

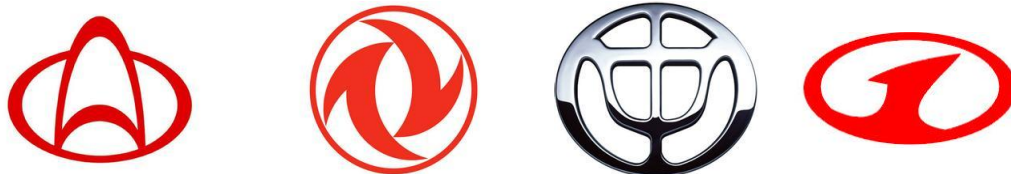
2015 年重庆市中考数学试卷 (B 卷)

一.选择题 (本大题共 12 个小题, 每小题 4 分, 共 48 分, 每小题的四个选项中只有一个是正确的)

1. (4 分) (2015•常州) -3 的绝对值是 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

2. (4 分) (2015•重庆) 下列图形是我国国产品牌汽车的标识, 在这些汽车标识中, 是中心对称图形的是 ()



3. (4 分) (2015•重庆) 下列调查中, 最适宜采用全面调查方式 (普查) 的是 ()

- A. 对重庆市中学生每天学习所用时间的调查
B. 对全国中学生心理健康现状的调查
C. 对某班学生进行 6 月 5 日是“世界环境日”知晓情况的调查
D. 对重庆市初中学生课外阅读量的调查

4. (4 分) (2015•重庆) 在平面直角坐标系中, 若点 P 的坐标为 $(-3, 2)$, 则点 P 所在的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

5. (4 分) (2015•重庆) 计算 $3\sqrt{2} - \sqrt{2}$ 的值是 ()

- A. 2 B. 3 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

6. (4 分) (2015•重庆) 某校为纪念世界反法西斯战争 70 周年, 举行了主题为“让历史照亮未来”的演讲比赛, 其中九年级的 5 位参赛选手的比赛成绩 (单位: 分) 分别为: 8.6, 9.5, 9.7, 8.8, 9, 则这 5 个数据的中位数是 ()

- A. 9.7 B. 9.5 C. 9 D. 8.8

7. (4 分) (2015•重庆) 已知一个多边形的内角和是 900° , 则这个多边形是 ()

- A. 五边形 B. 六边形 C. 七边形 D. 八边形

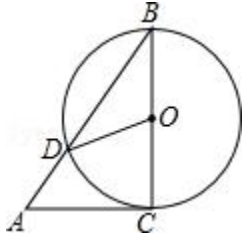
8. (4 分) (2015•重庆) 已知一元二次方程 $2x^2 - 5x + 3 = 0$, 则该方程根的情况是 ()

- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根

C. 两个根都是自然数

D. 无实数根

9. (4分) (2015•重庆) 如图, AC 是 $\odot O$ 的切线, 切点为 C, BC 是 $\odot O$ 的直径, AB 交 $\odot O$ 于点 D, 连接 OD. 若 $\angle BAC=55^\circ$, 则 $\angle COD$ 的大小为 ()



A. 70°

B. 60°

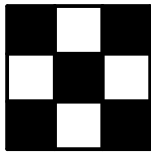
C. 55°

D. 35°

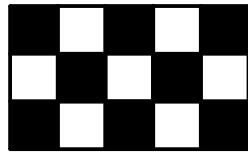
10. (4分) (2015•重庆) 下列图形都是由几个黑色和白色的正方形按一定规律组成, 图①中有 2 个黑色正方形, 图②中有 5 个黑色正方形, 图③中有 8 个黑色正方形, 图④中有 11 个黑色正方形, ..., 依次规律, 图⑩中黑色正方形的个数是 ()



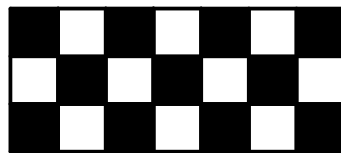
图①



图②



图③



图④

...

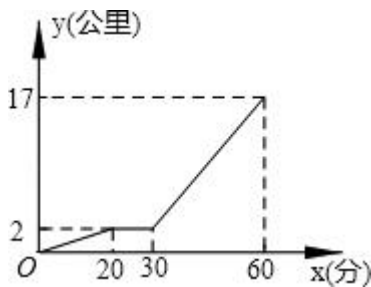
A. 32

B. 29

C. 28

D. 26

11. (4分) (2015•重庆) 某星期下午, 小强和同学小明相约在某公共汽车站一起乘车回学校, 小强从家出发先步行到车站, 等小明到了后两人一起乘公共汽车回到学校. 图中折线表示小强离开家的路程 y (公里) 和所用的时间 x (分) 之间的函数关系. 下列说法错误的是 ()



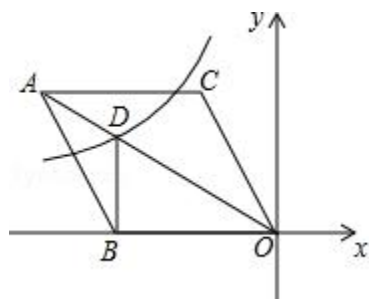
A. 小强从家到公共汽车在步行了 2 公里

B. 小强在公共汽车站等小明用了 10 分钟

C. 公共汽车的平均速度是 30 公里/小时

D. 小强乘公共汽车用了 20 分钟

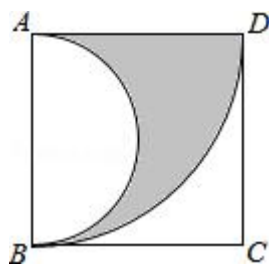
12. (4分) (2015•重庆) 如图, 在平面直角坐标系中, 菱形 $ABOC$ 的顶点 O 在坐标原点, 边 BO 在 x 轴的负半轴上, $\angle BOC=60^\circ$, 顶点 C 的坐标为 $(m, 3\sqrt{3})$, 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与菱形对角线 AO 交 D 点, 连接 BD , 当 $DB \perp x$ 轴时, k 的值是 ()



- A. $6\sqrt{3}$ B. $-6\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{3}$ D. $-12\sqrt{3}$

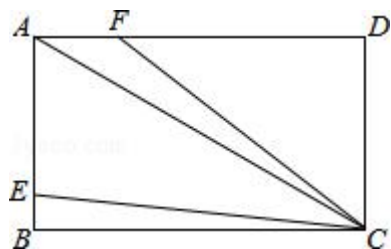
二.填空题 (本大题 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

13. (4分) (2015•重庆) 据不完全统计, 我国常年参加志愿者服务活动的志愿者超过 65000000 人, 把 65000000 用科学记数法表示为_____.
14. (4分) (2015•重庆) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 2: 3, 则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 对应边上中线的比为_____.
15. (4分) (2015•重庆) 计算: $(3.14 - \sqrt{2})^0 + (-3)^2 =$ _____.
16. (4分) (2015•重庆) 如图, 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中, 先以点 A 为圆心, AD 的长为半径画弧, 再以 AB 边的中点为圆心, AB 长的一半为半径画弧, 则两弧之间的阴影部分面积是_____ (结果保留 π).



17. (4分) (2015•重庆) 从 $-2, -1, 0, 1, 2$ 这 5 个数中, 随机抽取一个数记为 a , 则使关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{2x-1}{6} \geq -\frac{1}{2} \\ 2x-1 < 2a \end{cases}$ 有解, 且使关于 x 的一元一次方程 $\frac{3x-a}{2} + 1 = \frac{2x+a}{3}$ 的解为负数的概率为_____.

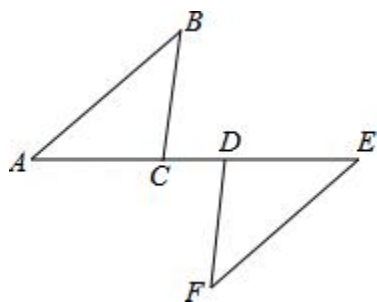
18. (4分) (2015•重庆) 如图, AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线, $AB=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 点 E , F 分别是线段 AB , AD 上的点, 连接 CE , CF . 当 $\angle BCE = \angle ACF$, 且 $CE=CF$ 时, $AE+AF=$ _____.



三.解答题 (本大题 2 个小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

19. (7分) (2015•重庆) 解二元一次方程组
$$\begin{cases} x - 2y = 1, & \text{①} \\ x + 3y = 6. & \text{②} \end{cases}$$

20. (7分) (2015•重庆) 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFD$ 分别在线段 AE 的两侧, 点 C , D 在线段 AE 上, $AC=DE$, $AB \parallel EF$, $AB=EF$. 求证: $BC=FD$.



四.解答题 (本大题 4 个小题, 每小题 10 分, 共 40 分)

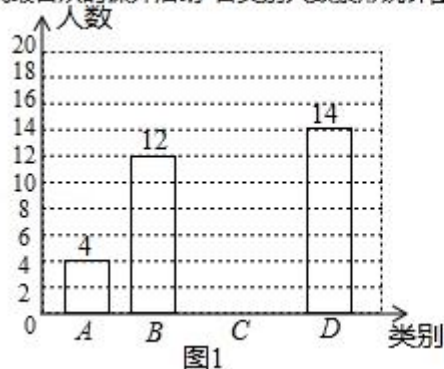
21. (10 分) (2015•重庆) 化简下列各式:

(1) $2(a+1)^2 + (a+1)(1-2a)$;

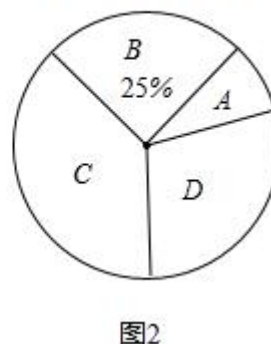
(2) $(\frac{2x-1}{x+1} - x+1) \div \frac{x-2}{x^2+2x+1}$.

22. (10 分) (2015•重庆) 某校七年级 (1) 班班主任对本班学生进行了“我最喜欢的课外活动”的调查, 并将调查结果分为书法和绘画类 (记为 A)、音乐类 (记为 B)、球类 (记为 C)、其它类 (记为 D). 根据调查结果发现该班每个学生都进行了登记且每人只登记了一种自己最喜欢的课外活动. 班主任根据调查情况把学生进行了归类, 并制作了如下两幅统计图. 请你结合图中所给信息解答下列问题:

“我最喜欢的课外活动”各类别人数条形统计图



“我最喜欢的课外活动”各类别人数占全班总人数的百分比的扇形统计图



(1) 七年级 (1) 班学生总人数为_____人, 扇形统计图中 D 类所对应扇形的圆心角为_____度, 请补全条形统计图;

(2) 学校将举行书法和绘画比赛, 每班需派两名学生参加, A 类 4 名学生中有两名学生擅长书法, 另两名学生擅长绘画. 班主任现从 A 类 4 名学生中随机抽取两名学生参加比赛, 请你用列表或画树状图的方法求出抽到的两名学生恰好是一名擅长书法, 另一名擅长绘画的概率.

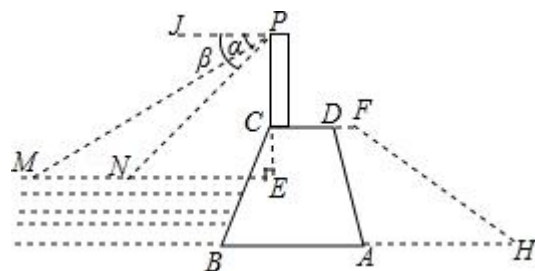
23. (10 分) (2015•重庆) 如果把一个自然数各数位上的数字从最高位到个位依次排出的一串数字, 与从个位到最高位依次排出的一串数字完全相同, 那么我们把这样的自然数叫做“和谐数”. 例如: 自然数 64746 从最高位到个位排出的一串数字是 6, 4, 7, 4, 6, 从个位到最高位排出的一串数字也是: 6, 4, 7, 4, 6, 所以 64746 是“和谐数”. 再如: 33, 181, 212, 4664, ..., 都是“和谐数”.

(1) 请你直接写出 3 个四位“和谐数”, 猜想任意一个四位数“和谐数”能否被 11 整除, 并说明理由;

(2) 已知一个能被 11 整除的三位“和谐数”, 设个位上的数字为 x ($1 \leq x \leq 4$, x 为自然数), 十位上的数字为 y , 求 y 与 x 的函数关系式.

24. (10 分) (2015•重庆) 某水库大坝的横截面是如图所示的四边形 $ABCD$, 其中 $AB \parallel CD$. 瞭望台 PC 正前方水面上有两艘渔船 M, N , 观察员在瞭望台顶端 P 处观测渔船 M 的俯角 $\alpha = 31^\circ$, 观测渔船 N 的俯角 $\beta = 45^\circ$. 已知 MN 所在直线与 PC 所在直线垂直, 垂足为点 E , PE 长为 30 米.

- (1) 求两渔船 M, N 之间的距离 (结果精确到 1 米);
- (2) 已知坝高 24 米, 坝长 100 米, 背水坡 AD 的坡度 $i = 1: 0.25$. 为提高大坝防洪能力, 某施工队在大坝的背水坡填筑土石加固, 加固后坝顶加宽 3 米, 背水坡 FH 的坡度为 $i = 1: 1.5$. 施工 12 天后, 为尽快完成加固任务, 施工队增加了机械设备, 工作效率提高到原来的 1.5 倍, 结果比原计划提前 20 天完成加固任务. 施工队原计划平均每天填筑土石方多少立方米? (参考数据: $\tan 31^\circ \approx 0.60$, $\sin 31^\circ \approx 0.52$)



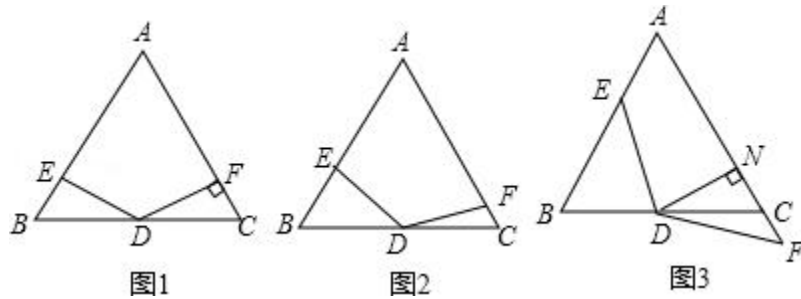
五. (本大题 2 个小题, 每小题 12 分, 共 24 分)

25. (12 分) (2015•重庆) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A=60^\circ$, 点 D 是线段 BC 的中点, $\angle EDF=120^\circ$, DE 与线段 AB 相交于点 E . DF 与线段 AC (或 AC 的延长线) 相交于点 F .

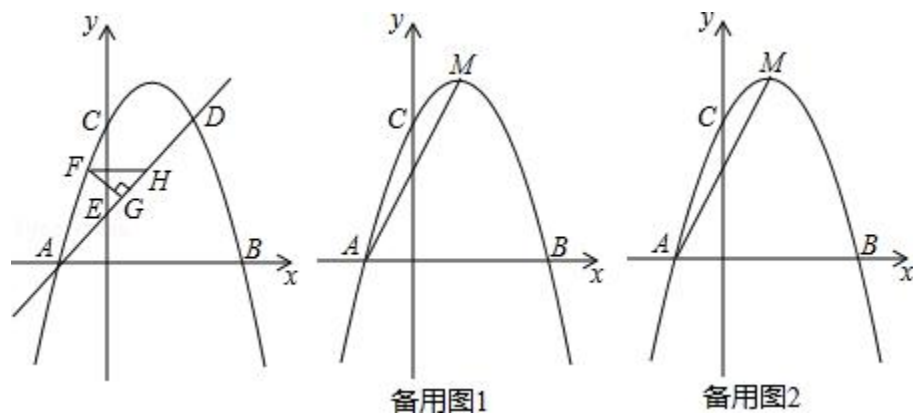
(1) 如图 1, 若 $DF \perp AC$, 垂足为 F , $AB=4$, 求 BE 的长;

(2) 如图 2, 将 (1) 中的 $\angle EDF$ 绕点 D 顺时针旋转一定的角度, DF 仍与线段 AC 相交于点 F . 求证: $BE+CF=\frac{1}{2}AB$;

(3) 如图 3, 将 (2) 中的 $\angle EDF$ 继续绕点 D 顺时针旋转一定的角度, 使 DF 与线段 AC 的延长线相交于点 F , 作 $DN \perp AC$ 于点 N , 若 $DN=FN$, 求证: $BE+CF=\sqrt{3}(BE-CF)$.



26. (12 分) (2015•重庆) 如图, 抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左边), 与 y 轴交于点 C , 点 D 和点 C 关于抛物线的对称轴对称, 直线 AD 与 y 轴交于点 E .



- (1) 求直线 AD 的解析式;
- (2) 如图 1, 直线 AD 上方的抛物线上有一点 F , 过点 F 作 $FG \perp AD$ 于点 G , 作 FH 平行于 x 轴交直线 AD 于点 H , 求 $\triangle FGH$ 周长的最大值;
- (3) 点 M 是抛物线的顶点, 点 P 是 y 轴上一点, 点 Q 是坐标平面内一点, 以 A , M , P , Q 为顶点的四边形是以 AM 为边的矩形. 若点 T 和点 Q 关于 AM 所在直线对称, 求点 T 的坐标.

2015 年重庆市中考数学试卷 (B 卷)

参考答案与试题解析

一.选择题 (本大题共 12 个小题, 每小题 4 分, 共 48 分, 每小题的四个选项中只有一个是正确的)

1. (4 分) (2015•常州) -3 的绝对值是 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

考点: 绝对值.

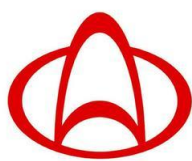
分析: 根据一个负数的绝对值等于它的相反数得出.

解答: 解: $|-3| = -(-3) = 3$.

故选: A.

点评: 考查绝对值的概念和求法. 绝对值规律总结: 一个正数的绝对值是它本身; 一个负数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0.

2. (4 分) (2015•重庆) 下列图形是我国国产品牌汽车的标识, 在这些汽车标识中, 是中心对称图形的是 ()



A.



B.



C.



D.

考点: 中心对称图形.

分析: 根据中心对称图形的定义和图形的特点即可求解.

解答: 解: 由中心对称的定义知, 绕一个点旋转 180° 后能与原图重合, 只有选项 B 是中心对称图形.

故选: B.

点评: 本题考查了中心对称图形的概念: 如果一个图形绕某一点旋转 180° 后能够与自身重

合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心.

3. (4分) (2015•重庆) 下列调查中，最适宜采用全面调查方式（普查）的是（ ）

- A. 对重庆市中学生每天学习所用时间的调查
- B. 对全国中学生心理健康现状的调查
- C. 对某班学生进行6月5日是“世界环境日”知晓情况的调查
- D. 对重庆市初中学生课外阅读量的调查

考点：全面调查与抽样调查.

分析：由普查得到的调查结果比较准确，但所费人力、物力和时间较多，而抽样调查得到的调查结果比较近似.

解答：解：A、对重庆市中学生每天学习所用时间的调查，人数众多，适宜采用抽样调查，故此选项错误；

B、对全国中学生心理健康现状的调查，人数众多，适宜采用抽样调查，故此选项错误；

C、对某班学生进行6月5日是“世界环境日”知晓情况的调查，人数不多，适宜采用全面调查，故此选项正确；

D、对重庆市初中学生课外阅读量的调查，人数众多，适宜采用抽样调查，故此选项错误；

故选：C.

点评：本题考查了抽样调查和全面调查的区别，选择普查还是抽样调查要根据所要考查的对象特征灵活选用，一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行普查、普查的意义或价值不大，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用普查.

4. (4分) (2015•重庆) 在平面直角坐标系中，若点P的坐标为 $(-3, 2)$ ，则点P所在的象限是（ ）

- A. 第一象限
- B. 第二象限
- C. 第三象限
- D. 第四象限

考点: 点的坐标.

分析: 根据点在第二象限的坐标特点即可解答.

解答: 解: $\because$ 点的横坐标 $-3 < 0$, 纵坐标 $2 > 0$,

$\therefore$ 这个点在第二象限.

故选: B.

点评: 解决本题的关键是记住平面直角坐标系中各个象限内点的符号: 第一象限 $(+, +)$;

第二象限 $(-, +)$; 第三象限 $(-, -)$; 第四象限 $(+, -)$.

5. (4 分) (2015•重庆) 计算 $3\sqrt{2} - \sqrt{2}$ 的值是 ()

A. 2 B. 3 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

考点: 二次根式的加减法.

专题: 计算题.

分析: 原式合并同类二次根式即可得到结果.

解答: 解: 原式 $= 2\sqrt{2}$,

故选 D.

点评: 此题考查了二次根式的加减法, 熟练掌握运算是解本题的关键.

6. (4 分) (2015•重庆) 某校为纪念世界反法西斯战争 70 周年, 举行了主题为“让历史照亮未来”的演讲比赛, 其中九年级的 5 位参赛选手的比赛成绩 (单位: 分) 分别为: 8.6, 9.5, 9.7, 8.8, 9, 则这 5 个数据的中位数是 ()

A. 9.7 B. 9.5 C. 9 D. 8.8

考点: 中位数.

分析: 根据中位数的定义解答. 注意中位数需先排序, 再确定.

解答: 解: 把这组数据按从小到大排序为: 8.6, 8.8, 9, 9.5, 9.7,

中位数为 9.

故选 C.

点评: 本题属于基础题, 考查了确定一组数据的中位数的能力. 注意找中位数的时候一定要

先排好顺序，然后再根据奇数和偶数个来确定中位数，如果数据有奇数个，则正中间的数字即为所求，如果是偶数个则找中间两位数的平均数.

7. (4分) (2015•重庆) 已知一个多边形的内角和是 900° ，则这个多边形是 ()

- A. 五边形 B. 六边形 C. 七边形 D. 八边形

考点: 多边形内角与外角.

专题: 计算题.

分析: 设这个多边形是 n 边形，内角和是 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，这样就得到一个关于 n 的方程组，从而求出边数 n 的值.

解答: 解：设这个多边形是 n 边形，

$$\text{则 } (n-2) \cdot 180^\circ = 900^\circ,$$

$$\text{解得： } n=7,$$

即这个多边形为七边形.

故本题选 C.

点评: 根据多边形的内角和定理，求边数的问题就可以转化为解方程的问题来解决.

8. (4分) (2015•重庆) 已知一元二次方程 $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ，则该方程根的情况是 ()

- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 两个根都是自然数 D. 无实数根

考点: 根的判别式.

分析: 判断上述方程的根的情况，只要看根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值的符号就可以了.

解答: 解： $\because a=2, b=-5, c=3,$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 > 0,$$

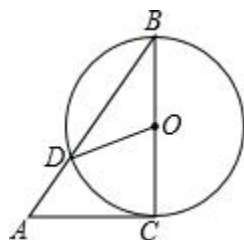
$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

故选：A.

点评: 此题主要考查了一元二次方程根的判别式，掌握一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数

根；(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根，是解决问题的关键.

9. (4分) (2015•重庆) 如图, AC 是 $\odot O$ 的切线, 切点为 C, BC 是 $\odot O$ 的直径, AB 交 $\odot O$ 于点 D, 连接 OD. 若 $\angle BAC=55^\circ$, 则 $\angle COD$ 的大小为 ()



- A. 70° B. 60° C. 55° D. 35°

考点: 切线的性质; 圆周角定理.

分析: 由 AC 是 $\odot O$ 的切线, 可求得 $\angle C=90^\circ$, 然后由 $\angle BAC=55^\circ$, 求得 $\angle B$ 的度数, 再利用圆周角定理, 即可求得答案.

解答: 解: $\because$ AC 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore BC \perp AC,$$

$$\therefore \angle C=90^\circ,$$

$$\because \angle BAC=55^\circ,$$

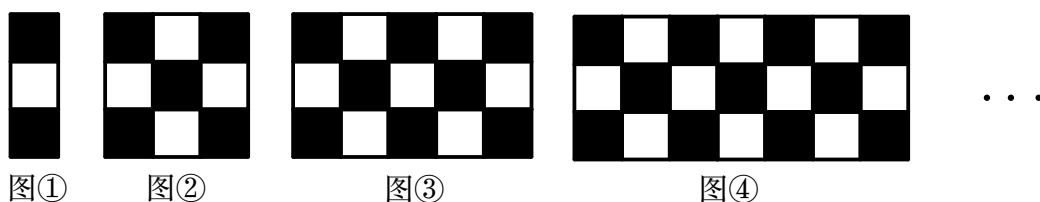
$$\therefore \angle B=90^\circ - \angle BAC=35^\circ,$$

$$\therefore \angle COD=2\angle B=70^\circ.$$

故选 A.

点评: 此题考查了切线的性质以及圆周角定理. 注意掌握切线的性质: 圆的切线垂直于经过切点的半径.

10. (4分) (2015•重庆) 下列图形都是由几个黑色和白色的正方形按一定规律组成, 图①中有 2 个黑色正方形, 图②中有 5 个黑色正方形, 图③中有 8 个黑色正方形, 图④中有 11 个黑色正方形, ..., 依次规律, 图⑩中黑色正方形的个数是 ()



- A. 32 B. 29 C. 28 D. 26

考点: 规律型: 图形的变化类.

分析: 仔细观察图形, 找到图形的个数与黑色正方形的个数的通项公式后代入 $n=11$ 后即可求解.

解答: 解: 观察图形发现:

图①中有 2 个黑色正方形,

图②中有 $2+3 \times (2-1) = 5$ 个黑色正方形,

图③中有 $2+3 \times (3-1) = 8$ 个黑色正方形,

图④中有 $2+3 \times (4-1) = 11$ 个黑色正方形,

...

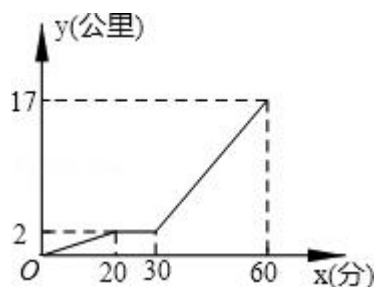
图 n 中有 $2+3 \times (n-1) = 3n-1$ 个黑色的正方形,

当 $n=10$ 时, $2+3 \times (10-1) = 29$,

故选 B.

点评: 本题是对图形变化规律的考查, 难点在于利用求和公式求出第 n 个图形的黑色正方形的数目的通项表达式.

11. (4 分) (2015•重庆) 某星期下午, 小强和同学小明相约在某公共汽车站一起乘车回学校, 小强从家出发先步行到车站, 等小明到了后两人一起乘公共汽车回到学校. 图中折线表示小强离开家的路程 y (公里) 和所用的时间 x (分) 之间的函数关系. 下列说法错误的是 ()



- A. 小强从家到公共汽车在步行了 2 公里
- B. 小强在公共汽车站等小明用了 10 分钟
- C. 公共汽车的平均速度是 30 公里/小时
- D. 小强乘公共汽车用了 20 分钟

考点: 函数的图象.

分析: 根据图象可以确定小强离公共汽车站 2 公里, 步行用了多长时间, 等公交车时间是多少, 两人乘公交车运行的时间和对应的路程, 然后确定各自的速度.

解答: 解: A、依题意得小强从家到公共汽车步行了 2 公里, 故选项正确;

B、依题意得小强在公共汽车站等小明用了 10 分钟, 故选项正确;

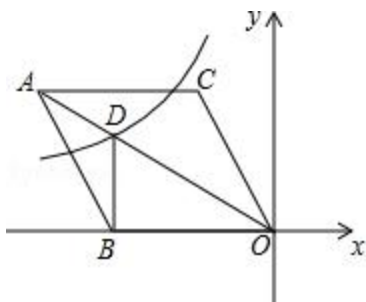
C、公交车的速度为 $15 \div \frac{1}{2} = 30$ 公里/小时, 故选项正确.

D、小强和小明一起乘公共汽车, 时间为 30 分钟, 故选项错误;

故选 D.

点评: 本题考查利用函数的图象解决实际问题, 正确理解函数图象横纵坐标表示的意义, 理解问题的过程, 就能够通过图象得到函数问题的相应解决. 需注意计算单位的统一.

12. (4 分) (2015•重庆) 如图, 在平面直角坐标系中, 菱形 ABOC 的顶点 O 在坐标原点, 边 BO 在 x 轴的负半轴上, $\angle BOC = 60^\circ$, 顶点 C 的坐标为 $(m, 3\sqrt{3})$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与菱形对角线 AO 交 D 点, 连接 BD, 当 $DB \perp x$ 轴时, k 的值是 ()



- A. $6\sqrt{3}$
- B. $-6\sqrt{3}$
- C. $12\sqrt{3}$
- D. $-12\sqrt{3}$

考点: 菱形的性质; 反比例函数图象上点的坐标特征.

分析: 首先过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E, 由 $\angle BOC = 60^\circ$, 顶点 C 的坐标为 $(m, 3\sqrt{3})$, 可求

得 OC 的长, 又由菱形 ABOC 的顶点 O 在坐标原点, 边 BO 在 x 轴的负半轴上, 可求得 OB 的长, 且 $\angle AOB=30^\circ$, 继而求得 DB 的长, 则可求得点 D 的坐标, 又由反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与菱形对角线 AO 交 D 点, 即可求得答案.

解答: 解: 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E,

$\therefore$ 顶点 C 的坐标为 $(m, 3\sqrt{3})$,

$\therefore OE = -m, CE = 3\sqrt{3}$,

$\therefore$ 菱形 ABOC 中, $\angle BOC = 60^\circ$,

$\therefore OB = OC = \frac{CE}{\sin 60^\circ} = 6, \angle BOD = \frac{1}{2} \angle BOC = 30^\circ$,

$\therefore DB \perp x$ 轴,

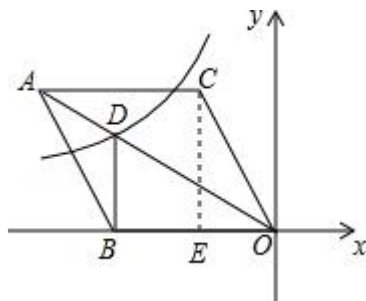
$\therefore DB = OB \cdot \tan 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为: $(-6, 2\sqrt{3})$,

$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与菱形对角线 AO 交 D 点,

$\therefore k = xy = -12\sqrt{3}$.

故选 D.



点评: 此题考查了菱形的性质以及反比例函数图象上点的坐标特征. 注意准确作出辅助线, 求得点 D 的坐标是关键.

二. 填空题 (本大题 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

13. (4 分) (2015•重庆) 据不完全统计, 我国常年参加志愿者服务活动的志愿者超过 65000000 人, 把 65000000 用科学记数法表示为 6.5×10^7 .

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时,

要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: 将 65000000 用科学记数法表示为: 6.5×10^7 .

故答案为: 6.5×10^7 .

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

14. (4 分) (2015•重庆) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 2: 3, 则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 对应边上中线的比为 2: 3.

考点: 相似三角形的性质.

分析: 相似三角形对应边上中线的比等于相似比, 根据以上性质得出即可.

解答: 解: $\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 2: 3,

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 对应边上中线的比是 2: 3,

故答案为: 2: 3.

点评: 本题考查了相似三角形的性质的应用, 能理解相似三角形的性质是解此题的关键, 注意: 相似三角形对应边上中线的比等于相似比.

15. (4 分) (2015•重庆) 计算: $(3.14 - \sqrt{2})^0 + (-3)^2 = \underline{10}$.

考点: 实数的运算; 零指数幂.

专题: 计算题.

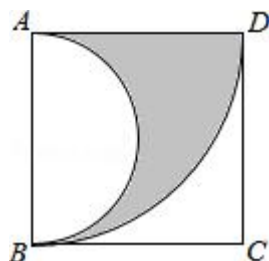
分析: 原式第一项利用零指数幂法则计算, 第二项利用乘方的意义化简, 计算即可得到结果.

解答: 解: 原式 $= 1 + 9 = 10$.

故答案为: 10

点评: 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

16. (4分) (2015•重庆) 如图, 在边长为4的正方形ABCD中, 先以点A为圆心, AD的长为半径画弧, 再以AB边的中点为圆心, AB长的一半为半径画弧, 则两弧之间的阴影部分面积是 2π (结果保留 π).



考点: 扇形面积的计算.

分析: 根据题意有 $S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形BAD}} - S_{\text{半圆BA}}$, 然后根据扇形的面积公式: $S = \frac{n\pi R^2}{360}$ 和圆的面积公式分别计算扇形和半圆的面积即可.

解答: 解: 根据题意得, $S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形BAD}} - S_{\text{半圆BA}}$,

$$\therefore S_{\text{扇形BAD}} = \frac{90\pi \cdot 4^2}{360} = 4\pi$$

$$S_{\text{半圆BA}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi,$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = 4\pi - 2\pi = 2\pi.$$

故答案为 2π .

点评: 此题考查了扇形的面积公式: $S = \frac{n\pi R^2}{360}$, 其中 n 为扇形的圆心角的度数, R 为圆的半径), 或 $S = \frac{1}{2}lR$, l 为扇形的弧长, R 为半径.

17. (4分) (2015•重庆) 从 $-2, -1, 0, 1, 2$ 这5个数中, 随机抽取一个数记为 a , 则使

关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{2x-1}{6} \geq -\frac{1}{2} \\ 2x-1 < 2a \end{cases}$ 有解, 且使关于 x 的一元一次方程 $\frac{3x-a}{2} + 1 = \frac{2x+a}{3}$ 的解为

负数的概率为 $\frac{2}{5}$.

考点: 概率公式; 一元一次方程的解; 解一元一次不等式组.

分析: 分别求得使关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{2x-1}{6} \geq -\frac{1}{2} \\ 2x-1 < 2a \end{cases}$ 有解, 且使关于 x 的一元一次方程

$\frac{3x-a}{2}+1=\frac{2x+a}{3}$ 的解为负数的 a 的值满足的条件，然后利用概率公式求解即可。

解答:

解: $\because$ 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{2x-1}{6} \geq -\frac{1}{2} \\ 2x-1 < 2a \end{cases}$ 有解的 a 满足的条件是 $a > -\frac{3}{2}$,

使关于 x 的一元一次方程 $\frac{3x-a}{2}+1=\frac{2x+a}{3}$ 的解为负数的 a 的 $a < \frac{6}{5}$,

$\therefore$ 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{2x-1}{6} \geq -\frac{1}{2} \\ 2x-1 < 2a \end{cases}$ 有解, 且使关于 x 的一元一次方程

$\frac{3x-a}{2}+1=\frac{2x+a}{3}$ 的解为负数的 a 的值为 $-1, 0, 1$, 三个数,

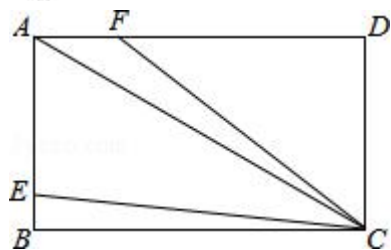
$\therefore$ 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{2x-1}{6} \geq -\frac{1}{2} \\ 2x-1 < 2a \end{cases}$ 有解, 且使关于 x 的一元一次方程

$\frac{3x-a}{2}+1=\frac{2x+a}{3}$ 的解为负数的概率为 $\frac{3}{5}$,

故答案为: $\frac{3}{5}$.

点评: 本题考查了概率公式、一元一次方程的解及解一元一次不等式组的知识, 解题的关键是首先确定满足条件的 a 的值, 难度不大.

18. (4 分) (2015•重庆) 如图, AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线, $AB=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 点 E, F 分别是线段 AB, AD 上的点, 连接 CE, CF . 当 $\angle BCE=\angle ACF$, 且 $CE=CF$ 时, $AE+AF=$ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.



考点: 全等三角形的判定与性质; 矩形的性质; 解直角三角形.

分析: 过点 F 作 $FG \perp AC$ 于点 G , 证明 $\triangle BCE \cong \triangle GCF$, 得到 $CG=CB=2\sqrt{3}$, 根据勾股定理得 $AC=4$, 所以 $AG=4-2\sqrt{3}$, 易证 $\triangle AGF \sim \triangle CBA$, 求出 AF, FG , 再求出 AE , 得出 $AE+AF$ 的值.

解答: 解: 过点 F 作 $FG \perp AC$ 于点 G , 如图所示,

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle GCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle FGC = \angle EBC = 90^\circ \\ \angle ACF = \angle BCE \\ CE = CF \end{cases},$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle GCF$ (AAS),

$$\therefore CG = BC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4,$$

$$\therefore AG = 4 - 2\sqrt{3},$$

$\therefore \triangle AGF \sim \triangle CBA$

$$\therefore \frac{AG}{CB} = \frac{AF}{CA} = \frac{GF}{AB},$$

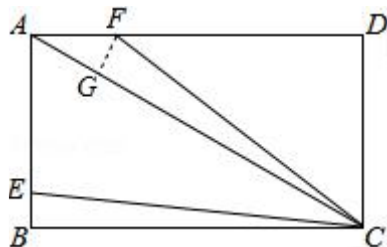
$$\therefore AF = \frac{4(4 - 2\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3} - 12}{3},$$

$$FG = \frac{2(4 - 2\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3},$$

$$\therefore AE = 2 - \frac{4\sqrt{3} - 6}{3} = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AE + AF = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{3} + \frac{8\sqrt{3} - 12}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.



点评: 本题主要考查了三角形全等的判定和性质以及三角形相似的判定与性质, 有一定的综合性, 难易适中.

三.解答题 (本大题 2 个小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

19. (7 分) (2015•重庆) 解二元一次方程组 $\begin{cases} x - 2y = 1, & \text{①} \\ x + 3y = 6. & \text{②} \end{cases}$.

考点: 解二元一次方程组.

专题: 计算题.

分析: 方程组利用加减消元法求出解即可.

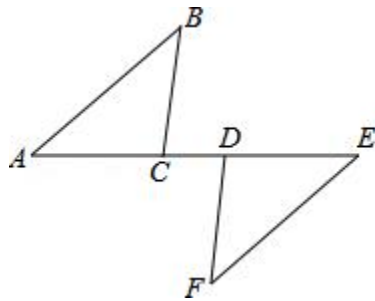
解答: 解: ② - ①得: $5y=5$, 即 $y=1$,

把 $y=1$ 代入①得: $x=3$,

则方程组的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.

点评: 此题考查了解二元一次方程组, 利用了消元的思想, 消元的方法有: 代入消元法与加减消元法.

20. (7 分) (2015•重庆) 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFD$ 分别在线段 AE 的两侧, 点 C, D 在线段 AE 上, $AC=DE$, $AB \parallel EF$, $AB=EF$. 求证: $BC=FD$.



考点: 全等三角形的判定与性质.

专题: 证明题.

分析: 根据已知条件得出 $\triangle ACB \cong \triangle DEF$, 即可得出 $BC=DF$.

解答: 证明: $\because AB \parallel EF$,

$$\therefore \angle A = \angle E,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFD$ 中

$$\begin{cases} AC=DE \\ \angle A=\angle E \\ AB=EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EFD \text{ (SAS)}$$

$$\therefore BC=FD.$$

点评: 本题考查了平行线的性质和三角形全等的判定方法, 难度适中.

四.解答题 (本大题 4 个小题, 每小题 10 分, 共 40 分)

21. (10 分) (2015•重庆) 化简下列各式:

$$(1) 2(a+1)^2 + (a+1)(1-2a);$$

$$(2) \left(\frac{2x-1}{x+1} - x+1 \right) \div \frac{x-2}{x^2+2x+1}.$$

考点: 分式的混合运算；整式的混合运算.

专题: 计算题.

分析: (1) 原式利用完全平方公式，以及多项式乘以多项式法则计算，去括号合并即可得到结果；

(2) 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算，同时利用除法法则变形，约分即可得到结果.

解答: 解: (1) 原式 $=2a^2+4a+2+a-2a^2+1-2a=3a+3$;

$$(2) \text{原式} = \frac{2x-1-(x+1)}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2} = \frac{-x(x-2)}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2} = -$$

$$x(x+1) = -x^2 - x.$$

点评: 此题考查了分式的混合运算，以及整式的混合运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

22. (10分) (2015•重庆) 某校七年级(1)班班主任对本班学生进行了“我最喜欢的课外活动”的调查，并将调查结果分为书法和绘画类(记为A)、音乐类(记为B)、球类(记为C)、其它类(记为D). 根据调查结果发现该班每个学生都进行了登记且每人只登记了一种自己最喜欢的课外活动. 班主任根据调查情况把学生进行了归类，并制作了如下两幅统计图. 请你结合图中所给信息解答下列问题:

“我最喜欢的课外活动”各类别人数条形统计图

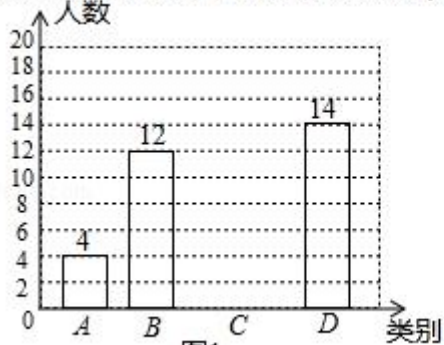


图1

“我最喜欢的课外活动”各类别人数占全班总人数的百分比的扇形统计图

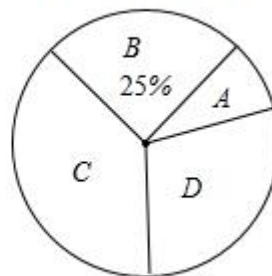


图2

(1) 七年级 (1) 班学生总人数为 48 人, 扇形统计图中 D 类所对应扇形的圆心角为 105 度, 请补全条形统计图;

(2) 学校将举行书法和绘画比赛, 每班需派两名学生参加, A 类 4 名学生中有两名学生擅长书法, 另两名学生擅长绘画. 班主任现从 A 类 4 名学生中随机抽取两名学生参加比赛, 请你用列表或画树状图的方法求出抽到的两名学生恰好是一名擅长书法, 另一名擅长绘画的概率.

考点: 列表法与树状图法; 扇形统计图; 条形统计图.

分析: (1) 由条形统计图与扇形统计图可得七年级 (1) 班学生总人数为: $12 \div 25\% = 48$ (人), 继而可得扇形统计图中 D 类所对应扇形的圆心角为: $360^\circ \times \frac{14}{48} = 105^\circ$; 然后求得 C 类的人数, 则可补全统计图;

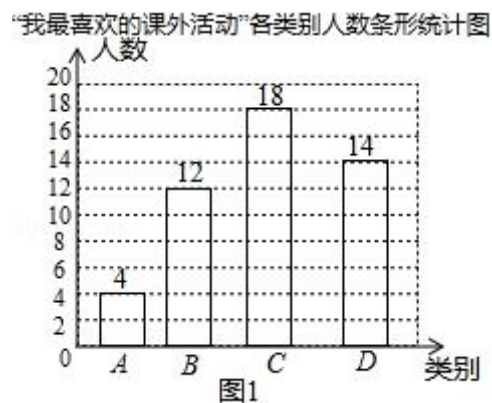
(2) 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与抽到的两名学生恰好是一名擅长书法, 另一名擅长绘画的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

解答: 解: (1) $\because$ 七年级 (1) 班学生总人数为: $12 \div 25\% = 48$ (人),

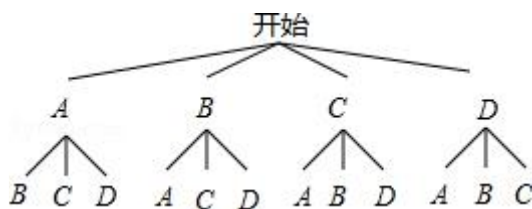
$\therefore$ 扇形统计图中 D 类所对应扇形的圆心角为: $360^\circ \times \frac{14}{48} = 105^\circ$;

故答案为: 48, 105;

C 类人数: $48 - 4 - 12 - 14 = 18$ (人), 如图:



(2) 分别用 A, B 表示两名擅长书法的学生, 用 C, D 表示两名擅长绘画的学生, 画树状图得:



∴共有 12 种等可能的结果，抽到的两名学生恰好是一名擅长书法，另一名擅长绘画的有 8 种情况，

∴抽到的两名学生恰好是一名擅长书法，另一名擅长绘画的概率为： $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

点评：此题考查了列表法或树状图法求概率以及条形统计图与扇形统计图. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

23. (10 分) (2015•重庆) 如果把一个自然数各数位上的数字从最高位到个位依次排出的一串数字, 与从个位到最高位依次排出的一串数字完全相同, 那么我们把这样的自然数叫做“和谐数”. 例如: 自然数 64746 从最高位到个位排出的一串数字是 6, 4, 7, 4, 6, 从个位到最高位排出的一串数字也是: 6, 4, 7, 4, 6, 所以 64746 是“和谐数”. 再如: 33, 181, 212, 4664, …, 都是“和谐数”.

(1) 请你直接写出 3 个四位“和谐数”, 猜想任意一个四位数“和谐数”能否被 11 整除, 并说明理由;

(2) 已知一个能被 11 整除的三位“和谐数”, 设个位上的数字为 x ($1 \leq x \leq 4$, x 为自然数), 十位上的数字为 y , 求 y 与 x 的函数关系式.

考点：因式分解的应用；规律型：数字的变化类；函数关系式.

专题：新定义.

分析： (1) 根据“和谐数”写出四个四位数的“和谐数”；设任意四位数“和谐数”形式为： $abba$ (a, b 为自然数), 则这个四位数为 $a \times 10^3 + b \times 10^2 + b \times 10 + a = 1001a + 110b$, 利用整数的整除得到 $\frac{1001a + 110b}{11} = 91a + 10b$, 由此可判断任意四位数“和谐数”都可以被 11 整除;

(2) 设能被 11 整除的三位“和谐数”为: xyx , 则这个三位数为 $x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + x = 101x + 10y$, 由于 $\frac{101x + 10y}{11} = 9x + y + \frac{2x - y}{11}$, 根据整数的整除性得到 $2x - y = 0$, 于是可得 y 与 x 的关系式.

解答： 解: (1) 四位“和谐数”: 1221, 1331, 1111, 6666;

任意一个四位“和谐数”都能被 11 整数，理由如下：

设任意四位数“和谐数”形式为：abba (a、b 为自然数)，则

$$a \times 10^3 + b \times 10^2 + b \times 10 + a = 1001a + 110b,$$

$$\therefore \frac{1001a + 110b}{11} = 91a + 10b$$

$\therefore$ 四位数“和谐数”abba 能被 11 整数；

$\therefore$ 任意四位数“和谐数”都可以被 11 整除

(2) 设能被 11 整除的三位“和谐数”为：xyx，则 $x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + x = 101x + 10y$,

$$\frac{101x + 10y}{11} = 9x + y + \frac{2x - y}{11},$$

$\because 1 \leq x \leq 4$, $101x + 10y$ 能被 11 整除,

$$\therefore 2x - y = 0,$$

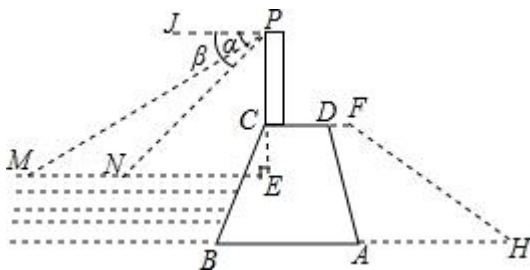
$$\therefore y = 2x \quad (1 \leq x \leq 4).$$

点评： 本题考查了因式分解的应用：利用因式分解解决求值问题；利用因式分解解决证明问题；利用因式分解简化计算问题。灵活利用整数的整除性。

24. (10 分) (2015•重庆) 某水库大坝的横截面是如图所示的四边形 ABCD, 其中 $AB \parallel CD$. 瞭望台 PC 正前方水面上有两艘渔船 M, N, 观察员在瞭望台顶端 P 处观测渔船 M 的俯角 $\alpha = 31^\circ$, 观测渔船 N 的俯角 $\beta = 45^\circ$. 已知 MN 所在直线与 PC 所在直线垂直, 垂足为点 E, PE 长为 30 米.

(1) 求两渔船 M, N 之间的距离 (结果精确到 1 米);

(2) 已知坝高 24 米, 坝长 100 米, 背水坡 AD 的坡度 $i = 1 : 0.25$. 为提高大坝防洪能力, 某施工队在大坝的背水坡填筑土石加固, 加固后坝顶加宽 3 米, 背水坡 FH 的坡度为 $i = 1 : 1.5$. 施工 12 天后, 为尽快完成加固任务, 施工队增加了机械设备, 工作效率提高到原来的 1.5 倍, 结果比原计划提前 20 天完成加固任务. 施工队原计划平均每天填筑土石方多少立方米? (参考数据: $\tan 31^\circ \approx 0.60$, $\sin 31^\circ \approx 0.52$)



考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题; 分式方程的应用; 解直角三角形的应用-坡度坡角问题.

分析: (1) 根据已知求出 EN, 根据正切的概念求出 EM, 求差得到答案;

(2) 根据坡度和锐角三角函数的概念求出截面积和土石方数, 根据题意列出分式方程, 解方程得到答案.

解答: 解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle PEN$ 中, $\because \angle PNE=45^\circ$,

$$\therefore EN=PE=30,$$

在 $\text{Rt}\triangle PEM$ 中, $\angle PME=31^\circ$,

$$\tan \angle PME = \frac{PE}{ME},$$

$$\therefore ME = \frac{PE}{\tan 31^\circ} = 50,$$

$$\therefore MN = EM - EN = 20;$$

(2) 过点 F 作 $FM \parallel AD$ 交 AH 于点 M, 过点 F 作 $FN \perp AH$ 交直线 AH 于点 N, 则四边形 DFMA 为平行四边形,

$$\therefore \angle FMA = \angle DAB, DF = AM = 3,$$

由题意得, $\tan \angle FMA = \tan \angle DAB = 4$, $\tan \angle H = \frac{2}{3}$,

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle FNH \text{ 中, } NH = \frac{FN}{\tan \angle H} = 36,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle FNM \text{ 中, } MN = \frac{FN}{\tan \angle FMA} = 6,$$

$$\therefore HM = 30, AH = 33,$$

$$\text{梯形 DAHF 的面积为: } \frac{1}{2} \times DN \times (DF + AH) = 432,$$

所以需填土石方为 $432 \times 100 = 43200$,

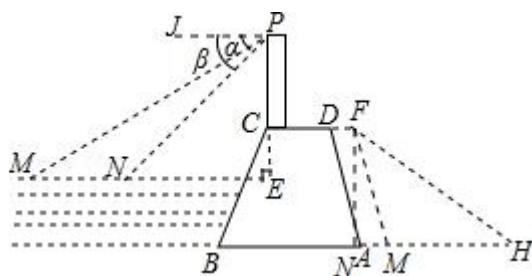
设原计划平均每天填 x 立方米, 由题意得,

$$12x + \left(\frac{43200}{x} - 12 - 20 \right) \times 1.5x = 43200,$$

解得, $x = 600$,

经检验 $x = 600$ 是方程的解,

原计划平均每天填筑土石方 600 立方米.



点评: 本题考查的是解直角三角形和分式方程的应用, 掌握锐角三角函数的概念和解直角三角形的一般步骤、根据题意正确列出分式方程是解题的关键, 注意分式方程解出未知数后要验根.

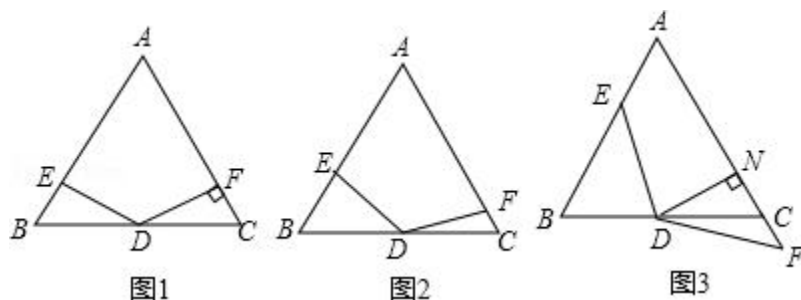
五. (本大题 2 个小题, 每小题 12 分, 共 24 分)

25. (12 分) (2015•重庆) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A=60^\circ$, 点 D 是线段 BC 的中点, $\angle EDF=120^\circ$, DE 与线段 AB 相交于点 E . DF 与线段 AC (或 AC 的延长线) 相交于点 F .

(1) 如图 1, 若 $DF \perp AC$, 垂足为 F , $AB=4$, 求 BE 的长;

(2) 如图 2, 将 (1) 中的 $\angle EDF$ 绕点 D 顺时针旋转一定的角度, DF 仍与线段 AC 相交于点 F . 求证: $BE+CF=\frac{1}{2}AB$;

(3) 如图 3, 将 (2) 中的 $\angle EDF$ 继续绕点 D 顺时针旋转一定的角度, 使 DF 与线段 AC 的延长线相交于点 F , 作 $DN \perp AC$ 于点 N , 若 $DN=FN$, 求证: $BE+CF=\sqrt{3}(BE-CF)$.



考点: 几何变换综合题; 全等三角形的判定与性质; 等边三角形的判定与性质; 锐角三角函数的定义.

专题: 综合题.

分析: (1) 如图 1, 易求得 $\angle B=60^\circ$, $\angle BED=90^\circ$, $BD=2$, 然后运用三角函数的定义就可求出 BE 的值;

(2) 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 作 $DN \perp AC$ 于 N , 如图 2, 易证 $\triangle MBD \cong \triangle NCD$,

则有 $BM=CN$, $DM=DN$, 进而可证到 $\triangle EMD \cong \triangle FND$, 则有 $EM=FN$, 就可得到

$$BE+CF=BM+EM+CF=BM+FN+CF=BM+CN=2BM=2BD \times \cos 60^\circ = BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB;$$

(3) 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 如图 3. 同 (1) 可得: $\angle B = \angle ACD = 60^\circ$, 同 (2) 可得: $BM=CN$, $DM=DN$, $EM=FN$. 由 $DN=FN$ 可得 $DM=DN=FN=EM$, 从而可得 $BE+CF=BM+EM+CF=CN+DM+CF=NF+DM=2DM$, $BE - CF = BM+EM - CF = BM+NF - CF = BM+NC=2BM$. 然后在 $Rt\triangle BMD$ 中, 运用三角函数就可得到 $DM = \sqrt{3}BM$, 即 $BE+CF = \sqrt{3} (BE - CF)$.

解答: 解: (1) 如图 1,

$$\because AB=AC, \angle A=60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ, BC=AC=AB=4.$$

$$\because \text{点 } D \text{ 是线段 } BC \text{ 的中点,}$$

$$\therefore BD=DC=\frac{1}{2}BC=2.$$

$$\because DF \perp AC, \text{ 即 } \angle AFD=90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore BE = BD \times \cos \angle B = 2 \times \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1;$$

(2) 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 作 $DN \perp AC$ 于 N , 如图 2,

则有 $\angle AMD = \angle BMD = \angle AND = \angle CND = 90^\circ$.

$$\because \angle A = 60^\circ, \therefore \angle MDN = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ.$$

$$\because \angle EDF = 120^\circ, \therefore \angle MDE = \angle NDF.$$

在 $\triangle MBD$ 和 $\triangle NCD$ 中,

$$\begin{cases} \angle BMD = \angle CND \\ \angle B = \angle C \\ BD = CD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle MBD \cong \triangle NCD,$$

$$\therefore BM=CN, DM=DN.$$

在 $\triangle EMD$ 和 $\triangle FND$ 中,

$$\begin{cases} \angle EMD = \angle FND \\ DM = DN \\ \angle MDE = \angle NDF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EMD \cong \triangle FND,$$

$$\therefore EM = FN,$$

$$\therefore BE + CF = BM + EM + CF = BM + FN + CF = BM + CN$$

$$= 2BM = 2BD \times \cos 60^\circ = BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB;$$

(3) 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M, 如图 3.

同 (1) 可得: $\angle B = \angle ACD = 60^\circ$.

同 (2) 可得: $BM = CN$, $DM = DN$, $EM = FN$.

$$\therefore DN = FN, \therefore DM = DN = FN = EM,$$

$$\therefore BE + CF = BM + EM + CF = CN + DM + CF = NF + DM = 2DM,$$

$$BE - CF = BM + EM - CF = BM + NF - CF = BM + NC = 2BM.$$

在 $Rt\triangle BMD$ 中, $DM = BM \cdot \tan B = \sqrt{3}BM$,

$$\therefore BE + CF = \sqrt{3} (BE - CF).$$

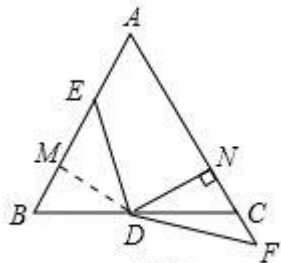


图3

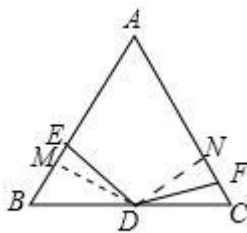


图2

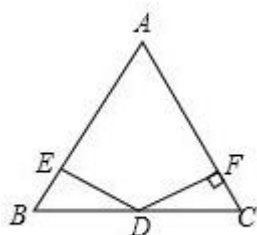
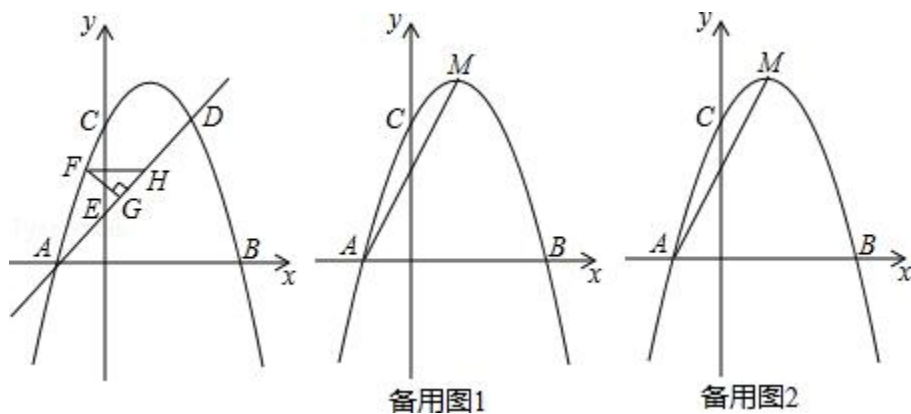


图1

点评: 本题主要考查了等边三角形的判定与性质、四边形的内角和定理、全等三角形的判定与性质、三角函数的定义、特殊角的三角函数值等知识，通过证明三角形全等得到 $BM=CN$ ， $DM=DN$ ， $EM=FN$ 是解决本题的关键。

26. (12 分) (2015•重庆) 如图，抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左边)，与 y 轴交于点 C ，点 D 和点 C 关于抛物线的对称轴对称，直线 AD 与 y 轴交于点 E 。



(1) 求直线 AD 的解析式；

(2) 如图 1，直线 AD 上方的抛物线上有一点 F ，过点 F 作 $FG \perp AD$ 于点 G ，作 FH 平行于 x 轴交直线 AD 于点 H ，求 $\triangle FGH$ 周长的最大值；

(3) 点 M 是抛物线的顶点，点 P 是 y 轴上一点，点 Q 是坐标平面内一点，以 A ， M ， P ， Q 为顶点的四边形是以 AM 为边的矩形。若点 T 和点 Q 关于 AM 所在直线对称，求点 T 的坐标。

考点: 二次函数综合题。

分析: (1) 先求出 $C(0, 3)$ ， $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，再利用配方法得 $y = -(x-1)^2 + 4$ ，则抛物线对称轴为直线 $x=1$ ，于是可确定 $D(2, 3)$ ，则可利用待定系数法求直线 AD 的解析式；

(2) 由 E (0, 1) 可判断 $\triangle OAE$ 为等腰直角三角形, 则 $\angle EAO=45^\circ$, 由于 $FH \parallel OA$, 则可得到 $\triangle FGH$ 为等腰直角三角形, 过点 F 作 $FN \perp x$ 轴交 AD 于 N, 如图, 则 $\triangle FNH$ 为等腰直角三角形, 所以 $GH=NG$, 于是得到 $\triangle FGH$ 周长等于 $\triangle FGN$ 的周长, 由于 $FG=GN=\frac{\sqrt{2}}{2}FN$, 则 $\triangle FGN$ 周长 $= (1+\sqrt{2}) FN$, 所以当 FN 最大时, $\triangle FGN$ 周长的最大, 设 F (x, $-x^2+2x+3$), 则 N (x, x+1), 则 $FN=-x^2+2x+3-x-1$, 利用二次函数的最值问题可得当 $x=\frac{1}{2}$ 时, FN 有最大值 $\frac{9}{4}$, 于是 $\triangle FGN$ 周长的最大值为 $\frac{9+9\sqrt{2}}{4}$;

(3) 直线 AM 交 y 轴于 R, M (1, 4), 利用待定系数法求出直线 AM 的解析式为 $y=2x+2$, 则 R (0, 2), 然后分类讨论: 当 AQ 为矩形 APQM 的对角线, 如图 1, 利用 $Rt\triangle AOR \sim Rt\triangle POA$, 可计算出 $OP=\frac{1}{2}$, 则 P 点坐标为 $(0, -\frac{1}{2})$, 接着利用平移可得到 Q $(2, \frac{7}{2})$, 于是由点 T 和点 Q 关于 AM 所在直线对称, 根据线段中点坐标公式易得 T 点坐标为 $(0, \frac{9}{2})$; 当 AP 为矩形 APQM 的对角线, 反向延长 QA 交 y 轴于 S, 如图 2, 同理可得 S 点坐标为 $(0, -\frac{1}{2})$, 易得 R 点为 AM 的中点, 则 R 点为 PS 的中点, 所以 $PM=SA$, P $(0, \frac{9}{2})$, 加上 $PM=AQ$, 则 $AQ=AS$, 于是可判断点 Q 关于 AM 的对称点为 S, 即 T 点坐标为 $(0, -\frac{1}{2})$.

解答: 解: (1) 当 $x=0$ 时, $y=-x^2+2x+3=3$, 则 C (0, 3),

当 $y=0$ 时, $-x^2+2x+3=0$, 解得 $x_1=-1$, $x_2=3$, 则 A (-1, 0), B (3, 0),

$\therefore y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x=1$,

而点 D 和点 C 关于直线 $x=1$ 对称,

$\therefore$ D (2, 3),

设直线 AD 的解析式为 $y=kx+b$,

把 A (-1, 0), D (2, 3) 分别代入得 $\begin{cases} -k+b=0 \\ 2k+b=3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k=1 \\ b=1 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AD 的解析式为 $y=x+1$;

(2) 当 $x=0$ 时, $y=x+1=1$, 则 E (0, 1),

$\therefore OA=OE$,

$\therefore \triangle OAE$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle EAO = 45^\circ$,

$\therefore FH \parallel OA$,

$\therefore \triangle FGH$ 为等腰直角三角形,

过点 F 作 $FN \perp x$ 轴交 AD 于 N, 如图,

$\therefore FN \perp FH$,

$\therefore \triangle FNH$ 为等腰直角三角形,

而 $FG \perp HN$,

$\therefore GH = NG$,

$\therefore \triangle FGH$ 周长等于 $\triangle FGN$ 的周长,

$\therefore FG = GN = \frac{\sqrt{2}}{2} FN$,

$\therefore \triangle FGN$ 周长 = $(1 + \sqrt{2}) FN$,

$\therefore$ 当 FN 最大时, $\triangle FGN$ 周长的最大,

设 $F(x, -x^2 + 2x + 3)$, 则 $N(x, x + 1)$,

$\therefore FN = -x^2 + 2x + 3 - x - 1 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, FN 有最大值 $\frac{9}{4}$,

$\therefore \triangle FGN$ 周长的最大值为 $(1 + \sqrt{2}) \times \frac{9}{4} = \frac{9 + 9\sqrt{2}}{4}$,

即 $\triangle FGH$ 周长的最大值为 $\frac{9 + 9\sqrt{2}}{4}$;

(3) 直线 AM 交 y 轴于 R, $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$, 则 $M(1, 4)$

设直线 AM 的解析式为 $y = mx + n$,

把 $A(-1, 0)$ 、 $M(1, 4)$ 分别代入得 $\begin{cases} -m + n = 0 \\ m + n = 4 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AM 的解析式为 $y = 2x + 2$,

当 $x = 0$ 时, $y = 2x + 2 = 2$, 则 $R(0, 2)$,

当 AQ 为矩形 APQM 的对角线, 如图 1,

$\therefore \angle RAP = 90^\circ$,

而 $AO \perp PR$,

$\therefore \text{Rt}\triangle AOR \sim \text{Rt}\triangle POA$,

$\therefore AO : OP = OR : OA$, 即 $1 : OP = 2 : 1$, 解得 $OP = \frac{1}{2}$,

$\therefore P$ 点坐标为 $(0, -\frac{1}{2})$,

$\therefore$ 点 $A(-1, 0)$ 向上平移 4 个单位, 向右平移 2 个单位得到 $M(1, 4)$,

$\therefore$ 点 $P(0, -\frac{1}{2})$ 向上平移 4 个单位, 向右平移 2 个单位得到 $Q(2, \frac{7}{2})$,

$\therefore$ 点 T 和点 Q 关于 AM 所在直线对称,

$\therefore T$ 点坐标为 $(0, \frac{9}{2})$;

当 AP 为矩形 $APQM$ 的对角线, 反向延长 QA 交 y 轴于 S , 如图 2,

同理可得 S 点坐标为 $(0, -\frac{1}{2})$,

$\therefore R$ 点为 AM 的中点,

$\therefore R$ 点为 PS 的中点,

$\therefore PM=SA$, $P(0, \frac{9}{2})$,

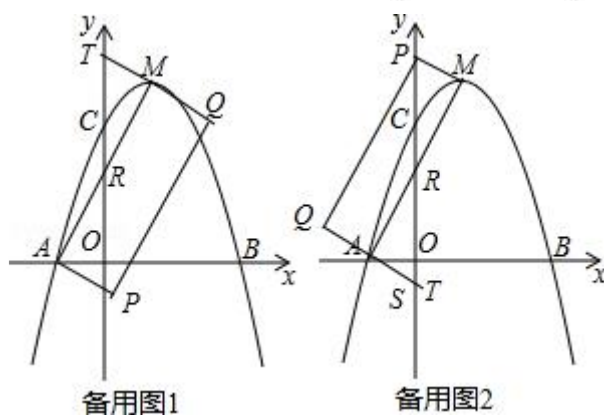
$\therefore PM=AQ$,

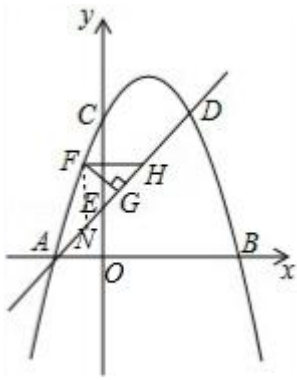
$\therefore AQ=AS$,

$\therefore$ 点 Q 关于 AM 的对称点为 S ,

即 T 点坐标为 $(0, -\frac{1}{2})$.

综上所述, 点 T 的坐标为 $(0, \frac{9}{2})$ 或 $(0, -\frac{1}{2})$.





点评: 本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数的性质、二次函数与 x 轴的交点问题和矩形的性质；会利用待定系数法求函数解析式；灵活运用相似三角形的性质计算线段的长；记住坐标系中点平移的规律.