

2021 年辽宁省大连市中考数学试卷

一、选择题（本题共 10 个小题，每题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项正确）

1. (3 分) -5 的相反数是 ()

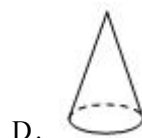
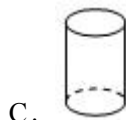
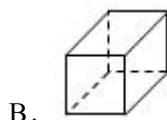
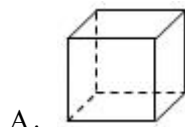
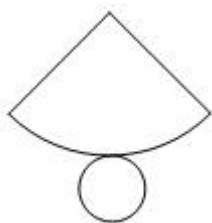
A. 5

B. $\frac{1}{5}$

C. $-\frac{1}{5}$

D. -5

2. (3 分) 某几何体的展开图如图所示，该几何体是 ()



3. (3 分) 2021 年党中央首次颁发“光荣在党 50 年”纪念章，约 7100000 名党员获此纪念章．数 7100000 用科学记数法表示为 ()

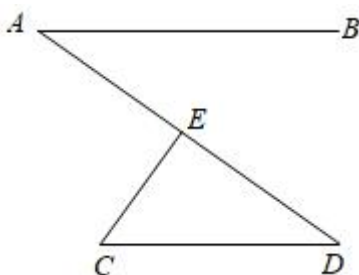
A. 71×10^5

B. 7.1×10^5

C. 7.1×10^6

D. 0.71×10^7

4. (3 分) 如图， $AB \parallel CD$ ， $CE \perp AD$ ，垂足为 E ，若 $\angle A = 40^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数为 ()



A. 40°

B. 50°

C. 60°

D. 90°

5. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $(a^2)^3 = a^8$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$

C. $(-3a)^2 = 6a^2$

D. $2ab^2 + 3ab^2 = 5a^2b^4$

6. (3 分) 某校健美操队共有 10 名队员，统计队员的年龄情况，结果如下：13 岁 3 人，14 岁 5 人，15 岁 2 人．该健美操队队员的平均年龄为 ()

A. 14.2 岁

B. 14.1 岁

C. 13.9 岁

D. 13.7 岁

7. (3 分) 下列计算正确的是 ()

A. $(-\sqrt{3})^2 = -3$

B. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

C. $\sqrt[3]{-7} = 1$

D. $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 3$

8. (3分) “杂交水稻之父”袁隆平和他的团队探索培育的“海水稻”在某试验田的产量逐年增加, 2018年平均亩产量约500公斤, 2020年平均亩产量约800公斤. 若设平均亩产量的年平均增长率为 x , 根据题意, 可列方程为()

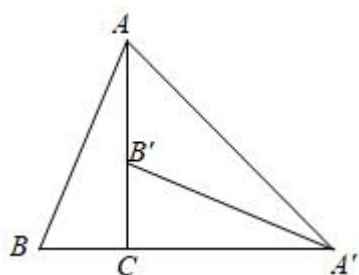
A. $500(1+x) = 800$

B. $500(1+2x) = 800$

C. $500(1+x^2) = 800$

D. $500(1+x)^2 = 800$

9. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C$, 点 B 的对应点 B' 在边 AC 上(不与点 A, C 重合), 则 $\angle AA'B'$ 的度数为()



A. α

B. $\alpha - 45^\circ$

C. $45^\circ - \alpha$

D. $90^\circ - \alpha$

10. (3分) 下列说法正确的是()

①反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$;

②点 $P(-3, 2)$ 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上;

③反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象, 在每一个象限内, y 随 x 的增大而增大.

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

二、填空题(本题共6小题, 每小题3分, 共18分)

11. (3分) 不等式 $3x < x+6$ 的解集是 _____.

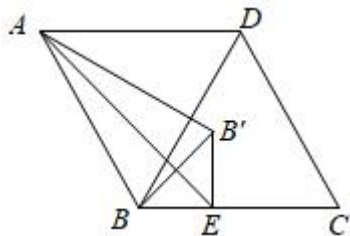
12. (3分) 在平面直角坐标系中, 将点 $P(-2, 3)$ 向右平移4个单位长度, 得到点 P' , 则点 P' 的坐标是 _____.

13. (3分) 一个不透明的口袋中有两个完全相同的小球, 把它们分别标号为1, 2. 随机摸取一个小球后, 放回并摇匀, 再随机摸取一个小球, 两次取出的小球标号的和等于4的概率为 _____.

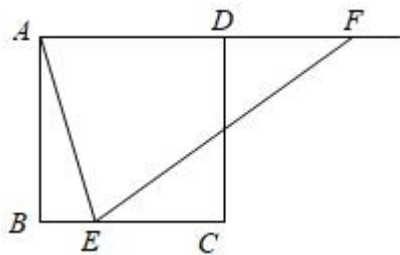
14. (3分) 我国古代著作《增删算法统宗》中记载了一首古算诗: “林下牧童闹如簇, 不知人数不知竹. 每人六竿多十四, 每人八竿恰齐足.” 其大意是: “牧童们在树下拿着竹竿

高兴地玩耍，不知有多少人和竹竿．每人 6 竿，多 14 竿；每人 8 竿，恰好用完．”若设有牧童 x 人，根据题意，可列方程为 _____．

15. (3 分) 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 60^\circ$ ，点 E 在边 BC 上，将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折 180° ，得到 $\triangle AB'E$ ，点 B 的对应点是点 B' ．若 $AB' \perp BD$ ， $BE = 2$ ，则 BB' 的长是 _____．



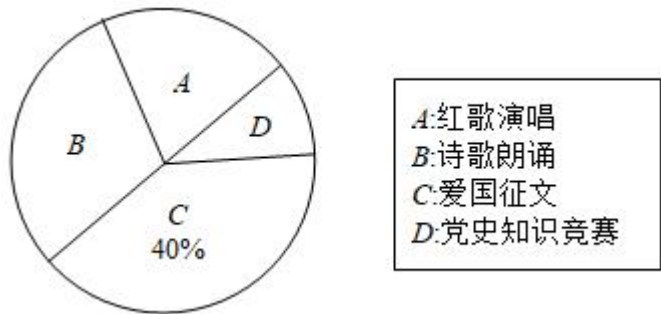
16. (3 分) 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ，点 E 在边 BC 上，点 F 在边 AD 的延长线上， $AF = EF$ ，设 $BE = x$ ， $AF = y$ ，当 $0 < x < 2$ 时， y 关于 x 的函数解析式为 _____．



三、解答题（本题共 4 小题，其中 17、19、20 题各 9 分，18 题 12 分，共 39 分）

17. (9 分) 计算： $\frac{a+3}{a-3} \cdot \frac{a^2+3a}{a^2+6a+9} - \frac{3}{a-3}$ ．

18. (12 分) 某校计划举办以“庆祝建党百年，传承红色基因”为主题的系列活动，活动分为红歌演唱、诗歌朗诵、爱国征文及党史知识竞赛，要求每名学生都参加活动且只能选择一项活动．为了解学生参加活动的情况，随机选取该学校部分学生进行调查，以下是根据调查结果绘制的统计图表的一部分．



活动项目	频数（人）	频率
------	-------	----

红歌演唱	10	0.2
诗歌朗诵		
爱国征文		
党史知识竞赛		0.1

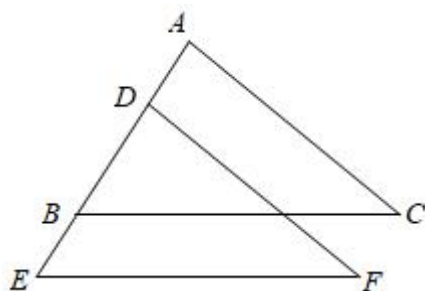
据以上信息，回答下列问题：

(1) 被调查的学生中，参加红歌演唱活动的学生人数为 _____ 人，参加爱国征文活动的学生人数占被调查学生总人数的百分比为 _____ %；

(2) 本次调查的样本容量为 _____，样本中参加党史知识竞赛活动的学生人数为 _____ 人；

(3) 若该校共有 800 名学生，请根据调查结果，估计参加诗歌朗诵活动的学生人数。

19. (9 分) 如图，点 A, D, B, E 在一条直线上， $AD = BE$ ， $AC = DF$ ， $AC \parallel DF$ 。求证： $BC = EF$ 。



20. (9 分) 某校为实现垃圾分类投放，准备在校园内摆放大、小两种垃圾桶。购买 2 个大垃圾桶和 4 个小垃圾桶共需 600 元；购买 6 个大垃圾桶和 8 个小垃圾桶共需 1560 元。

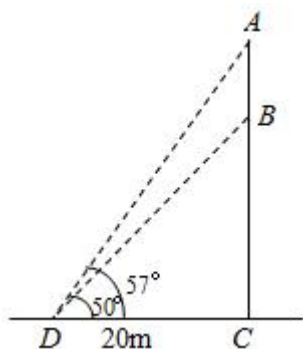
(1) 求大、小两种垃圾桶的单价；

(2) 该校购买 8 个大垃圾桶和 24 个小垃圾桶共需多少元？

四、解答题（本题共 3 小题，其中 21 题 9 分，22、23 题各 10 分，共 29 分。）

21. (9 分) 如图，建筑物 BC 上有一旗杆 AB ，从与 BC 相距 $20m$ 的 D 处观测旗杆顶部 A 的仰角为 57° ，观测旗杆底部 B 的仰角为 50° ，求旗杆 AB 的高度（结果取整数）。

（参考数据： $\sin 50^\circ \approx 0.766$ ， $\cos 50^\circ \approx 0.643$ ， $\tan 50^\circ \approx 1.192$ ； $\sin 57^\circ \approx 0.839$ ， $\cos 57^\circ \approx 0.545$ ， $\tan 57^\circ \approx 1.540$ ）



22. (10 分) 如图 1, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 D , OD 与 BC 相交于点 E , $BC \parallel MN$.

(1) 求证: $\angle BAC = \angle DOC$;

(2) 如图 2, 若 AC 是 $\odot O$ 的直径, E 是 OD 的中点, $\odot O$ 的半径为 4, 求 AE 的长.

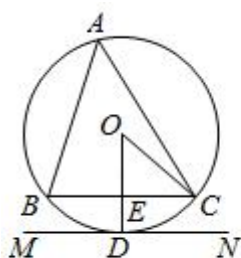


图 1

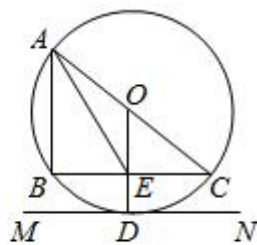
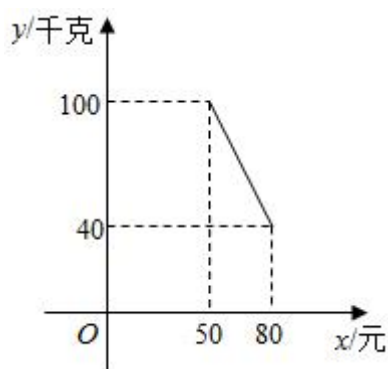


图 2

23. (10 分) 某电商销售某种商品一段时间后, 发现该商品每天的销售量 y (单位: 千克) 和每千克的售价 x (单位: 元) 满足一次函数关系 (如图所示), 其中 $50 \leq x \leq 80$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 若该种商品的成本为每千克 40 元, 该电商如何定价才能使每天获得的利润最大? 最大利润是多少?



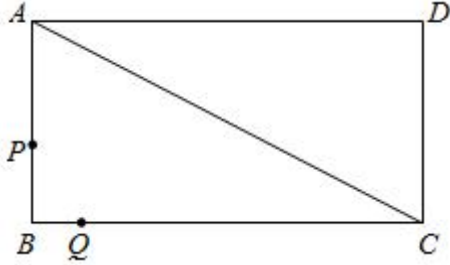
五、解答题 (24、25 小题 11 分, 26 小题 12 分, 共 34 分)

24. (11 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 为矩形, $AB = 3$, $BC = 4$, P 、 Q 均从点 B 出发, 点 P 以 2 个单位每秒的速度沿 $BA - AC$ 的方向运动, 点 Q 以 1 个单位每秒的速度沿 $BC - CD$ 运动,

设运动时间为 t 秒.

(1) 求 AC 的长;

(2) 若 $S_{\triangle BPQ} = S$, 求 S 关于 t 的解析式.

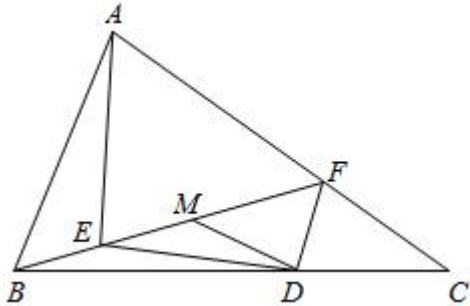


25. (11 分) 已知 $AB = BD$, $AE = EF$, $\angle ABD = \angle AEF$.

(1) 找出与 $\angle DBF$ 相等的角并证明;

(2) 求证: $\angle BFD = \angle AFB$;

(3) $AF = kDF$, $\angle EDF + \angle MDF = 180^\circ$, 求 $\frac{AE}{MF}$.



26. (12 分) 已知函数 $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + m & (x < m) \\ x^2 - mx + m & (x \geq m) \end{cases}$, 记该函数图象为 G .

(1) 当 $m = 2$ 时,

① 已知 $M(4, n)$ 在该函数图象上, 求 n 的值;

② 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 求函数 G 的最大值.

(2) 当 $m > 0$ 时, 作直线 $x = \frac{1}{2}m$ 与 x 轴交于点 P , 与函数 G 交于点 Q , 若 $\angle POQ = 45^\circ$

时, 求 m 的值;

(3) 当 $m \leq 3$ 时, 设图象与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交与点 B , 过点 B 作 $BC \perp BA$ 交直线 $x = m$ 于点 C , 设点 A 的横坐标为 a , C 点的纵坐标为 c , 若 $a = -3c$, 求 m 的值.

2021 年辽宁省大连市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 10 个小题，每题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项正确）

1.（3 分）-5 的相反数是（ ）

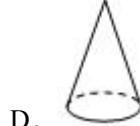
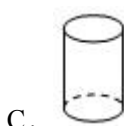
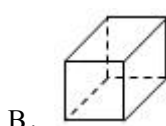
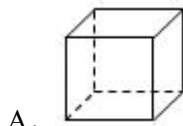
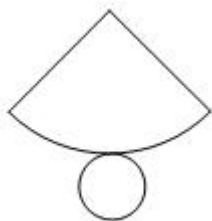
- A. 5 B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. -5

【分析】根据相反数的定义直接求得结果.

【解答】解：-5 的相反数是 5.

故选：A.

2.（3 分）某几何体的展开图如图所示，该几何体是（ ）



【分析】根据平面图形的折叠及立体图形的表面展开图的特点解题.

【解答】解：扇形和圆折叠后，能围成的几何体是圆锥.

故选：D.

3.（3 分）2021 年党中央首次颁发“光荣在党 50 年”纪念章，约 7100000 名党员获此纪念章. 数 7100000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 71×10^5 B. 7.1×10^5 C. 7.1×10^6 D. 0.71×10^7

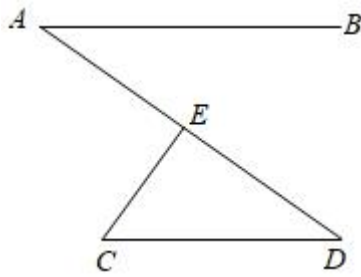
【分析】根据科学记数法的定义即可判断，将一个较大或较小的数字写成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ 且 n 为整数.

【解答】解：根据科学记数法的定义，将一个较大或较小的数字写成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ 且 n 为整数.

$$\therefore 7100000 = 7.1 \times 10^6.$$

故选：C.

4. (3分) 如图, $AB \parallel CD$, $CE \perp AD$, 垂足为 E , 若 $\angle A = 40^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数为 ()



- A. 40° B. 50° C. 60° D. 90°

【分析】根据平行线的性质, 可得 $\angle A = \angle D = 40^\circ$. 根据垂直的定义, 得 $\angle CED = 90^\circ$. 再根据三角形内角和定理, 可求出 $\angle C$ 的度数.

【解答】解: $\because AB \parallel CD$, $\angle A = 40^\circ$,

$$\therefore \angle D = \angle A = 40^\circ.$$

$$\because CE \perp AD,$$

$$\therefore \angle CED = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle CED + \angle C + \angle D = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle CED - \angle D = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

故选: B.

5. (3分) 下列运算正确的是 ()

A. $(a^2)^3 = a^8$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$

C. $(-3a)^2 = 6a^2$

D. $2ab^2 + 3ab^2 = 5a^2b^4$

【分析】根据幂的乘方和积的乘方、合并同类项法则、同底数幂的乘法分别求出每个式子的值, 再判断即可.

【解答】解: 选项 A、 $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$, 故本选项不符合题意;

选项 B、 $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$, 故本选项符合题意;

选项 C、 $(-3a)^2 = 9a^2$, 故本选项不符合题意;

选项 D、 $2ab^2 + 3ab^2 = 5ab^2$, 故本选项不符合题意;

故选: B.

6. (3分) 某校健美操队共有 10 名队员, 统计队员的年龄情况, 结果如下: 13 岁 3 人, 14 岁 5 人, 15 岁 2 人. 该健美操队队员的平均年龄为 ()

- A. 14.2 岁 B. 14.1 岁 C. 13.9 岁 D. 13.7 岁

【分析】直接利用加权平均数的计算公式计算得出答案.

【解答】解： $\because$ 13 岁 3 人，14 岁 5 人，15 岁 2 人，

$\therefore$ 该健美操队队员的平均年龄为： $\frac{13 \times 3 + 14 \times 5 + 15 \times 2}{10} = 13.9$ （岁）.

故选：C.

7.（3 分）下列计算正确的是（ ）

A. $(-\sqrt{3})^2 = -3$

B. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

C. $\sqrt[3]{-7} = 1$

D. $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 3$

【分析】根据二次根式的性质，立方根的概念，平方差公式进行化简计算，从而作出判断.

【解答】解：A、 $(-\sqrt{3})^2 = 3$ ，故此选项不符合题意；

B、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，正确，故此选项符合题意；

C、 $\sqrt[3]{-7} = -\sqrt[3]{7}$ ，故此选项不符合题意；

D、 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 2 - 1 = 1$ ，故此选项不符合题意，

故选：B.

8.（3 分）“杂交水稻之父”袁隆平和他的团队探索培育的“海水稻”在某试验田的产量逐年增加，2018 年平均亩产量约 500 公斤，2020 年平均亩产量约 800 公斤. 若设平均亩产量的年平均增长率为 x ，根据题意，可列方程为（ ）

A. $500(1+x) = 800$

B. $500(1+2x) = 800$

C. $500(1+x^2) = 800$

D. $500(1+x)^2 = 800$

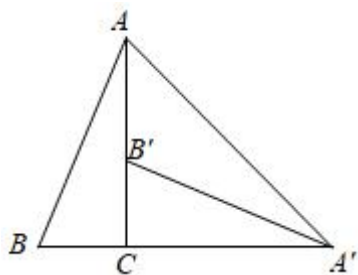
【分析】设水稻亩产量的年平均增长率为 x ，根据“2018 年平均亩产 $\times (1+\text{增长率})^2 = 2020$ 年平均亩产”即可列出关于 x 的一元二次方程，解方程即可得出结论.

【解答】解：水稻亩产量的年平均增长率为 x ，

根据题意得： $500(1+x)^2 = 800$ ，

故选：D.

9.（3 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = \alpha$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C$ ，点 B 的对应点 B' 在边 AC 上（不与点 A, C 重合），则 $\angle AA'B'$ 的度数为（ ）



- A. α B. $\alpha - 45^\circ$ C. $45^\circ - \alpha$ D. $90^\circ - \alpha$

【分析】由旋转知 $AC = A'C$, $\angle BAC = \angle CA'B'$, $\angle ACA' = 90^\circ$, 从而得出 $\triangle ACA'$ 是等腰直角三角形, 即可解决问题.

【解答】解: $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C$,

$$\therefore AC = A'C, \angle BAC = \angle CA'B', \angle ACA' = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ACA'$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle CA'A = 45^\circ,$$

$$\because \angle BAC = \alpha,$$

$$\therefore \angle CA'B' = \alpha,$$

$$\therefore \angle AA'B' = 45^\circ - \alpha.$$

故选: C.

10. (3 分) 下列说法正确的是 ()

①反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$;

②点 $P(-3, 2)$ 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上;

③反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象, 在每一个象限内, y 随 x 的增大而增大.

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

【分析】根据反比例函数的性质即可得出结果.

【解答】解: ①反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$, 故说法正确;

②因为 $-3 \times 2 = -6$, 故说法正确;

③因为 $k = 3 > 0$, 反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象, 在每一个象限内, y 随 x 的增大而减小, 故说法错误;

故选: A.

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

11. (3分) 不等式 $3x < x+6$ 的解集是 $x < 3$.

【分析】移项，合并同类项，系数化成1即可.

【解答】解： $3x < x+6$,

移项，得 $3x - x < 6$,

合并同类项，得 $2x < 6$,

系数化成1，得 $x < 3$,

故答案为： $x < 3$.

12. (3分) 在平面直角坐标系中，将点 $P(-2, 3)$ 向右平移4个单位长度，得到点 P' ，则点 P' 的坐标是 $(2, 3)$.

【分析】利用“横坐标，右移加，左移减；纵坐标，上移加，下移减”的规律求解可得.

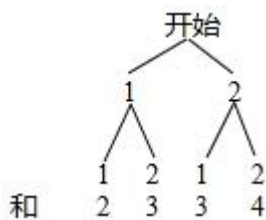
【解答】解：点 $P(-2, 3)$ 向右平移4个单位长度后得到点 P' 的坐标为 $(-2+4, 3)$ ，即 $(2, 3)$ ，

故答案为： $(2, 3)$.

13. (3分) 一个不透明的口袋中有两个完全相同的小球，把它们分别标号为1, 2. 随机摸取一个小球后，放回并摇匀，再随机摸取一个小球，两次取出的小球标号的和等于4的概率为 $\frac{1}{4}$.

【分析】画树状图，共有4种等可能的结果，两次取出的小球标号的和等于4的结果有1种，再由概率公式求解即可.

【解答】解：画树状图如图：



共有4种等可能的结果，两次取出的小球标号的和等于4的结果有1种，

∴两次取出的小球标号的和等于4的概率为 $\frac{1}{4}$,

故答案为： $\frac{1}{4}$.

14. (3分) 我国古代著作《增删算法统宗》中记载了一首古算诗：“林下牧童闹如簇，不知人数不知竹. 每人六竿多十四，每人八竿恰齐足.” 其大意是：“牧童们在树下拿着竹竿高兴地玩耍，不知有多少人和竹竿. 每人6竿，多14竿；每人8竿，恰好用完.” 若设

有牧童 x 人，根据题意，可列方程为 $\underline{6x+14=8x}$.

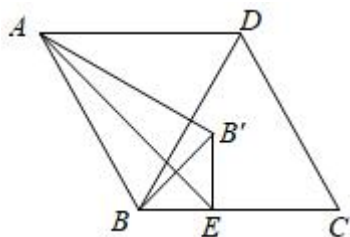
【分析】设有牧童 x 人，根据“每人 6 竿，多 14 竿；每人 8 竿，恰好用完”，结合竹竿的数量不变，即可得出关于 x 的一元一次方程，此题得解.

【解答】解：设有牧童 x 人，

依题意得： $6x+14=8x$.

故答案为： $6x+14=8x$.

15. (3 分) 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 60^\circ$ ，点 E 在边 BC 上，将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折 180° ，得到 $\triangle AB'E$ ，点 B 的对应点是点 B' . 若 $AB' \perp BD$ ， $BE = 2$ ，则 BB' 的长是 $\underline{2\sqrt{2}}$.



【分析】根据菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 60^\circ$ 可知 $\triangle ABD$ 是等边三角形，结合三线合一可得 $\angle BAB' = 30^\circ$ ，求出 $\angle ABB' = 75^\circ$ ，可得 $\angle EB'B = \angle EBB' = 45^\circ$ ，则 $\triangle BEB'$ 是直角三角形，借助勾股定理求出 BB' 的长即可.

【解答】解： $\because$ 菱形 $ABCD$ ，

$$\therefore AB = AD, AD \parallel BC,$$

$$\because \angle BAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\because AB' \perp BD,$$

$$\therefore \angle BAB' = \frac{1}{2} \angle BAD = 30^\circ,$$

$\because$ 将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折 180° ，得到 $\triangle AB'E$ ，

$$\therefore BE = B'E, AB = AB',$$

$$\therefore \angle ABB' = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle EBB' = \angle ABE - \angle ABB' = 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EB'B = \angle EBB' = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BEB' = 90^\circ,$$

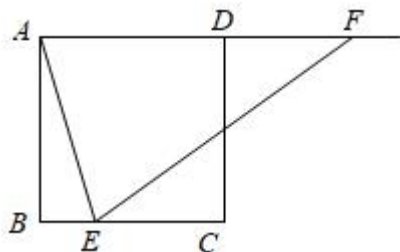
在 $\text{Rt}\triangle BEB'$ 中，由勾股定理得：

$$BB' = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

16. (3分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, 点 E 在边 BC 上, 点 F 在边 AD 的延长线上,

$AF = EF$, 设 $BE = x$, $AF = y$, 当 $0 < x < 2$ 时, y 关于 x 的函数解析式为 $y = \frac{4+x^2}{2x}$ ($0 < x < 2$).



【分析】 由勾股定理表示 AE , 通过作垂线构造直角三角形, 由等腰三角形的性质得出 $AM = ME$, 分别用含有 x 、 y 的代数式表示 AM , AE , 再根据相似三角形对应边成比例即可得出 y 与 x 之间的函数关系式.

【解答】 解: 过点 F 作 $FM \perp AE$, 垂足为 M ,

$$\because AF = EF,$$

$$\therefore AM = ME,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中,

$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4 + x^2},$$

$$\therefore AM = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2},$$

$$\because \angle B = \angle AMF = 90^\circ, \quad \angle FAM = \angle AEB,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle FMA,$$

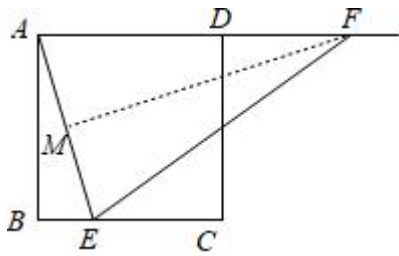
$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{BE}{AM},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{4+x^2}}{y} = \frac{x}{\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}},$$

$$\therefore xy = \frac{4+x^2}{2},$$

$$\text{即 } y = \frac{4+x^2}{2x} \quad (0 < x < 2),$$

故答案为: $y = \frac{4+x^2}{2x}$ ($0 < x < 2$).



三、解答题（本题共 4 小题，其中 17、19、20 题各 9 分，18 题 12 分，共 39 分）

17.（9 分）计算： $\frac{a+3}{a-3} \cdot \frac{a^2+3a}{a^2+6a+9} - \frac{3}{a-3}$.

【分析】分式的混合运算，先算乘法，然后再算减法.

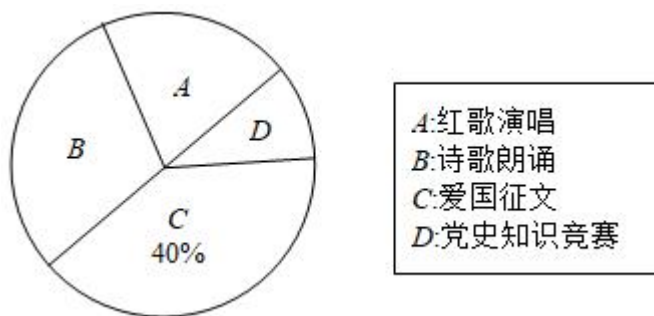
【解答】解：原式 $= \frac{a+3}{a-3} \cdot \frac{a(a+3)}{(a+3)^2} - \frac{3}{a-3}$

$$= \frac{a}{a-3} - \frac{3}{a-3}$$

$$= \frac{a-3}{a-3}$$

$$= 1.$$

18.（12 分）某校计划举办以“庆祝建党百年，传承红色基因”为主题的系列活动，活动分为红歌演唱、诗歌朗诵、爱国征文及党史知识竞赛，要求每名学生都参加活动且只能选择一项活动. 为了解学生参加活动的情况，随机选取该学校部分学生进行调查，以下是根据调查结果绘制的统计图表的一部分.



活动项目	频数（人）	频率
红歌演唱	10	0.2
诗歌朗诵		
爱国征文		
党史知识竞赛		0.1

据以上信息，回答下列问题：

（1）被调查的学生中，参加红歌演唱活动的学生人数为 10 人，参加爱国征文活动

的学生人数占被调查学生总人数的百分比为 40 %;

(2) 本次调查的样本容量为 50, 样本中参加党史知识竞赛活动的学生人数为 5 人;

(3) 若该校共有 800 名学生, 请根据调查结果, 估计参加诗歌朗诵活动的学生人数.

【分析】(1) 由频数分布表可得参加红歌演唱活动的学生人数, 由扇形图可得参加爱国征文活动的学生人数占被调查学生总人数的百分比;

(2) 由参加红歌演唱活动的学生人数及其频率可得本次调查的样本容量, 根据参加党史知识竞赛活动的学生人数的频率即可求解;

(3) 求出样本中参加爱国征文活动的学生人数, 根据样本容量求出样本中参加诗歌朗诵活动的学生人数, 可得样本中参加诗歌朗诵活动的学生人数所占比例, 即可求解.

【解答】解: (1) 由频数分布表可得参加红歌演唱活动的学生人数为 10 人, 由扇形图可得参加爱国征文活动的学生人数占被调查学生总人数的百分比为 40%,
故答案为: 10, 40;

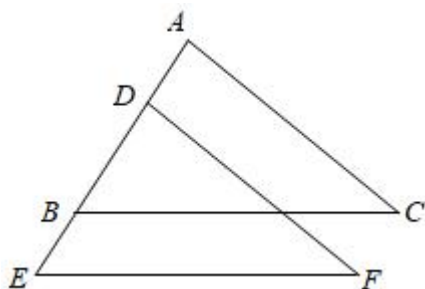
(2) 被调查的学生总数为 $10 \div 0.2 = 50$ (人),
 $50 \times 0.1 = 5$ (人),
故答案为: 50, 5;

(3) 样本中参加爱国征文活动的学生人数: $50 \times 40\% = 20$ (人),
样本中参加诗歌朗诵活动的学生人数: $50 - 10 - 20 - 5 = 15$ (人),

$$800 \times \frac{15}{50} = 240 \text{ (人)},$$

答: 估计参加诗歌朗诵活动的学生人数为 240 人.

19. (9 分) 如图, 点 A, D, B, E 在一条直线上, $AD = BE$, $AC = DF$, $AC \parallel DF$. 求证:
 $BC = EF$.



【分析】根据线段的和差得到 $AB = DE$ ，由平行线的性质得到 $\angle A = \angle EDF$ ，根据全等三角形的性质即可得到结论．

【解答】证明： $\because AD = BE$ ，

$$\therefore AD + BD = BE + BD,$$

即 $AB = DE$ ，

$$\because AC \parallel DF,$$

$$\therefore \angle A = \angle EDF,$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle A = \angle EDF, \\ AC = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BC = EF.$$

20. (9分) 某校为实现垃圾分类投放，准备在校园内摆放大、小两种垃圾桶．购买2个大垃圾桶和4个小垃圾桶共需600元；购买6个大垃圾桶和8个小垃圾桶共需1560元．

(1) 求大、小两种垃圾桶的单价；

(2) 该校购买8个大垃圾桶和24个小垃圾桶共需多少元？

【分析】(1) 设大垃圾桶的单价为 x 元，小垃圾桶的单价为 y 元，根据“购买2个大垃圾桶和4个小垃圾桶共需600元；购买6个大垃圾桶和8个小垃圾桶共需1560元”，即可得出关于 x, y 的二元一次方程组，解之即可得出结论；

(2) 利用总价 = 单价 $\times$ 数量，即可求出该校购买8个大垃圾桶和24个小垃圾桶所需费用．

【解答】解：(1) 设大垃圾桶的单价为 x 元，小垃圾桶的单价为 y 元，

$$\text{依题意得：} \begin{cases} 2x + 4y = 600 \\ 6x + 8y = 1560 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 180 \\ y = 60 \end{cases}.$$

答：大垃圾桶的单价为180元，小垃圾桶的单价为60元．

$$(2) 180 \times 8 + 60 \times 24 = 2880 \text{ (元)}.$$

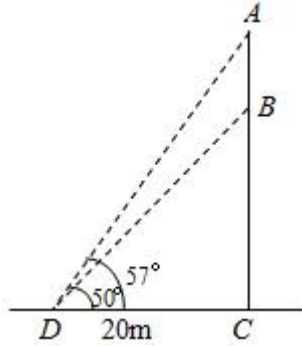
答：该校购买8个大垃圾桶和24个小垃圾桶共需2880元．

四、解答题(本题共3小题，其中21题9分，22、23题各10分，共29分)

21. (9分) 如图，建筑物 BC 上有一旗杆 AB ，从与 BC 相距 $20m$ 的 D 处观测旗杆顶部 A 的

仰角为 57° ，观测旗杆底部 B 的仰角为 50° ，求旗杆 AB 的高度（结果取整数）。

（参考数据： $\sin 50^\circ \approx 0.766$ ， $\cos 50^\circ \approx 0.643$ ， $\tan 50^\circ \approx 1.192$ ； $\sin 57^\circ \approx 0.839$ ， $\cos 57^\circ \approx 0.545$ ， $\tan 57^\circ \approx 1.540$ ）



【分析】在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，由锐角三角函数定义求得 BC 的长，再在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，由锐角三角函数定义求得 AC 的长，即可解决问题。

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $\tan \angle BDC = \frac{BC}{CD}$ ，

$$\therefore BC = CD \cdot \tan \angle BDC = 20 \times \tan 50^\circ \approx 20 \times 1.192 = 23.84 \text{ (m)},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\tan \angle ADC = \frac{AC}{CD}$ ，

$$\therefore AC = CD \cdot \tan \angle ADC = 20 \times \tan 57^\circ \approx 20 \times 1.540 = 30.8 \text{ (m)},$$

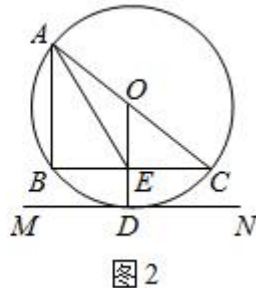
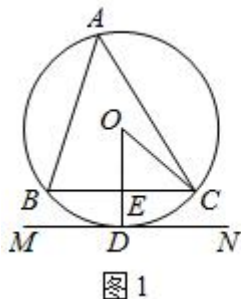
$$\therefore AB = AC - BC = 30.8 - 23.84 \approx 7 \text{ (m)}.$$

答：旗杆 AB 的高度约为 7m 。

22.（10分）如图1， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 D ， OD 与 BC 相交于点 E ， $BC \parallel MN$ 。

（1）求证： $\angle BAC = \angle DOC$ ；

（2）如图2，若 AC 是 $\odot O$ 的直径， E 是 OD 的中点， $\odot O$ 的半径为 4，求 AE 的长。



【分析】（1）连接 OB ，如图1，根据切线的性质得到 $OD \perp MN$ ，则 $OD \perp BC$ ，利用垂径定理得到 $\widehat{BD} = \widehat{CD}$ ，然后根据圆周角定理得到结论；

(2) 先计算出 $CE = 2\sqrt{3}$, 根据垂径定理得到 $BE = CE = 2\sqrt{3}$, 接着利用勾股定理计算出 AB , 然后计算 AE 的长.

【解答】(1) 证明: 连接 OB , 如图 1,

$\because$ 直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 D ,

$\therefore OD \perp MN$,

$\because BC \parallel MN$,

$\therefore OD \perp BC$,

$\therefore \widehat{BD} = \widehat{CD}$,

$\therefore \angle BOD = \angle COD$,

$\because \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$,

$\therefore \angle BAC = \angle COD$;

(2) $\because E$ 是 OD 的中点,

$\therefore OE = DE = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle OCE$ 中, $CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$,

$\because OE \perp BC$,

$\therefore BE = CE = 2\sqrt{3}$,

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$,

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$.

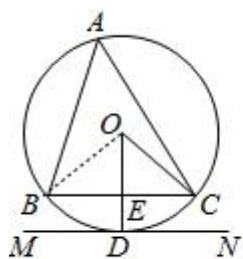


图 1

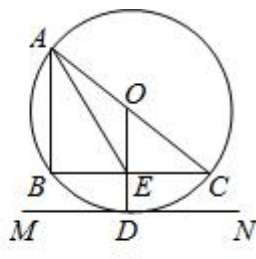


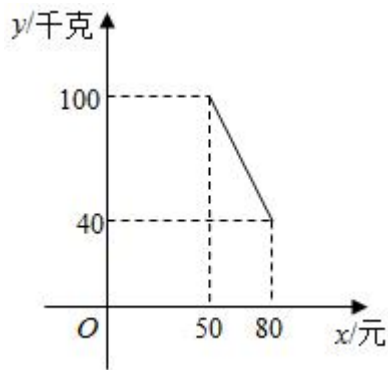
图 2

23. (10 分) 某电商销售某种商品一段时间后, 发现该商品每天的销售量 y (单位: 千克)

和每千克的售价 x (单位: 元) 满足一次函数关系 (如图所示), 其中 $50 \leq x \leq 80$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 若该种商品的成本为每千克 40 元, 该电商如何定价才能使每天获得的利润最大?
最大利润是多少?



【分析】(1) 待定系数法求解可得;

(2) 设电商每天获得的利润为 w 元, 根据“总利润 = 每千克利润 $\times$ 销售量”可得函数解析式, 将其配方成顶点式即可得最值情况.

【解答】解: (1) 设 $y = kx + b$,

将 $(50, 100)$ 、 $(80, 40)$ 代入, 得:
$$\begin{cases} 50k + b = 100 \\ 80k + b = 40 \end{cases}$$
,

解得:
$$\begin{cases} k = -2 \\ b = 200 \end{cases}$$

$\therefore y = -2x + 200 \quad (50 \leq x \leq 80)$;

(2) 设电商每天获得的利润为 w 元,

则 $w = (x - 40)(-2x + 200)$

$$= -2x^2 + 280x - 8000$$

$$= -2(x - 70)^2 + 1800,$$

$\because -2 < 0$, 且对称轴是直线 $x = 70$,

又 $\because 50 \leq x \leq 80$,

$\therefore$ 当 $x = 70$ 时, w 取得最大值为 1800,

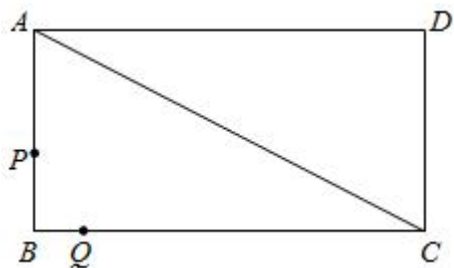
答: 该电商售价为 70 元时获得最大利润, 最大利润是 1800 元.

五、解答题 (24、25 小题 11 分, 26 小题 12 分, 共 34 分)

24. (11 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 为矩形, $AB = 3$, $BC = 4$, P 、 Q 均从点 B 出发, 点 P 以 2 个单位每秒的速度沿 $BA - AC$ 的方向运动, 点 Q 以 1 个单位每秒的速度沿 $BC - CD$ 运动, 设运动时间为 t 秒.

(1) 求 AC 的长;

(2) 若 $S_{\triangle BPQ} = S$, 求 S 关于 t 的解析式.



【分析】(1) 根据勾股定理直接计算 AC 的长;

(2) 根据点 P 、 Q 的运动位置进行分类, 分别画图表示相应的 $\triangle BPQ$ 的面积即可.

【解答】解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

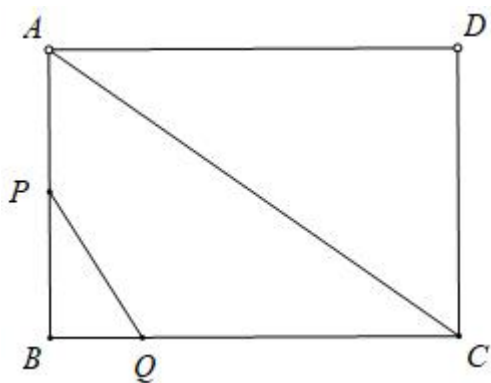
$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理得:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

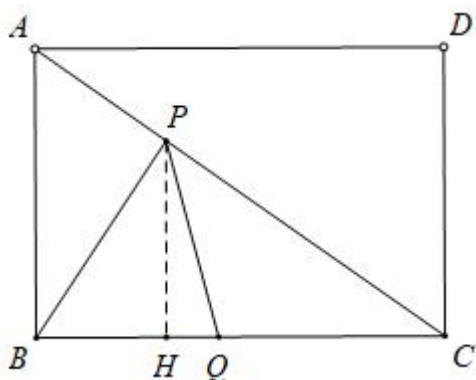
$\therefore AC$ 的长为 5;

(2) 当 $0 < t \leq 1.5$ 时, 如图,



$$S = \frac{1}{2} \times BP \times BQ = \frac{1}{2} \times 2t \times t = t^2;$$

当 $1.5 < t \leq 4$ 时, 如图, 作 $PH \perp BC$ 于 H ,



$$\therefore CP = 8 - 2t,$$

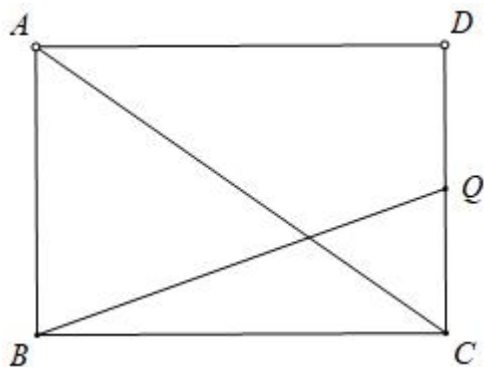
$$\because \sin \angle BCA = \frac{AB}{AC} = \frac{PH}{PC},$$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{PH}{8-2t},$$

$$\therefore PH = \frac{24}{5} - \frac{6t}{5},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times BQ \times PH = \frac{1}{2} \times t \times \left(\frac{24}{5} - \frac{6t}{5} \right) = -\frac{3t^2}{5} + \frac{12t}{5};$$

当 $4 < t \leq 7$ 时, 如图, 点 P 与点 C 重合,



$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times (t - 4) = 2t - 8.$$

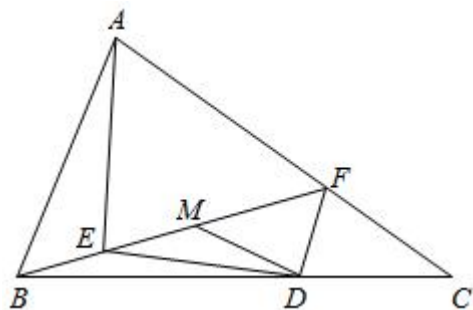
$$\text{综上所述: } S = \begin{cases} t^2 & (0 < t \leq 1.5) \\ -\frac{3t^2}{5} + \frac{12t}{5} & (1.5 < t \leq 4) \\ 2t - 8 & (4 < t \leq 7) \end{cases}$$

25. (11 分) 已知 $AB = BD$, $AE = EF$, $\angle ABD = \angle AEF$.

(1) 找出与 $\angle DBF$ 相等的角并证明;

(2) 求证: $\angle BFD = \angle AFB$;

(3) $AF = kDF$, $\angle EDF + \angle MDF = 180^\circ$, 求 $\frac{AE}{MF}$.



【分析】(1) 由三角形的外角及已知条件 $\angle ABD = \angle AEF$, 可找出并证明 $\angle BAE = \angle DBF$;

(2) 连接 AD , 先证明 $\triangle ABD \sim \triangle AEF$, 得出 $\angle BDG = \angle AFB$, 再证明 $\triangle BGD \sim \triangle AGF$ 、 $\triangle AGB \sim \triangle FGD$, 即可证明 $\angle BFD = \angle AFB$;

(3) 作点 D 关于直线 BF 的对称点 D' , 连接 MD' , 作 $EH//MD'$ 交 AC 于点 H , 可证明 $\triangle EFD \cong \triangle EAH$, 进而得出结论 .

【解答】解: (1) 如图 1, $\angle BAE = \angle DBF$,

证明: $\because \angle DBF + \angle ABF = \angle ABD$, $\angle ABD = \angle AEF$,

$$\therefore \angle DBF + \angle ABF = \angle AEF ,$$

$$\because \angle AEF = \angle BAE + \angle ABF ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle ABF = \angle DBF + \angle ABF ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DBF .$$

(2) 证明: 如图 2, 连接 AD 交 BF 于点 G ,

$$\because AB = BD , AE = EF ,$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EF} ,$$

$$\because \angle ABD = \angle AEF ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle AEF ,$$

$$\therefore \angle BDG = \angle AFB ,$$

$$\because \angle BGD = \angle AGF ,$$

$$\therefore \triangle BGD \sim \triangle AGF ,$$

$$\therefore \frac{BG}{AG} = \frac{DG}{FG} ,$$

$$\therefore \frac{BG}{DG} = \frac{AG}{FG} ,$$

$$\because \angle AGB = \angle FGD ,$$

$$\therefore \triangle AGB \sim \triangle FGD ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BFD ,$$

$$\because \angle BAD = \angle BDG = \angle AFB ,$$

$$\therefore \angle BFD = \angle AFB .$$

(3) 如图 3, 作点 D 关于直线 BF 的对称点 D' , 连接 MD' 、 DD' , 作 $EH//MD'$ 交 AC 于点 H , 则 BF 垂直平分 DD' ,

$$\therefore D'F = DF , D'M = DM ,$$

$$\because MF = MF ,$$

$$\therefore \triangle D'MF \cong \triangle DMF ,$$

$$\therefore \angle EHF = \angle MD'F = \angle MDF ,$$

$$\because \angle EDF + \angle MDF = 180^\circ, \quad \angle EHA + \angle EHF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle EHA,$$

$$\because \angle EFD = \angle AFB = \angle EAH, \quad EF = AE,$$

$$\therefore \triangle EFD \cong \triangle EAH \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DF = AH,$$

$$\because \frac{AE}{MF} = \frac{EF}{MF} = \frac{HF}{D'F}, \quad D'F = DF,$$

$$\therefore \frac{AE}{MF} = \frac{HF}{DF} = \frac{AF - AH}{DF} = \frac{AF - DF}{DF} = \frac{AF}{DF} - 1,$$

$$\because AF = kDF,$$

$$\therefore \frac{AF}{DF} = k,$$

$$\therefore \frac{AE}{MF} = k - 1.$$

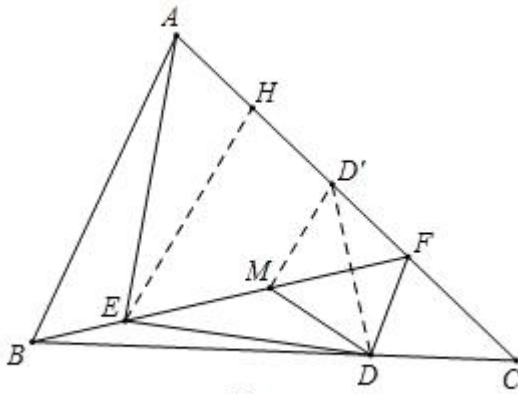


图3

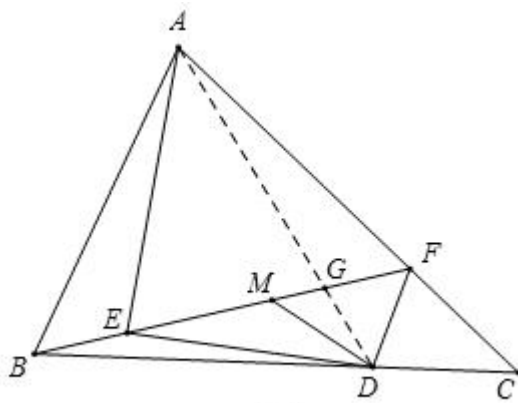


图2

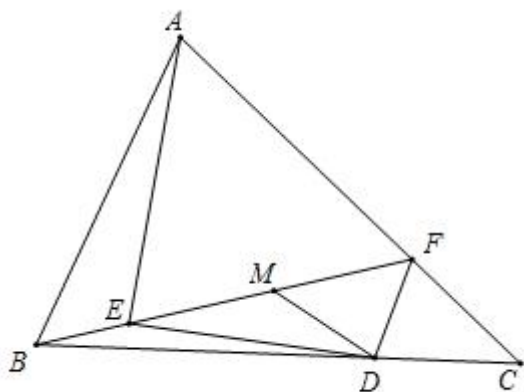


图1

26. (12分) 已知函数 $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + m & (x < m) \\ x^2 - mx + m & (x \geq m) \end{cases}$, 记该函数图象为 G .

(1) 当 $m = 2$ 时,

① 已知 $M(4, n)$ 在该函数图象上, 求 n 的值;

② 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 求函数 G 的最大值.

(2) 当 $m > 0$ 时, 作直线 $x = \frac{1}{2}m$ 与 x 轴交于点 P , 与函数 G 交于点 Q , 若 $\angle POQ = 45^\circ$ 时, 求 m 的值;

(3) 当 $m \leq 3$ 时, 设图象与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 过点 B 作 $BC \perp BA$ 交直线 $x = m$ 于点 C , 设点 A 的横坐标为 a , C 点的纵坐标为 c , 若 $a = -3c$, 求 m 的值.

【分析】 (1) 先把 $m = 2$ 代入函数 y 中, ① 把 $M(4, n)$ 代入 $y = x^2 - 2x + 2$ 中, 可得 n 的值;

② 将 $0 \leq x \leq 2$ 分为两部分确定 y 的最大值, 当 $0 \leq x < 2$ 时, 将 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$ 配方可得最值, 再将 $x = 2$ 代入 $y = x^2 - 2x + 2$ 中, 可得 $y = 2$, 对比可得函数 G 的最大值;

(2) 证明 $\triangle POQ$ 是等腰直角三角形, 得 $OP = PQ$, 列方程可得结论;

(3) 如图 2, 过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于 D , 证明 $\triangle ABO \cong \triangle BCD$ (ASA), 得 $OA = BD$, 列方程可得结论.

【解答】 解: (1) 当 $m = 2$ 时, $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 & (x < 2) \\ x^2 - 2x + 2 & (x \geq 2) \end{cases}$,

① $\because M(4, n)$ 在该函数图象上,

$$\therefore n = 4^2 - 2 \times 4 + 2 = 10;$$

② 当 $0 \leq x < 2$ 时, $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + 2\frac{1}{2}$.

$$\because -\frac{1}{2} < 0,$$

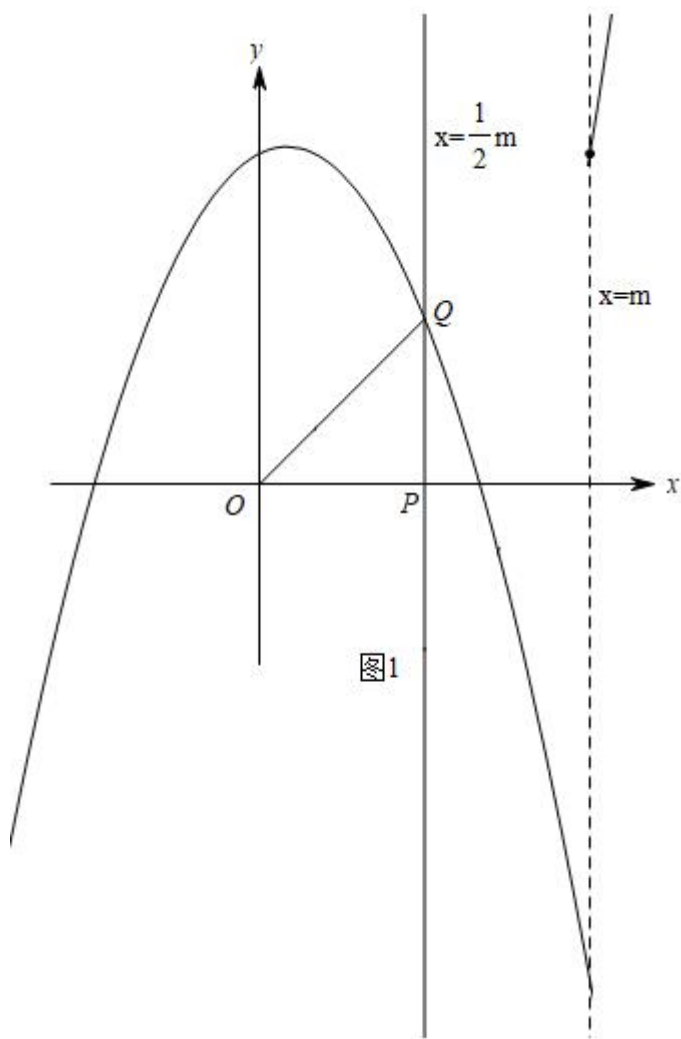
$$\therefore \text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } y \text{ 有最大值是 } 2\frac{1}{8},$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 2,$$

$$\because 2 < 2\frac{1}{8},$$

$$\therefore \text{当 } 0 \leq x \leq 2 \text{ 时, 函数 } G \text{ 的最大值是 } 2\frac{1}{8};$$

$$(2) \text{ 如图 1, 由题意得: } OP = \frac{1}{2}m,$$



$$\because \angle POQ = 45^\circ, \angle OPQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle POQ \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore OP = PQ,$$

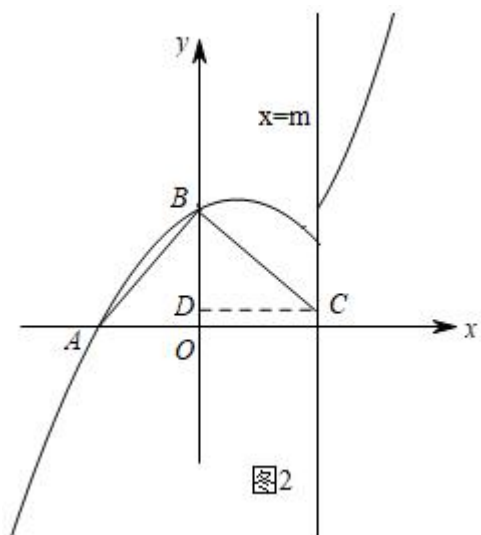
$$\therefore \frac{1}{2}m = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}m\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m + m,$$

$$\text{解得: } m_1 = 0, m_2 = 6,$$

$$\because m > 0,$$

$$\therefore m = 6;$$

(3) 如图 2, 过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于 D ,



当 $x = 0$ 时, $y = m$,

$$\therefore OB = m,$$

$$\because CD = m,$$

$$\therefore CD = OB,$$

$$\because AB \perp BC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABO + \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\because \angle CBD + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle BCD,$$

$$\because \angle AOB = \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle BCD \text{ (ASA)},$$

$$\therefore OA = BD,$$

当 $x < m$ 时, $y = 0$, 即 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + m = 0$,

$$x^2 - x - 2m = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 8m}}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2},$$

$$\therefore OA = \frac{\sqrt{1 + 8m} - 1}{2}, \text{ 且 } -\frac{1}{8} \leq m \leq 3,$$

$\because$ 点 A 的横坐标为 a , C 点的纵坐标为 c , 若 $a = -3c$,

$$\therefore OD = c = -\frac{1}{3}a,$$

$$\therefore BD = m - OD = m + \frac{1}{3}a,$$

$$\because OA = BD,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{1+8m}-1}{2} = m + \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\sqrt{1+8m}}{2},$$

$$\text{解得: } m_1 = 0 \text{ (此时, } A, B, C \text{ 三点重合, 舍), } m_2 = \frac{20}{9}.$$