的三角形全等？若存在，求出 E 点坐标；若不存在，请说明理由.



备用图



备用图

考点: 二次函数综合题; 全等三角形的判定与性质; 勾股定理; 平行四边形的判定与性质; 锐角三角函数的定义.

专题: 综合题.

分析: (1) 易得点 C 的坐标为 (0, 1), 然后把点 B、点 C 的坐标代入抛物线的解析式, 即可解决问题;

(2) 把 B (4, 3) 代入 $y=kx+1$ 中, 即可得到 k 的值, 从而可求出点 A 的坐标, 就可求出 $\tan \angle CAO = \frac{1}{2}$ (即 $\tan \angle PAQ = \frac{1}{2}$), 设 $PQ=m$, 则 $QA=2m$, 根据条件 $\tan \angle NAQ - \tan \angle MPQ = \frac{1}{2}$, 即可求出 PN 的值;

(3) 由条件 $CD \perp AB$, $CD=AC$, 想到构造全等三角形, 过点 D 作 $DF \perp CO$ 于点 F, 易证 $\triangle ACO \cong \triangle CDF$, 从而可以求出 FD、CF、OF. 作 $PH \parallel CN$, 交 y 轴于点 H, 连接 DH, 易证四边形 CHPN 是平行四边形, 从而可得 $CN=HP$, $CH=PN$, 通过计算可得 $DH=PN$, 从而可得 $\triangle PHD$ 是以 PN、PD、NC 的长为三边长的三角形, 则有

$S_{\triangle PHD} = \frac{25}{8}$. 延长 FD、PQ 交于点 G, 易得 $\angle G=90^\circ$. 由点 P 在 $y=\frac{1}{2}x+1$ 上, 可设 P (t,

$\frac{1}{2}t+1$), 根据 $S_{\text{四边形 HFGP}} = S_{\triangle HFD} + S_{\triangle PHD} + S_{\triangle PDG}$, 可求出 t 的值, 从而得到点 P、N 的坐标及 $\tan \angle DPG$ 的值, 从而可得 $\tan \angle DPG = \tan \angle HDF$, 则有 $\angle DPG = \angle HDF$, 进而可证到 $\angle HDP = 90^\circ$. 若 $\triangle ENP$ 与 $\triangle PDH$ 全等, 已知 $PN=DH$, 可分以下两种情况

(① $\angle ENP = \angle PDH = 90^\circ$, $EN=PD$, ② $\angle NPE = \angle HDP = 90^\circ$, $BE=PD$) 进行讨论, 即可解决问题.

解答: 解: (1) 当 $x=0$ 时, 由 $y=kx+1$ 得 $y=1$, 则 C (0, 1).

$\because$ 抛物线 $y=ax^2 - (6a-2)x+b$ ($a \neq 0$) 经过 C (0, 1), B (4, 3),

$$\therefore \begin{cases} b=1 \\ 3=16a-4(6a-2)+b \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=1 \end{cases}$$

$$\therefore a=\frac{3}{4};$$

(2) 把 B (4, 3) 代入 $y=kx+1$ 中, 得

$$3=4k+1, \text{ 解得: } k=\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+1$.

$$\text{由 } y=0 \text{ 得 } 0=\frac{1}{2}x+1,$$

$$\text{解得: } x=-2,$$

$$\therefore A(-2, 0), OA=2,$$

$$\because C(0, 1),$$

$$\therefore OC=1,$$

$$\therefore \tan \angle CAO = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}.$$

$\because PQ \perp x$ 轴,

$$\therefore \tan \angle PAQ = \frac{PQ}{QA} = \frac{1}{2},$$

设 $PQ=m$, 则 $QA=2m$,

$$\therefore \tan \angle NAQ - \tan \angle MPQ = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{NQ}{QA} - \frac{MQ}{PQ} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore MQ = \frac{5}{8},$$

$$\therefore \frac{PN+m}{2m} - \frac{\frac{5}{8}}{\pi} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore PN = \frac{5}{4};$$

(3) 在 y 轴左侧抛物线上存在 E , 使得 $\triangle ENP$ 与以 PN , PD , NC 的长为三边长的三角形全等.

过点 D 作 $DF \perp CO$ 于点 F , 如图 2,

$\because DF \perp CF$, $CD \perp AB$,

$\therefore \angle CDF + \angle DCF = 90^\circ$, $\angle DCF + \angle ACO = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDF = \angle ACO$,

$\because CO \perp x$ 轴, $DF \perp CO$,

$\therefore \angle AOC = \angle CFD = 90^\circ$,

在 $\triangle ACO$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACO = \angle CDF \\ \angle AOC = \angle CFD, \\ CA = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACO \cong \triangle CDF$ (AAS),

$\therefore CF = AO = 2$, $DF = CO = 1$,

$\therefore OF = CF - CO = 1$,

作 $PH \parallel CN$, 交 y 轴于点 H , 连接 DH ,

$\because CH \parallel PN$,

$\therefore$ 四边形 $CHPN$ 是平行四边形,

$$\therefore CN = HP, CH = PN = \frac{5}{4},$$

$$\therefore HF = CF - CH = \frac{3}{4}, DH = \sqrt{DF^2 + HF^2} = \frac{5}{4},$$

$\therefore DH = PN$.

$\therefore \triangle PHD$ 是以 PN , PD , NC 的长为三边长的三角形,

$$\therefore S_{\triangle PHD} = \frac{25}{8}.$$

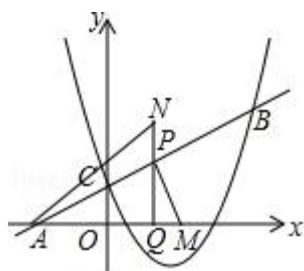


图1

点评: 本题主要考查了运用待定系数法求直线及二次函数的解析式、全等三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、三角函数的定义、抛物线上点的坐标特征、勾股定理等知识，通过平移 CN ，将 PN 、 PD 、 NC 归结到 $\triangle PHD$ 中，是解决本题的关键。在解决问题的过程中，用到了分类讨论、平移变换、割补法、运算推理等重要的数学思想方法，应学会使用。