

2014 年黑龙江省哈尔滨市中考数学试卷

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

1. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 哈市某天的最高气温为 28°C , 最低气温为 21°C , 则这一天的最高气温与最低气温的差为 ()

- A. 5°C B. 6°C C. 7°C D. 8°C

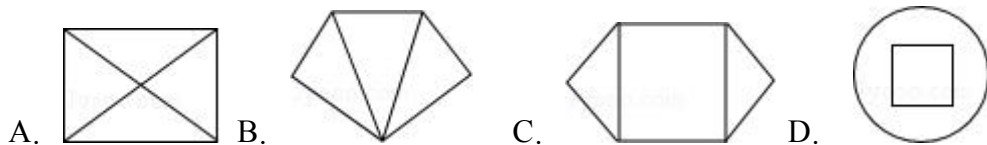
2. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 用科学记数法表示 927 000 正确的是 ()

- A. 9.27×10^6 B. 9.27×10^5 C. 9.27×10^4 D. 927×10^3

3. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 下列计算正确的是 ()

- A. $3a - 2a = 1$ B. $a^2 + a^5 = a^7$ C. $a^2 \cdot a^4 = a^6$ D. $(ab)^3 = ab^3$

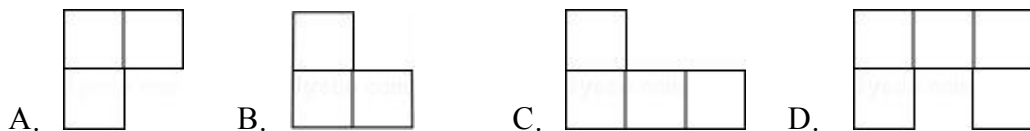
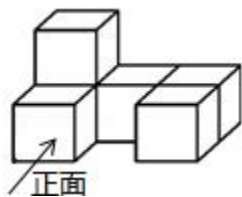
4. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 下列图形中, 不是中心对称图形的是 ()



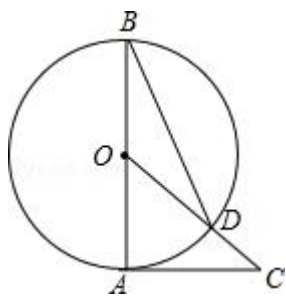
5. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 在反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象的每一条曲线上, y 都随 x 的增大而减小, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k > 1$ B. $k > 0$ C. $k \geq 1$ D. $k < 1$

6. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 如图的几何体是由一些小正方形组合而成的, 则这个几何体的俯视图是 ()



7. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, 连接 OC 交 $\odot O$ 于点 D , 连接 BD , $\angle C = 40^{\circ}$. 则 $\angle ABD$ 的度数是 ()

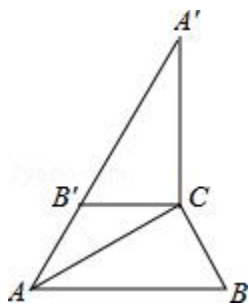


- A. 30° B. 25° C. 20° D. 15°

8. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)将抛物线 $y = -2x^2 + 1$ 向右平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位后所得到的抛物线为 ()

- A. $y = -2(x+1)^2 - 1$ B. $y = -2(x+1)^2 + 3$
C. $y = -2(x-1)^2 + 1$ D. $y = -2(x-1)^2 + 3$

9. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 2$, $\triangle A'B'C$ 可以由 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到, 其中点 A' 与点 A 是对应点, 点 B' 与点 B 是对应点, 连接 AB', 且 A、B'、A' 在同一条直线上, 则 AA' 的长为 ()



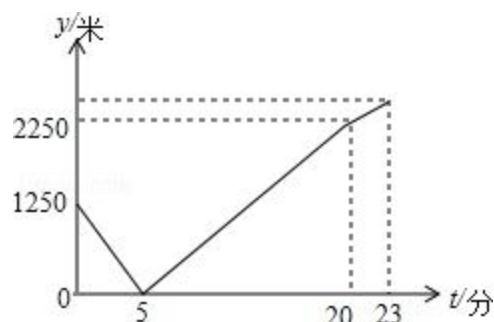
- A. 6 B. $4\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. 3

10. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)早晨, 小刚沿着通往学校唯一的一条路 (直路) 上学, 途中发现忘带饭盒, 停下往家里打电话, 妈妈接到电话后带上饭盒马上赶往学校, 同时小刚返回, 两人相遇后, 小刚立即赶往学校, 妈妈回家, 15 分钟妈妈到家, 再经过 3 分钟小刚到达学校, 小刚始终以 100 米/分的速度步行, 小刚和妈妈的距离 y (单位: 米) 与小刚打完电话后的步行时间 t (单位: 分) 之间的函数关系如图, 下列四种说法:

- ①打电话时, 小刚和妈妈的距离为 1250 米;
②打完电话后, 经过 23 分钟小刚到达学校;

③小刚和妈妈相遇后，妈妈回家的速度为 150 米/分；

④小刚家与学校的距离为 2550 米．其中正确的个数是（ ）



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

二、填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共计 30 分）

11. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)计算: $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)在函数 $y = \frac{3x}{2x+4}$ 中，自变量 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

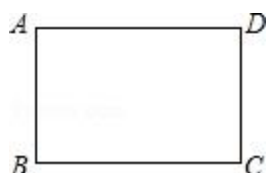
13. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)把多项式 $3m^2 - 6mn + 3n^2$ 分解因式的结果是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)不等式组 $\begin{cases} 2x+1 \leq 3 \\ x+2 > 1 \end{cases}$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)若 $x = -1$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m + 1 = 0$ 的一个解，则 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

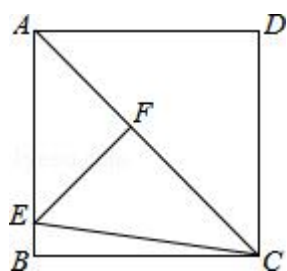
16. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)在一个不透明的口袋中，有四个完全相同的小球，把它们分别标号为 1、2、3、4，随机地摸取一个小球记下标号后放回，再随机地摸取一个小球记下标号，则两次摸取的小球标号都是 1 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图，在矩形 ABCD 中， $AB=4$ ， $BC=6$ ，若点 P 在 AD 边上，连接 BP、PC， $\triangle BPC$ 是以 PB 为腰的等腰三角形，则 PB 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

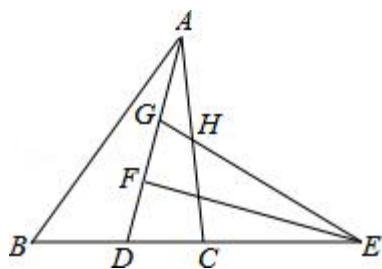


18. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)一个底面直径为 10cm, 母线长为 15cm 的圆锥, 它的侧面展开图圆心角是_____度.

19. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, 在正方形 ABCD 中, AC 为对角线, 点 E 在 AB 边上, EF ⊥ AC 于点 F, 连接 EC, AF=3, △EFC 的周长为 12, 则 EC 的长为_____.



20. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, 在△ABC 中, 4AB=5AC, AD 为△ABC 的角平分线, 点 E 在 BC 的延长线上, EF ⊥ AD 于点 F, 点 G 在 AF 上, FG=FD, 连接 EG 交 AC 于点 H. 若点 H 是 AC 的中点, 则 $\frac{AG}{FD}$ 的值为_____.



三、解答题 (共 8 小题, 其中 21-24 题各 6 分, 25-26 题各 8 分, 27-28 题各 10 分, 共计 10 分)

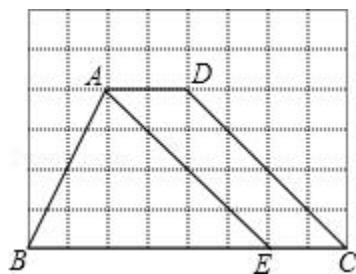
21. (6 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)先化简, 再求代数式 $\frac{3x+2y}{x^2-y^2} - \frac{2x+y}{x^2-y^2}$ 的值,

其中 $x=2\cos 45^\circ+2$, $y=2$.

22. (6 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, 方格纸中每个小正方形的边长均为 1, 四边形 ABCD 的四个顶点都在小正方形的顶点上, 点 E 在 BC 边上, 且点 E 在小正方形的顶点上, 连接 AE.

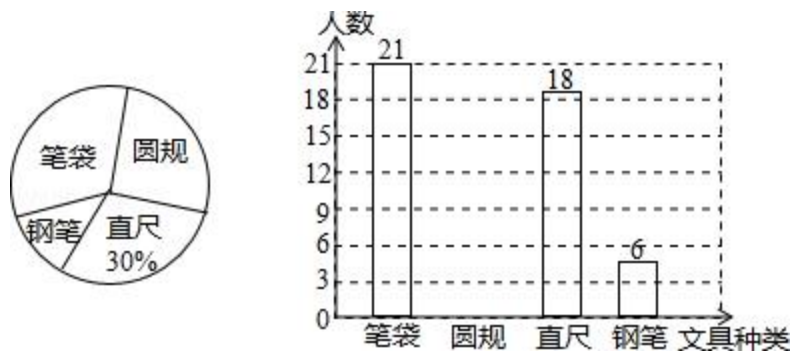
(1) 在图中画出 $\triangle AEF$, 使 $\triangle AEF$ 与 $\triangle AEB$ 关于直线 AE 对称, 点 F 与点 B 是对称点;

(2) 请直接写出 $\triangle AEF$ 与四边形 ABCD 重叠部分的面积.



23. (6 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)君畅中学计划购买一些文具送给学生, 为此学校决定围绕“在笔袋、圆规、直尺、钢笔四种文具中, 你最需要的文具是什么?

(必选且只选一种)”的问题, 在全校满园内随机抽取部分学生进行问卷调查, 将调查结果整理后绘制成如图所示的不完整的统计图, 请你根据以上信息回答下



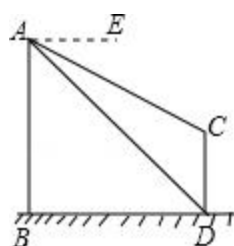
列问题:

(1) 在这次调查中, 最需要圆规的学生有多少名? 并补全条形统计图;

(2) 如果全校有 970 名学生, 请你估计全校学生中最需要钢笔的学生有多少名?

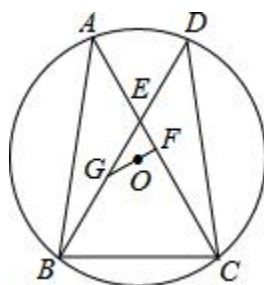
24. (6 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, AB、CD 为两个建筑物, 建筑物 AB 的高度为 60 米, 从建筑物 AB 的顶点 A 点测得建筑物 CD 的顶点 C 点的俯角 $\angle EAC$ 为 30° , 测得建筑物 CD 的底部 D 点的俯角 $\angle EAD$ 为 45° .

- (1) 求两建筑物底部之间水平距离 BD 的长度;
- (2) 求建筑物 CD 的高度 (结果保留根号).



25. (8 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 弦 BD 交 AC 于点 E, 连接 CD, 且 $AE=DE$, $BC=CE$.

- (1) 求 $\angle ACB$ 的度数;
- (2) 过点 O 作 $OF \perp AC$ 于点 F, 延长 FO 交 BE 于点 G, $DE=3$, $EG=2$, 求 AB 的长.



26. (8 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)荣庆公司计划从商店购买同一品牌的台灯和手电筒, 已知购买一个台灯比购买一个手电筒多用 20 元, 若用 400 元购买台灯和用 160 元购买手电筒, 则购买台灯的个数是购买手电筒个数的一半.

(1) 求购买该品牌一个台灯、一个手电筒各需要多少元?

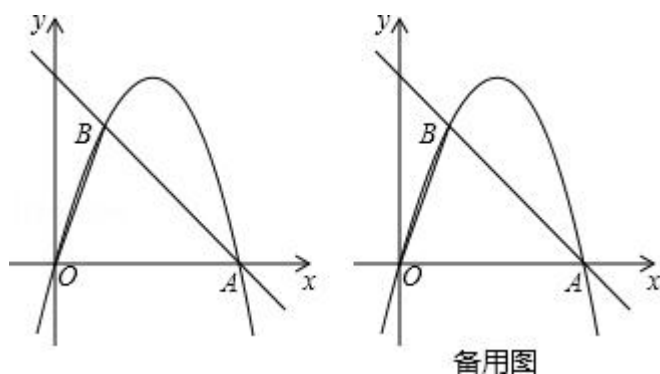
(2) 经商谈, 商店给予荣庆公司购买一个该品牌台灯赠送一个该品牌手电筒的优惠, 如果荣庆公司需要手电筒的个数是台灯个数的 2 倍还多 8 个, 且该公司购买台灯和手电筒的总费用不超过 670 元, 那么荣庆公司最多可购买多少个该品牌台灯?

27. (10 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, 在平面直角坐标中, 点 O 为坐标原点, 直线 $y = -x + 4$ 与 x 轴交于点 A, 过点 A 的抛物线 $y = ax^2 + bx$ 与直线 $y = -x + 4$ 交于另一点 B, 且点 B 的横坐标为 1.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 点 P 是线段 AB 上一动点 (点 P 不与点 A、B 重合), 过点 P 作 $PM \parallel OB$ 交第一象限内的抛物线于点 M, 过点 M 作 $MC \perp x$ 轴于点 C, 交 AB 于点 N, 过点 P 作 $PF \perp MC$ 于点 F, 设 PF 的长为 t, MN 的长为 d, 求 d 与 t 之间的函数关系式 (不要求写出自变量 t 的取值范围);

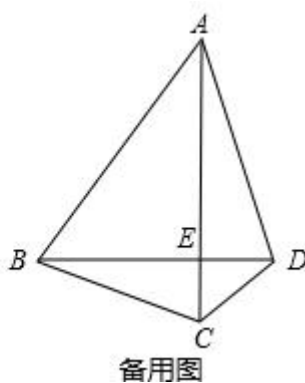
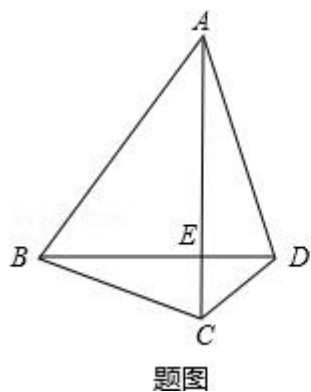
(3) 在 (2) 的条件下, 当 $S_{\triangle ACN} = S_{\triangle PMN}$ 时, 连接 ON, 点 Q 在线段 BP 上, 过点 Q 作 $QR \parallel MN$ 交 ON 于点 R, 连接 MQ、BR, 当 $\angle MQR - \angle BRN = 45^\circ$ 时, 求点 R 的坐标.



28. (10 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 E ，且 $AC \perp BD$ ， $\angle ADB = \angle CAD + \angle ABD$ ， $\angle BAD = 3\angle CBD$.

(1) 求证： $\triangle ABC$ 为等腰三角形；

(2) M 是线段 BD 上一点， $BM:AB=3:4$ ，点 F 在 BA 的延长线上，连接 FM ， $\angle BFM$ 的平分线 FN 交 BD 于点 N ，交 AD 于点 G ，点 H 为 BF 中点，连接 MH ，当 $GN=GD$ 时，探究线段 CD 、 FM 、 MH 之间的数量关系，并证明你的结论.



2014 年黑龙江省哈尔滨市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

1. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 哈市某天的最高气温为 28°C , 最低气温为 21°C , 则这一天的最高气温与最低气温的差为 ()

- A. 5°C B. 6°C C. 7°C D. 8°C

【分析】根据有理数的减法, 减去一个数等于加上这个数的相反数, 可得答案.

【解答】解: $28 - 21 = 28 + (-21) = 7$,

故选: C.

【点评】本题考查了有理数的减法, 减去一个数等于加上这个数的相反数.

2. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 用科学记数法表示 927 000 正确的是 ()

- A. 9.27×10^6 B. 9.27×10^5 C. 9.27×10^4 D. 927×10^3

【考点】科学记数法—表示较大的数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值是易错点, 由于 927 000 有 6 位, 所以可以确定 $n = 6 - 1 = 5$.

【解答】解: $927\,000 = 9.27 \times 10^5$.

故选 B.

【点评】此题考查科学记数法表示较大的数的方法, 准确确定 a 与 n 值是关键.

3. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 下列计算正确的是 ()

- A. $3a - 2a = 1$ B. $a^2 + a^5 = a^7$ C. $a^2 \cdot a^4 = a^6$ D. $(ab)^3 = ab^3$

【考点】幂的乘方与积的乘方; 合并同类项; 同底数幂的乘法.

【分析】根据合并同类项，可判断 A、B，根据同底数幂的乘法，可判断 C，根据积的乘方，可判断 D.

【解答】解：A、系数相加字母部分不变，故 A 错误；

B、不是同底数幂的乘法，指数不能相加，故 B 错误；

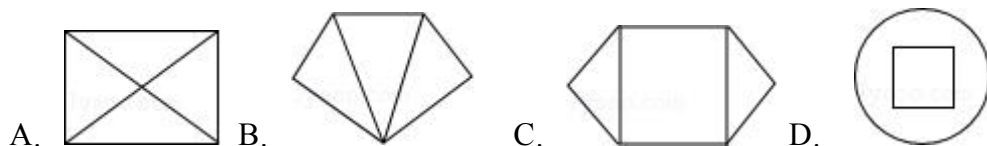
C、底数不变指数相加，故 C 正确；

D、积的乘方等于每个因式分别乘方，再把所得的幂相乘；故 D 错误；

故选：C.

【点评】本题考查了积的乘方，积的乘方等于每个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

4. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)下列图形中，不是中心对称图形的是 ()



【考点】中心对称图形.

【分析】根据中心对称图形的概念求解.

【解答】解：A、是中心对称图形，故本选项错误；

B、不是中心对称图形，故本选项正确；

C、是中心对称图形，故本选项错误；

D、是中心对称图形，故本选项错误；

故选 B.

【点评】本题考查了中心对称的知识，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

5. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)在反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象的每一条曲线上， y 都随 x 的增大而减小，则 k 的取值范围是 ()

A. $k > 1$

B. $k > 0$

C. $k \geq 1$

D. $k < 1$

【考点】反比例函数的性质.

【分析】根据反比例函数的性质, 当反比例函数的系数大于 0 时, 在每一支曲线上, y 都随 x 的增大而减小, 可得 $k - 1 > 0$, 解可得 k 的取值范围.

【解答】解: 根据题意, 在反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 图象的每一支曲线上, y 都随 x 的增大而减小,

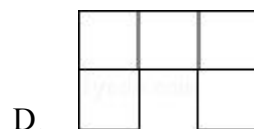
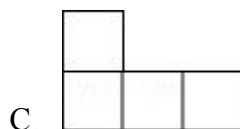
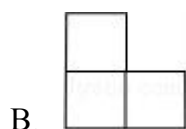
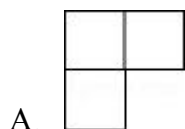
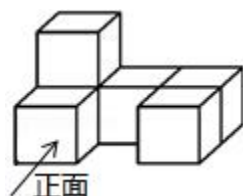
即可得 $k - 1 > 0$,

解得 $k > 1$.

故选 A.

【点评】本题考查了反比例函数的性质: ①当 $k > 0$ 时, 图象分别位于第一、三象限; 当 $k < 0$ 时, 图象分别位于第二、四象限. ②当 $k > 0$ 时, 在同一个象限内, y 随 x 的增大而减小; 当 $k < 0$ 时, 在同一个象限, y 随 x 的增大而增大.

6. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图的几何体是由一些小正方形组合而成的, 则这个几何体的俯视图是 ()



【考点】简单组合体的三视图.

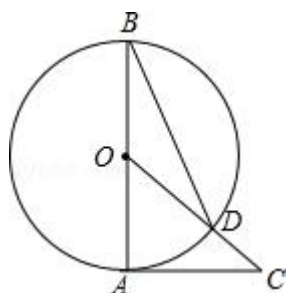
【分析】找到从上面看所得到的图形即可, 注意所有的看到的棱都应表现在俯视图中.

【解答】解: 从几何体的上面看共有 3 列小正方形, 右边有 2 个, 左边有 2 个, 中间上面有 1 个,

故选: D.

【点评】本题考查了三视图的知识, 俯视图是从物体的上面看得到的视图.

7. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, 连接 OC 交 $\odot O$ 于点 D, 连接 BD, $\angle C=40^\circ$. 则 $\angle ABD$ 的度数是 ()



- A. 30° B. 25° C. 20° D. 15°

【考点】切线的性质.

【分析】根据切线的性质求出 $\angle OAC$, 求出 $\angle AOC$, 根据等腰三角形性质求出 $\angle B=\angle BDO$, 根据三角形外角性质求出即可.

【解答】解: $\because AC$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle OAC=90^\circ,$$

$$\because \angle C=40^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC=50^\circ,$$

$$\because OB=OD,$$

$$\therefore \angle ABD=\angle BDO,$$

$$\because \angle ABD+\angle BDO=\angle AOC,$$

$$\therefore \angle ABD=25^\circ,$$

故选 B.

【点评】本题考查了切线的性质, 三角形外角性质, 三角形内角和定理, 等腰三角形性质的应用, 解此题的关键是求出 $\angle AOC$ 的度数, 题目比较好, 难度适中.

8. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)将抛物线 $y = -2x^2 + 1$ 向右平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位后所得到的抛物线为 ()

A. $y = -2(x+1)^2 - 1$

B. $y = -2(x+1)^2 + 3$

C. $y = -2(x-1)^2 + 1$

D. $y = -2(x-1)^2 + 3$

【考点】二次函数图象与几何变换.

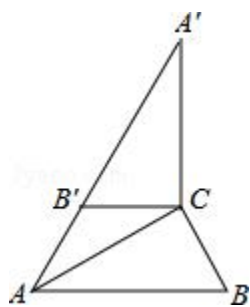
【分析】根据图象右移减, 上移加, 可得答案.

【解答】解: 将抛物线 $y = -2x^2 + 1$ 向右平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位后所得到的抛物线为 $y = -2(x-1)^2 + 3$,

故选: D.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换, 函数图象平移的规律是: 左加右减, 上加下减.

9. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 2$, $\triangle A'B'C$ 可以由 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到, 其中点 A' 与点 A 是对应点, 点 B' 与点 B 是对应点, 连接 AB' , 且 A 、 B' 、 A' 在同一条直线上, 则 AA' 的长为 ()



A. 6

B. $4\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$

D. 3

【考点】旋转的性质.

【分析】利用直角三角形的性质得出 $AB = 4$, 再利用旋转的性质以及三角形外角的性质得出 $AB' = 2$, 进而得出答案.

【解答】解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 2$,

$\therefore \angle CAB=30^\circ$, 故 $AB=4$,

$\because \triangle A'B'C$ 可以由 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到, 其中点 A' 与点 A 是对应点, 点 B' 与点 B 是对应点, 连接 AB' , 且 A 、 B' 、 A' 在同一条直线上,

$\therefore AB=A'B'=4$, $AC=A'C$,

$\therefore \angle CAA'=\angle A'=30^\circ$,

$\therefore \angle ACB'=\angle B'AC=30^\circ$,

$\therefore AB'=B'C=2$,

$\therefore AA'=2+4=6$.

故选: A.

【点评】 此题主要考查了旋转的性质以及直角三角形的性质等知识, 得出 $AB'=B'C=2$ 是解题关键.

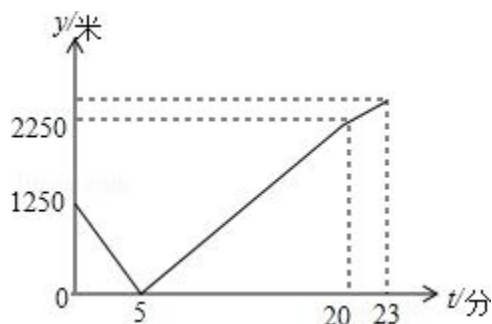
10. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 早晨, 小刚沿着通往学校唯一的一条路 (直路) 上学, 途中发现忘带饭盒, 停下往家里打电话, 妈妈接到电话后带上饭盒马上赶往学校, 同时小刚返回, 两人相遇后, 小刚立即赶往学校, 妈妈回家, 15 分钟妈妈到家, 再经过 3 分钟小刚到达学校, 小刚始终以 100 米/分的速度步行, 小刚和妈妈的距离 y (单位: 米) 与小刚打完电话后的步行时间 t (单位: 分) 之间的函数关系如图, 下列四种说法:

①打电话时, 小刚和妈妈的距离为 1250 米;

②打完电话后, 经过 23 分钟小刚到达学校;

③小刚和妈妈相遇后, 妈妈回家的速度为 150 米/分;

④小刚家与学校的距离为 2550 米. 其中正确的个数是 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【考点】一次函数的应用.

【分析】根据函数的图象和已知条件分别分析探讨其正确性, 进一步判定得出答案即可.

【解答】解: ①由图可知打电话时, 小刚和妈妈的距离为 1250 米是正确的;

②因为打完电话后 5 分钟两人相遇后, 小刚立即赶往学校, 妈妈回家, 15 分钟妈妈到家, 再经过 3 分钟小刚到达学校, 经过 $5+15+3=23$ 分钟小刚到达学校, 所以是正确的;

③打完电话后 5 分钟两人相遇后, 妈妈的速度是 $1250 \div 5 = 250$ 米/分, 走的路程为 $250 \times 5 = 1250$ 米, 回家的速度是 $1250 \div 15 = 83\frac{1}{3}$ 米/分, 所以回家的速度为 150 米/分是错误的;

④小刚家与学校的距离为 $1250 + (15+3) \times 100 = 2550$ 米, 所以是正确的.

正确的答案有①②④.

故选: C.

【点评】此题考查了函数的图象的实际意义, 结合题意正确理解函数图象, 利用基本行程问题解决问题.

二、填空题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 共计 30 分)

11. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 计算: $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \underline{\sqrt{3}}$.

【考点】二次根式的加减法.

【分析】先化简 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ，再合并同类二次根式即可.

【解答】解： $\sqrt{12}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

故应填： $\sqrt{3}$.

【点评】本题主要考查了二次根式的加减，属于基础题型.

12. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)在函数 $y=\frac{3x}{2x+4}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 $x \neq -2$.

【考点】函数自变量的取值范围.

【分析】根据分母不等于 0 列式计算即可得解.

【解答】解：由题意得， $2x+4 \neq 0$,

解得 $x \neq -2$.

故答案为： $x \neq -2$.

【点评】本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：

- (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；
- (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；
- (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

13. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)把多项式 $3m^2-6mn+3n^2$ 分解因式的结果是 $3(m-n)^2$.

【考点】提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】首先提取公因式 3，再利用完全平方公式进行二次分解.

【解答】解： $3m^2-6mn+3n^2=3(m^2-2mn+n^2)=3(m-n)^2$.

故答案为： $3(m-n)^2$.

【点评】本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解，一个多项式有公因式首先提取公因式，然后再用其他方法进行因式分解，同时因式分解要彻底，直到不能分解为止.

14. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)不等式组 $\begin{cases} 2x+1 \leq 3 \\ x+2 > 1 \end{cases}$ 的解集是 $-1 < x \leq 1$.

【考点】解一元一次不等式组.

【分析】分别求出各不等式的解集,再求出其公共解集即可.

【解答】解: $\begin{cases} 2x+1 \leq 3 \text{ ①} \\ x+2 > 1 \text{ ②} \end{cases}$, 由①得, $x \leq 1$, 由②得, $x > -1$,

故此不等式组的解集为: $-1 < x \leq 1$.

故答案为: $-1 < x \leq 1$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组,熟知“同大取大;同小取小;大小小大中间找;大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

15. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)若 $x = -1$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m + 1 = 0$ 的一个解,则 m 的值为 1 .

【考点】一元二次方程的解.

专题: 计算题.

【分析】根据 $x = -1$ 是已知方程的解,将 $x = -1$ 代入方程即可求出 m 的值.

【解答】解: 将 $x = -1$ 代入方程得: $1 - 3 + m + 1 = 0$,

解得: $m = 1$.

故答案为: 1

【点评】此题考查了一元二次方程的解,方程的解即为能使方程左右两边相等的未知数的值.

16. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)在一个不透明的口袋中,有四个完全相同的小球,把它们分别标号为 1、2、3、4,随机地摸取一个小球记下标号后放回,再随机地摸取一个小球记下标号,则两次摸取的小球标号都是 1 的概率为 $\frac{1}{16}$.

【考点】列表法与树状图法.

专题： 计算题.

【分析】列表得出所有等可能的情况数，找出两次摸取的小球标号都是 1 的情况数，即可求出所求的概率.

【解答】解：列表如下：

	1	2	3	4
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)

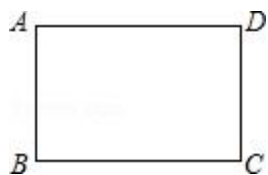
所有等可能的情况有 16 种，其中两次摸取的小球标号都是 1 的情况有 1 种，

则 $P = \frac{1}{16}$.

故答案为： $\frac{1}{16}$

【点评】此题考查了列表法与树状图法，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

17. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图，在矩形 ABCD 中，AB=4，BC=6，若点 P 在 AD 边上，连接 BP、PC，△BPC 是以 PB 为腰的等腰三角形，则 PB 的长为 5 或 6.



【考点】矩形的性质；等腰三角形的判定；勾股定理.

专题： 分类讨论.

【分析】需要分类讨论：PB=PC 和 PB=BC 两种情况.

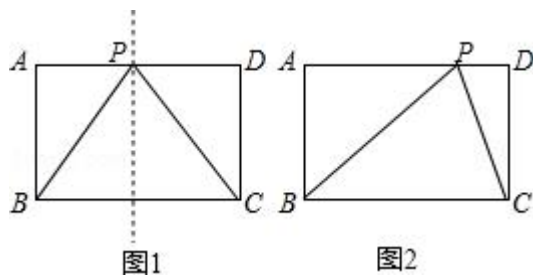
【解答】解：如图，在矩形 ABCD 中，AB=CD=4，BC=AD=6.

如图 1, 当 $PB=PC$ 时, 点 P 是 BC 的中垂线与 AD 的交点, 则 $AP=DP=\frac{1}{2}AD=3$.

在 $Rt\triangle ABP$ 中, 由勾股定理得 $PB=\sqrt{AP^2+AB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$;

如图 2, 当 $BP=BC=6$ 时, $\triangle BPC$ 也是以 PB 为腰的等腰三角形.

综上所述, PB 的长度是 5 或 6.



【点评】 本题考查了矩形的性质、等腰三角形的判定和勾股定理. 解题时, 要分类讨论, 以防漏解.

18. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 一个底面直径为 10cm, 母线长为 15cm 的圆锥, 它的侧面展开图圆心角是 120 度.

【考点】 圆锥的计算.

【分析】 利用底面周长=展开图的弧长可得.

【解答】 解: $\because$ 底面直径为 10cm,

$\therefore$ 底面周长为 10π ,

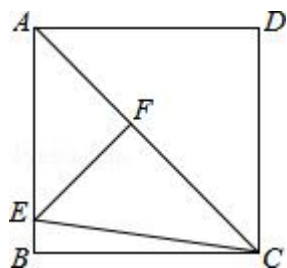
根据题意得 $10\pi=\frac{15n\pi}{180}$,

解得 $n=120$.

故答案为 120.

【点评】 考查了圆锥的计算, 解答本题的关键是有确定底面周长=展开图的弧长这个等量关系, 然后由扇形的弧长公式和圆的周长公式求值.

19. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, 在正方形 ABCD 中, AC 为对角线, 点 E 在 AB 边上, $EF \perp AC$ 于点 F, 连接 EC, $AF=3$, $\triangle EFC$ 的周长为 12, 则 EC 的长为 5.



【考点】 正方形的性质; 勾股定理; 等腰直角三角形.

【分析】 由四边形 ABCD 是正方形, AC 为对角线, 得出 $\angle AFE=45^\circ$, 又因为 $EF \perp AC$, 得到 $\angle AFE=90^\circ$ 得出 $EF=AF=3$, 由 $\triangle EFC$ 的周长为 12, 得出线段 $FC=12-3-EC=9-EC$, 在 $RT\triangle EFC$ 中, 运用勾股定理 $EC^2=EF^2+FC^2$, 求出 $EC=5$.

【解答】 解: $\because$ 四边形 ABCD 是正方形, AC 为对角线,

$$\therefore \angle AFE=45^\circ,$$

又 $\because EF \perp AC$,

$$\therefore \angle AFE=90^\circ, \quad \angle AEF=45^\circ,$$

$$\therefore EF=AF=3,$$

$\because \triangle EFC$ 的周长为 12,

$$\therefore FC=12-3-EC=9-EC,$$

在 $RT\triangle EFC$ 中, $EC^2=EF^2+FC^2$,

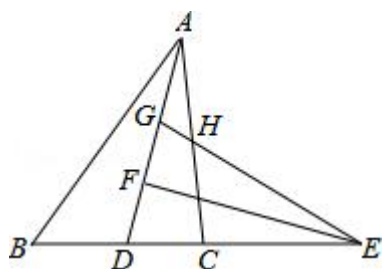
$$\therefore EC^2=9+(9-EC)^2,$$

解得 $EC=5$.

故答案为: 5.

【点评】 本题主要考查了正方形的性质及等腰直角三角形，解题的关键是找出线段的关系．运用勾股定理列出方程．

20. (3 分) (2014 年黑龙江哈尔滨) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $4AB=5AC$ ， AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 E 在 BC 的延长线上， $EF \perp AD$ 于点 F ，点 G 在 AF 上， $FG=FD$ ，连接 EG 交 AC 于点 H ．若点 H 是 AC 的中点，则 $\frac{AG}{FD}$ 的值为 $-\frac{4}{3}$ ．



【考点】 相似三角形的判定与性质；全等三角形的判定与性质；角平分线的性质；等腰三角形的判定与性质；平行四边形的判定与性质．

【分析】 解题关键是作出辅助线，如解答图所示：

第 1 步：利用角平分线的性质，得到 $BD = \frac{5}{4}CD$ ；

第 2 步：延长 AC ，构造一对全等三角形 $\triangle ABD \cong \triangle AMD$ ；

第 3 步：过点 M 作 $MN \parallel AD$ ，构造平行四边形 $DMNG$ ．由 $MD = BD = KD = \frac{5}{4}CD$ ，得到等腰 $\triangle DMK$ ；然后利用角之间关系证明 $DM \parallel GN$ ，从而推出四边形 $DMNG$ 为平行四边形；

第 4 步：由 $MN \parallel AD$ ，列出比例式，求出 $\frac{AG}{FD}$ 的值．

【解答】 解：已知 AD 为角平分线，则点 D 到 AB 、 AC 的距离相等，设为 h ．

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot h}{\frac{1}{2}AC \cdot h} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{4}, \therefore BD = \frac{5}{4}CD.$$

如右图，延长 AC ，在 AC 的延长线上截取 $AM=AB$ ，则有 $AC=4CM$ ．连接 DM ．

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AMD$ 中，

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AMD \text{ (SAS),}$$

过点 M 作 $MN \parallel AD$, 交 EG 于点 N, 交 DE 于点 K.

$\therefore MD=KD$, 即 $\triangle DMK$ 为等腰三角形,

由题意, 易知 $\triangle EDG$ 为等腰三角形, 且 $\angle 1 = \angle 2$;

又 $\because \angle DKM = \angle 3$ (对顶角)

$$\therefore \text{DM} \parallel \text{GN},$$

$$\therefore MN=DG=2FD.$$

$$\therefore MN \parallel AD,$$

$$\therefore \frac{AG}{FD} = \frac{4}{3}$$

【点评】 本题是几何综合题，难度较大，正确作出辅助线是解题关键．在解题过程中，需要综合利用各种几何知识，例如相似、全等、平行四边形、等腰三角形、角平分线性质的等，对考生能力要求较高．

三、解答题（共 8 小题，其中 21-24 题各 6 分，25-26 题各 8 分，27-28 题各 10 分，共计 10 分）

21. (6 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)先化简，再求代数式 $\frac{3x+2y}{x^2-y^2} - \frac{2x+y}{x^2-y^2}$ 的值，

其中 $x=2\cos 45^\circ+2$ ， $y=2$ ．

【考点】 分式的化简求值；特殊角的三角函数值．

专题： 计算题．

【分析】 原式利用同分母分式的减法法则计算，约分得到最简结果，将 x 与 y 的值代入计算即可求出值．

【解答】 解：原式 $= \frac{3x+2y-2x-y}{(x+y)(x-y)} = \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} = \frac{1}{x-y}$ ，

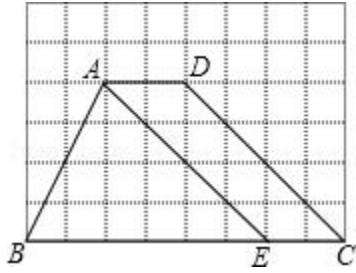
当 $x=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2=\sqrt{2}+2$ ， $y=2$ 时，原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ．

【点评】 此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

22. (6 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图，方格纸中每个小正方形的边长均为 1，四边形 ABCD 的四个顶点都在小正方形的顶点上，点 E 在 BC 边上，且点 E 在小正方形的顶点上，连接 AE．

(1) 在图中画出 $\triangle AEF$ ，使 $\triangle AEF$ 与 $\triangle AEB$ 关于直线 AE 对称，点 F 与点 B 是对称点；

(2) 请直接写出 $\triangle AEF$ 与四边形 ABCD 重叠部分的面积．



【考点】 作图-轴对称变换.

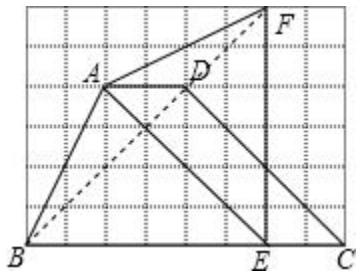
专题： 作图题.

【分析】 (1) 根据 AE 为网格正方形的对角线，作出点 B 关于 AE 的对称点 F，然后连接 AF、EF 即可；

(2) 根据图象，重叠部分为两个直角三角形的面积的差，列式计算即可得解.

【解答】 解： (1) $\triangle AEF$ 如图所示；

$$\begin{aligned} (2) \text{ 重叠部分的面积} &= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \\ &= 8 - 2 \\ &= 6. \end{aligned}$$

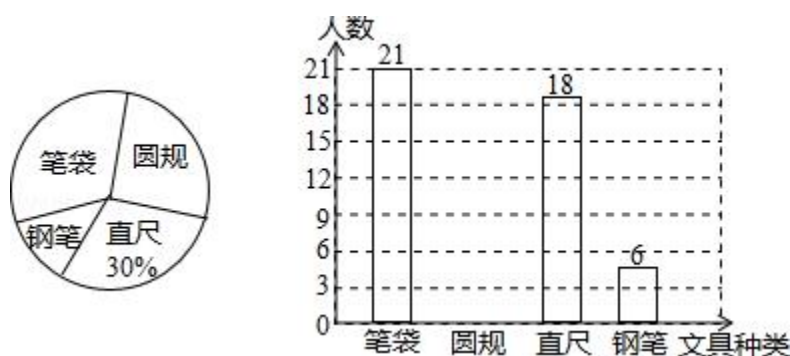


【点评】 本题考查了利用轴对称变换作图，熟练掌握网格结构并观察出 AE 为网格正方形的对角线是解题的关键.

23. (6 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)君畅中学计划购买一些文具送给学生，为此学校决定围绕“在笔袋、圆规、直尺、钢笔四种文具中，你最需要的文具是什么？

(必选且只选一种)”的问题，在全校满园内随机抽取部分学生进行问卷调查，

将调查结果整理后绘制成如图所示的不完整的统计图，请你根据以上信息回答下



列问题：

- (1) 在这次调查中，最需要圆规的学生有多少名？并补全条形统计图；
- (2) 如果全校有 970 名学生，请你估计全校学生中最需要钢笔的学生有多少名？

【考点】 条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

专题： 计算题.

【分析】 (1) 由最需要直尺的学生数除以占的百分比求出总人数，确定出最需要圆规的学生数，补全条形统计图即可；

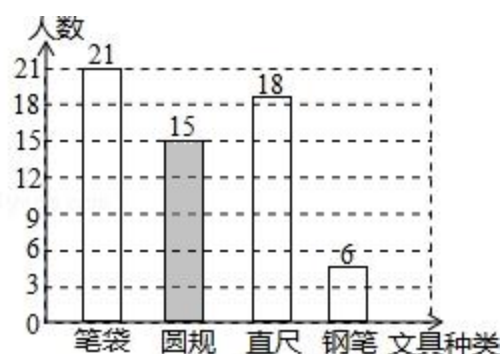
(2) 求出最需要钢笔的学生占的百分比，乘以 970 即可得到结果.

【解答】 解：(1) 根据题意得： $18 \div 30\% = 60$ (名)，

$60 - (21 + 18 + 6) = 15$ (名)，

则本次调查中，最需要圆规的学生有 15 名，

补全条形统计图，如图所示：



(2) 根据题意得： $970 \times \frac{6}{60} = 97$ (名)，

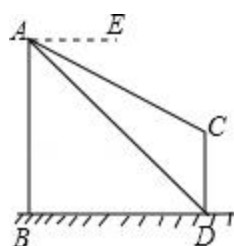
则估计全校学生中最需要钢笔的学生有 97 名.

【点评】此题考查了条形统计图，扇形统计图，以及用样本估计总体，弄清题意是解本题的关键.

24. (6分) (2014年黑龙江哈尔滨)如图, AB、CD 为两个建筑物, 建筑物 AB 的高度为 60 米, 从建筑物 AB 的顶点 A 点测得建筑物 CD 的顶点 C 点的俯角 $\angle EAC$ 为 30° , 测得建筑物 CD 的底部 D 点的俯角 $\angle EAD$ 为 45° .

(1) 求两建筑物底部之间水平距离 BD 的长度;

(2) 求建筑物 CD 的高度 (结果保留根号).



【考点】解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

【分析】(1) 根据题意得: $BD \parallel AE$, 从而得到 $\angle BAD = \angle ADB = 45^\circ$, 利用 $BD = AB = 60$, 求得两建筑物底部之间水平距离 BD 的长度为 60 米;

(2) 延长 AE、DC 交于点 F, 根据题意得四边形 ABDF 为正方形, 根据 $AF = BD = DF = 60$, 在 $Rt\triangle AFC$ 中利用 $\angle FAC = 30^\circ$ 求得 CF, 然后即可求得 CD 的长.

【解答】解: (1) 根据题意得: $BD \parallel AE$,

$$\therefore \angle ADB = \angle EAD = 45^\circ,$$

$$\because \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ADB = 45^\circ,$$

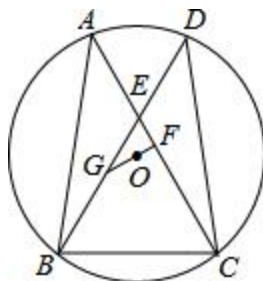
$$\therefore BD = AB = 60,$$

$\therefore$ 两建筑物底部之间水平距离 BD 的长度为 60 米;

$$\therefore AF=BD=DF=60,$$
$$\therefore CF=AF \cdot \tan \angle FAC=60 \times \frac{\sqrt{3}}{3}=20\sqrt{3},$$
$$\therefore CD = 60 - 20\sqrt{3},$$

25. (8 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 弦 BD 交 AC 于点 E , 连接 CD , 且 $AE=DE$, $BC=CE$.

(2) 过点 O 作 $OF \perp AC$ 于点 F, 延长 FO 交 BE 于点 G, $DE=3$, $EG=2$, 求 AB 的长.



【考点】三角形的外接圆与外心；全等三角形的判定与性质；等边三角形的判定与性质；勾股定理.

【分析】 (1) 首先得出 $\triangle AEB \cong \triangle DEC$, 进而得出 $\triangle EBC$ 为等边三角形, 即可得出答案;

(2) 由已知得出 EF, BC 的长, 进而得出 CM, BM 的长, 再求出 AM 的长, 再由勾股定理求出 AB 的长.

【解答】 (1) 证明: 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle DEC$ 中

$$\begin{cases} \angle A = \angle D \\ AE = ED \\ \angle AEB = \angle DEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle DEC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore EB = EC,$$

$$\text{又} \because BC = CE,$$

$$\therefore BE = CE = BC,$$

$$\therefore \triangle EBC \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ;$$

$$(2) \text{ 解: } \because OF \perp AC,$$

$$\therefore AF = CF,$$

$$\because \triangle EBC \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore \angle GEF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EGF = 30^\circ,$$

$$\because EG = 2,$$

$$\therefore EF = 1,$$

$$\text{又} \because AE = ED = 3,$$

$$\therefore CF = AF = 4,$$

$$\therefore AC = 8, \quad EC = 5,$$

$$\therefore BC=5,$$

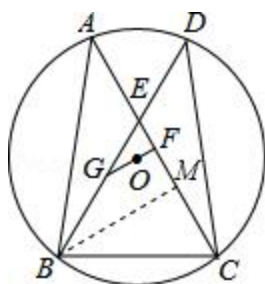
作 $BM \perp AC$ 于点 M , $\because \angle BCM=60^\circ$,

$$\therefore \angle MBC=30^\circ,$$

$$\therefore CM=\frac{5}{2}, \quad BM=\sqrt{BC^2 - CM^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AM=AC - CM=\frac{11}{2},$$

$$\therefore AB=\sqrt{AM^2 + BM^2}=7.$$



【点评】此题主要考查了全等三角形的判定与性质以及等边三角形的性质和勾股定理以及锐角三角函数关系等知识，得出 CM ， BM 的长是解题关键.

26. (8 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)荣庆公司计划从商店购买同一品牌的台灯和手电筒，已知购买一个台灯比购买一个手电筒多用 20 元，若用 400 元购买台灯和用 160 元购买手电筒，则购买台灯的个数是购买手电筒个数的一半.

(1) 求购买该品牌一个台灯、一个手电筒各需要多少元？

(2) 经商谈，商店给予荣庆公司购买一个该品牌台灯赠送一个该品牌手电筒的优惠，如果荣庆公司需要手电筒的个数是台灯个数的 2 倍还多 8 个，且该公司购买台灯和手电筒的总费用不超过 670 元，那么荣庆公司最多可购买多少个该品牌台灯？

【考点】分式方程的应用；一元一次不等式的应用.

【分析】(1) 设购买该品牌一个手电筒需要 x 元，则购买一个台灯需要 $(x+20)$ 元. 则根据等量关系：购买台灯的个数是购买手电筒个数的一半，列出方程；

(2) 设公司购买台灯的个数为 a 个，则还需要购买手电筒的个数是 $(2a+8)$ 个，则根据“该公司购买台灯和手电筒的总费用不超过 670 元”列出不等式.

【解答】解：(1) 设购买该品牌一个手电筒需要 x 元，则购买一个台灯需要 $(x+20)$ 元.

根据题意 得 $\frac{400-160}{x+20} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

解得 $x=5$

经检验， $x=5$ 是原方程的解.

所以 $x+20=25$.

答：购买一个台灯需要 25 元，购买一个手电筒需要 5 元；

(2) 设公司购买台灯的个数为 a ，则还需要购买手电筒的个数是 $(2a+8)$

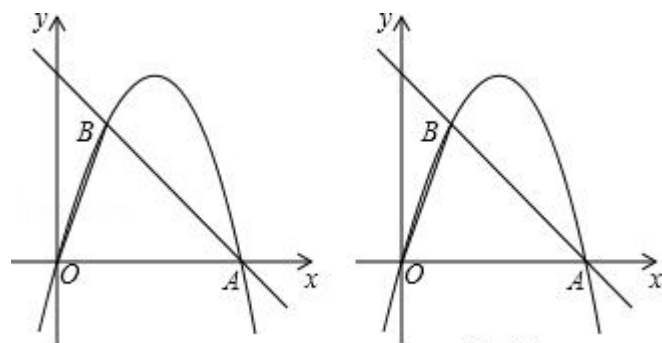
由题意得 $25a+5(2a+8) \leq 670$

解得 $a \leq 21$

所以 荣庆公司最多可购买 21 个该品牌的台灯.

【点评】 本题考查了一元一次不等式和分式方程的应用. 解决问题的关键是读懂题意，找到关键描述语，进而找到所求的量的等量（不等量）关系.

27. (10 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图，在平面直角坐标中，点 O 为坐标原点，直线 $y = -x+4$ 与 x 轴交于点 A ，过点 A 的抛物线 $y = ax^2+bx$ 与直线 $y = -x+4$ 交于另一点 B ，且点 B 的横坐标为 1.



备用图

(1) 求 a ， b 的值；

(2) 点 P 是线段 AB 上一动点（点 P 不与点 A 、 B 重合），过点 P 作 $PM \parallel OB$

交第一象限内的抛物线于点 M ，过点 M 作 $MC \perp x$ 轴于点 C ，交 AB 于点 N ，过

点 P 作 $PF \perp MC$ 于点 F, 设 PF 的长为 t, MN 的长为 d, 求 d 与 t 之间的函数关系式 (不要求写出自变量 t 的取值范围);

(3) 在 (2) 的条件下, 当 $S_{\triangle ACN} = S_{\triangle PMN}$ 时, 连接 ON, 点 Q 在线段 BP 上, 过点 Q 作 $QR \parallel MN$ 交 ON 于点 R, 连接 MQ、BR, 当 $\angle MQR - \angle BRN = 45^\circ$ 时, 求点 R 的坐标.

【考点】 二次函数综合题.

【分析】 (1) 利用已知得出 A, B 点坐标, 进而利用待定系数法得出 a, b 的值;

(2) 利用已知得出 $AD = BD$ 则 $\angle BAD = \angle ABD = 45^\circ$, 进而得出

$\tan \angle BOD = \tan \angle MPF$, 故 $\frac{BD}{OD} = \frac{MF}{PF} = 3$, $MF = 3PF = 3t$, 即可得出 d 与 t 的函数关系;

(3) 首先利用 $S_{\triangle ACN} = S_{\triangle PMN}$, 则 $\frac{1}{2}AC^2 = 2t^2$, 得出 $AC = 2t$, $CN = 2t$, 则 M $(4 - 2t, 6t)$, 求出 t 的值, 进而得出 $\triangle PMQ \sim \triangle NBR$, 求出 R 点坐标.

【解答】 解: (1) $\because y = -x + 4$ 与 x 轴交于点 A,

$\therefore A(4, 0)$,

$\because$ 点 B 的横坐标为 1, 且直线 $y = -x + 4$ 经过点 B,

$\therefore B(1, 3)$,

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过 A $(4, 0)$, B $(1, 3)$,

$$\therefore \begin{cases} 16a + 4b = 0 \\ a + b = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore a = -1, b = 4$;

(2) 如图, 作 $BD \perp x$ 轴于点 D, 延长 MP 交 x 轴于点 E,

$\because B(1, 3), A(4, 0)$,

$\therefore OD = 1, BD = 3, OA = 4$,

$$\therefore AD=3,$$

$$\therefore AD=BD,$$

$$\because \angle BDA=90^\circ, \quad \angle BAD=\angle ABD=45^\circ,$$

$$\because MC \perp x \text{ 轴}, \quad \therefore \angle ANC=\angle BAD=45^\circ,$$

$$\therefore \angle PNF=\angle ANC=45^\circ,$$

$$\because PF \perp MC, \quad \therefore \angle FPN=\angle PNF=45^\circ,$$

$$\therefore NF=PF=t,$$

$$\because \angle DFM=\angle ECM=90^\circ, \quad \therefore PF \parallel EC,$$

$$\therefore \angle MPF=\angle MEC,$$

$$\because ME \parallel OB, \quad \therefore \angle MEC=\angle BOD,$$

$$\therefore \angle MPF=\angle BOD,$$

$$\therefore \tan \angle BOD=\tan \angle MPF,$$

$$\therefore \frac{BD}{OD}=\frac{MF}{PF}=3,$$

$$\therefore MF=3PF=3t,$$

$$\because MN=MF+FN,$$

$$\therefore d=3t+t=4t;$$

(3) 如备用图, 由 (2) 知, $PF=t$, $MN=4t$,

$$\therefore S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}MN \times PF=\frac{1}{2} \times 4t \times t=2t^2,$$

$$\because \angle CAN=\angle ANC,$$

$$\therefore CN=AC,$$

$$\therefore S_{\triangle ACN}=\frac{1}{2}AC^2,$$

$$\because S_{\triangle ACN}=S_{\triangle PMN},$$

$$\therefore \frac{1}{2}AC^2 = 2t^2,$$

$$\therefore AC = 2t, \quad \therefore CN = 2t,$$

$$\therefore MC = MN + CN = 6t,$$

$$\therefore OC = OA - AC = 4 - 2t,$$

$$\therefore M(4 - 2t, 6t),$$

由 (1) 知抛物线的解析式为: $y = -x^2 + 4x$,

将 $M(4 - 2t, 6t)$ 代入 $y = -x^2 + 4x$ 得:

$$-(4 - 2t)^2 + 4(4 - 2t) = 6t,$$

$$\text{解得: } t_1 = 0 \text{ (舍)}, \quad t_2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore PF = NF = \frac{1}{2}, \quad AC = CN = 1, \quad OC = 3, \quad MF = \frac{3}{2}, \quad PN = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad PM = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad AN = \sqrt{2},$$

$$\therefore AB = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore BN = 2\sqrt{2},$$

作 $NH \perp RQ$ 于点 H ,

$$\because QR \parallel MN,$$

$$\therefore \angle MNH = \angle RHN = 90^\circ,$$

$$\angle RQN = \angle QNM = 45^\circ, \quad \therefore \angle MNH = \angle NCO,$$

$$\therefore NH \parallel OC,$$

$$\therefore \angle HNR = \angle NOC,$$

$$\therefore \tan \angle HNR = \tan \angle NOC,$$

$$\therefore \frac{RH}{HN} = \frac{CN}{OC} = \frac{1}{3},$$

设 $RH = n$, 则 $HN = 3n$,

$$\therefore RN = \sqrt{10}n, \quad QN = 3\sqrt{2}n,$$

$$\therefore PQ = QN - PN = 3\sqrt{2}n - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because ON = \sqrt{CN^2 + OC^2} = \sqrt{10},$$

$$OB = \sqrt{OD^2 + BD^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore OB = ON, \therefore \angle OBN = \angle BNO,$$

$$\because PM \parallel OB,$$

$$\therefore \angle OBN = \angle MPB,$$

$$\therefore \angle MPB = \angle BNO,$$

$$\because \angle MQR - \angle BRN = 45^\circ, \angle MQR = \angle MQP + \angle RQN = \angle MQP + 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BRN = \angle MQP,$$

$$\therefore \triangle PMQ \sim \triangle NBR,$$

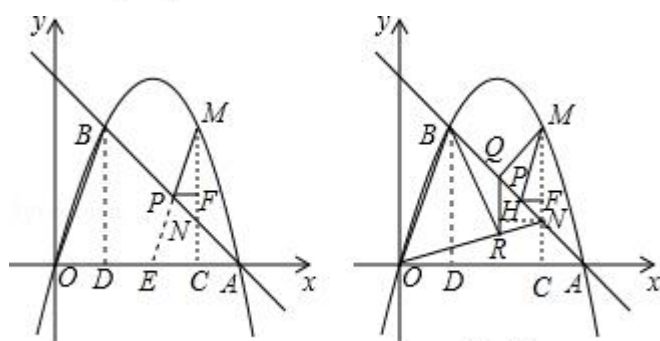
$$\therefore \frac{PQ}{RN} = \frac{PM}{BN},$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{2}n - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{10}n} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{解得: } n = \frac{2}{7},$$

$$\therefore R \text{ 的横坐标为: } 3 - \frac{2 \times 3}{7} = \frac{15}{7}, R \text{ 的纵坐标为: } 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7},$$

$$\therefore R \left(\frac{15}{7}, \frac{5}{7} \right).$$



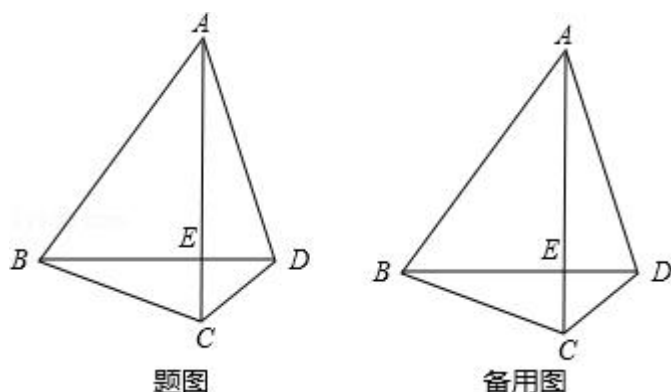
备用图

【点评】此题主要考查了待定系数法求二次函数解析式以及相似三角形的判定与性质和勾股定理等知识，得出 $\triangle PMQ \sim \triangle NBR$ ，进而得出 n 的值是解题关键。

28. (10 分) (2014 年黑龙江哈尔滨)如图, 在四边形 ABCD 中, 对角线 AC、BD 相交于点 E, 且 $AC \perp BD$, $\angle ADB = \angle CAD + \angle ABD$, $\angle BAD = 3\angle CBD$.

(1) 求证: $\triangle ABC$ 为等腰三角形;

(2) M 是线段 BD 上一点, $BM:AB=3:4$, 点 F 在 BA 的延长线上, 连接 FM, $\angle BFM$ 的平分线 FN 交 BD 于点 N, 交 AD 于点 G, 点 H 为 BF 中点, 连接 MH, 当 $GN=GD$ 时, 探究线段 CD、FM、MH 之间的数量关系, 并证明你的结论.



【考点】相似形综合题.

【分析】(1) 根据等式的性质, 可得 $\angle APE = \angle ADE$, 根据等腰三角形的性质, 可得 $\angle PAD = 2\beta$, 根据直角三角形的性质, 可得 $\angle AEB + \angle CBE = 90^\circ$, 根据等式的性质, 可得 $\angle ABC = \angle ACB$, 根据等腰三角形的判定, 可得答案;

(2) 根据相似三角形的判定与性质, 可得 $\angle ABE = \angle ACD$, 根据等腰三角形的性质, 可得 $\angle GND = \angle GDN$, 根据对顶角的性质, 可得 $\angle AGF$ 的度数, 根据三角形外角的性质, $\angle AFG$ 的度数, 根据直角三角形的性质, 可得 BF 与 MH 的关系, 根据等腰三角形的性质, 可得 $\angle FRM = \angle FMR$, 根据平行线的判定与性质, 可得 $\angle CBD = \angle RMB$, 根据相似三角形的判定与性质, 可得 $\frac{BR}{CD} = \frac{BM}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$, 根据线段的和差, 可得 $BR = BF - FR$, 根据等量代换, 可得答案.

【解答】(1) 证明: 如图 1, 作 $\angle BAP = \angle DAE = \beta$, AP 交 BD 于 P, 设 $\angle CBD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$,

$$\because \angle ADB = \angle CAD + \angle ABD, \quad \angle APE = \angle BAP + \angle ABD,$$

$$\therefore \angle APE = \angle ADE, \quad AP = AD.$$

$$\because AC \perp BD$$

$$\therefore \angle PAE = \angle DAE = \beta,$$

$$\therefore \angle PAD = 2\beta, \quad \angle BAD = 3\beta.$$

$$\because \angle BAD = 3\angle CBD,$$

$$\therefore 3\beta = 3\alpha, \quad \beta = \alpha.$$

$$\because AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ - \angle CBE = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \beta.$$

$$\because \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 90^\circ - \beta,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形;

$$(2) \quad 2MH = FM + \frac{3}{4}CD.$$

证明: 如图 2,

由 (1) 知 $AP = AD$, $AB = AC$, $\angle BAP = \angle CAD = \beta$,

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ACD.$$

$$\because AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle GDN = 90^\circ - \beta,$$

$$\because GN = GD,$$

$$\therefore \angle GND = \angle GDN = 90^\circ - \beta,$$

$$\therefore \angle NGD = 180^\circ - \angle GND - \angle GDN = 2\beta.$$

$$\therefore \angle AGF = \angle NGD = 2\beta.$$

$$\therefore \angle AFG = \angle BAD - \angle AGF = 3\beta - 2\beta = \beta.$$

$$\because FN \text{ 平分 } \angle BFM,$$

$$\therefore \angle NFM = \angle AFG = \beta,$$

$$\therefore FM \parallel AE,$$

$$\therefore \angle FMN = 90^\circ.$$

$$\because H \text{ 为 } BF \text{ 的中点},$$

$$\therefore BF = 2MH.$$

在 FB 上截取 FR = FM, 连接 RM,

$$\therefore \angle FRM = \angle FMR = 90^\circ - \beta.$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ - \beta,$$

$$\therefore \angle FRM = \angle ABC,$$

$$\therefore RM \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle RMB.$$

$$\because \angle CAD = \angle CBD = \beta,$$

$$\therefore \angle RMB = \angle CAD.$$

$$\because \angle RBM = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle RMB \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \frac{BR}{CD} = \frac{BM}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BR = \frac{3}{4}CD.$$

$$\because BR = BF - FR,$$

$$\therefore FB - FM = BR = \frac{3}{4}CD,$$

$$FB=FM+\frac{3}{4}CD.$$

$$\therefore 2MH=FM+\frac{3}{4}CD.$$

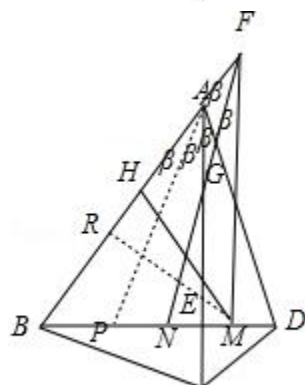


图 2

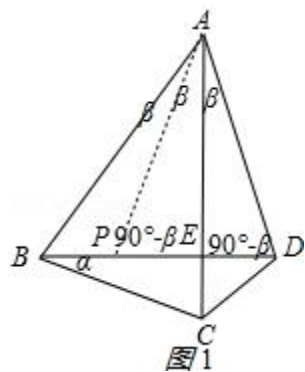


图 1

【点评】 本题考查了相似形综合题，(1) 利用了等腰三角形的性质，等腰三角形的判定，直角三角形的性质；(2) 相似三角形的判定与性质，直角三角形的性质，三角形外角的性质，平行线的判定与性质，利用的知识点多，题目稍有难度，相似三角形的判定与性质是解题关键.