

2019 年辽宁省沈阳市中考数学试卷

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个答案是正确的.每小题 2 分，共 20 分）

1. (2 分) -5 的相反数是 ()

A. 5

B. -5

C. $\frac{1}{5}$

D. $-\frac{1}{5}$

2. (2 分) 2019 年 1 月 1 日起我国开始贯彻《国务院关于印发个人所得税专项附加扣除暂行办法的通知》的要求，此次减税范围广，其中有 6500 万人减税 70% 以上，将数据 6500 用科学记数法表示为 ()

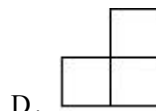
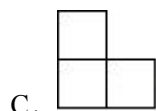
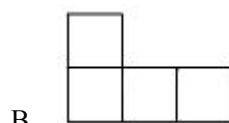
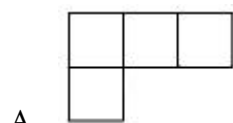
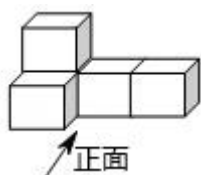
A. 6.5×10^2

B. 6.5×10^3

C. 65×10^3

D. 0.65×10^4

3. (2 分) 如图是由五个相同的小立方块搭成的几何体，这个几何体的俯视图是 ()



4. (2 分) 下列说法正确的是 ()

A. 若甲、乙两组数据的平均数相同， $S_{\text{甲}}^2 = 0.1$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 0.04$ ，则乙组数据较稳定

B. 如果明天降水的概率是 50%，那么明天有半天都在降雨

C. 了解全国中学生的节水意识应选用普查方式

D. 早上的太阳从西方升起是必然事件

5. (2 分) 下列运算正确的是 ()

A. $2m^3 + 3m^2 = 5m^5$

B. $m^3 \div m^2 = m$

C. $m \cdot (m^2)^3 = m^6$

D. $(m - n)(n - m) = n^2 - m^2$

6. (2 分) 某青少年篮球队有 12 名队员，队员的年龄情况统计如下：

年龄 (岁)	12	13	14	15	16
人数	3	1	2	5	1

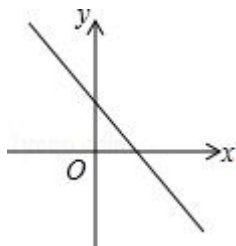
则这 12 名队员年龄的众数和中位数分别是 ()

- A. 15 岁和 14 岁 B. 15 岁和 15 岁
C. 15 岁和 14.5 岁 D. 14 岁和 15 岁

7. (2 分) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, AD 和 $A'D'$ 是它们的对应中线, 若 $AD = 10$, $A'D' = 6$, 则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长比是 ()

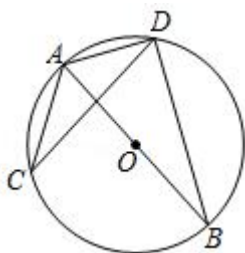
- A. 3: 5 B. 9: 25 C. 5: 3 D. 25: 9

8. (2 分) 已知一次函数 $y = (k+1)x + b$ 的图象如图所示, 则 k 的取值范围是 ()



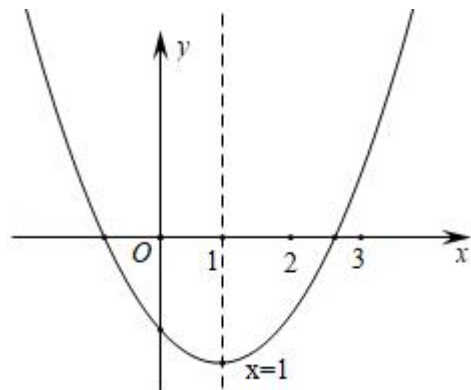
- A. $k < 0$ B. $k < -1$ C. $k < 1$ D. $k > -1$

9. (2 分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 和点 D 是 $\odot O$ 上位于直径 AB 两侧的点, 连接 AC , AD , BD , CD , 若 $\odot O$ 的半径是 13, $BD = 24$, 则 $\sin \angle ACD$ 的值是 ()



- A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{5}{13}$

10. (2 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 则下列结论正确的是 ()



- A. $abc < 0$ B. $b^2 - 4ac < 0$ C. $a - b + c < 0$ D. $2a + b = 0$

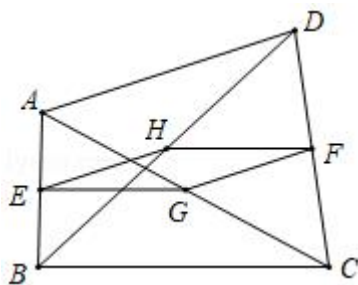
二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

11. (3 分) 因式分解: $-x^2 - 4y^2 + 4xy = \underline{\hspace{2cm}}$.

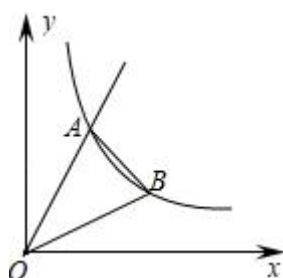
12. (3分) 二元一次方程组 $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$ 的解是_____.

13. (3分) 一个口袋中有红球、白球共 10 个, 这些球除颜色外都相同. 将口袋中的球搅拌均匀, 从中随机摸出一个球, 记下它的颜色后再放回口袋中, 不断重复这一过程, 共摸了 100 次球, 发现有 70 次摸到红球. 请你估计这个口袋中有_____个白球.

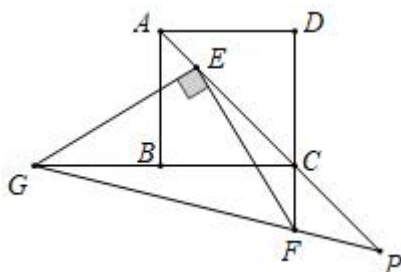
14. (3分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F, G, H 分别是 AB, CD, AC, BD 的中点, 若 $AD=BC=2\sqrt{5}$, 则四边形 $EGFH$ 的周长是_____.



15. (3分) 如图, 正比例函数 $y_1 = k_1x$ 的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ ($x > 0$) 的图象相交于点 $A(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, 点 B 是反比例函数图象上一点, 它的横坐标是 3, 连接 OB, AB , 则 $\triangle AOB$ 的面积是_____.



16. (3分) 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上有一点 E , 且 $CE = 4AE$, 点 F 在 DC 的延长线上, 连接 EF , 过点 E 作 $EG \perp EF$, 交 CB 的延长线于点 G , 连接 GF 并延长, 交 AC 的延长线于点 P , 若 $AB = 5$, $CF = 2$, 则线段 EP 的长是_____.



三、解答题 (第 17 小题 6 分, 第 18、19 小题各 8 分, 共 22 分)

17. (6分) 计算: $(-\frac{1}{2})^{-2} + 2\cos 30^\circ - |1 - \sqrt{3}| + (\pi - 2019)^0$.

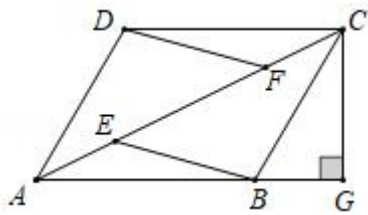
18. (8分) 为了丰富校园文化生活, 提高学生的综合素质, 促进中学生全面发展, 学校开

展了多种社团活动. 小明喜欢的社团有: 合唱社团、足球社团、书法社团、科技社团 (分别用字母 A, B, C, D 依次表示这四个社团), 并把这四个字母分别写在四张完全相同的不透明的卡片的正面上, 然后将这四张卡片背面朝上洗匀后放在桌面上.

- (1) 小明从中随机抽取一张卡片是足球社团 B 的概率是_____.
- (2) 小明先从中随机抽取一张卡片, 记录下卡片上的字母后不放回, 再从剩余的卡片中随机抽取一张卡片, 记录下卡片上的字母. 请你用列表法或画树状图法求出小明两次抽取的卡片中有一张是科技社团 D 的概率.

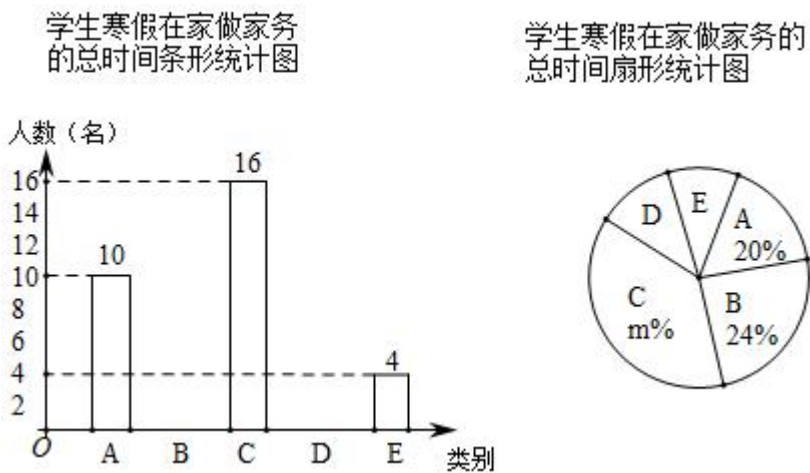
19. (8 分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E 和点 F 是对角线 AC 上的两点, $AE = CF$, $DF = BE$, 且 $DF \parallel BE$, 过点 C 作 $CG \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 G .

- (1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;
- (2) 若 $\tan \angle CAB = \frac{2}{5}$, $\angle CBG = 45^\circ$, $BC = 4\sqrt{2}$, 则 $\square ABCD$ 的面积是_____.



四、(每小题 8 分, 共 16 分)

20. (8 分) “勤劳”是中华民族的传统美德, 学校要求同学们在家里帮助父母做一些力所能及的家务. 在本学期开学初, 小颖同学随机调查了部分同学寒假在家做家务的总时间, 设被调查的每位同学寒假在家做家务的总时间为 x 小时, 将做家务的总时间分为五个类别: $A (0 \leq x < 10)$, $B (10 \leq x < 20)$, $C (20 \leq x < 30)$, $D (30 \leq x < 40)$, $E (x \geq 40)$. 并将调查结果制成如下两幅不完整的统计图:



根据统计图提供的信息，解答下列问题：

- (1) 本次共调查了_____名学生；
- (2) 请根据以上信息直接在答题卡中补全条形统计图；
- (3) 扇形统计图中 m 的值是_____，类别 D 所对应的扇形圆心角的度数是_____度；
- (4) 若该校有 800 名学生，根据抽样调查的结果，请你估计该校有多少名学生寒假在家做家务的总时间不低于 20 小时。

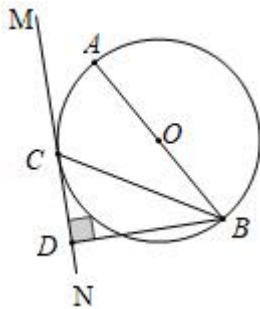
21. (8 分) 2019 年 3 月 12 日是第 41 个植树节，某单位积极开展植树活动，决定购买甲、乙两种树苗，用 800 元购买甲种树苗的棵数与用 680 元购买乙种树苗的棵数相同，乙种树苗每棵比甲种树苗每棵少 6 元。

- (1) 求甲种树苗每棵多少元？
- (2) 若准备用 3800 元购买甲、乙两种树苗共 100 棵，则至少要购买乙种树苗多少棵？

五、(本题 10 分)

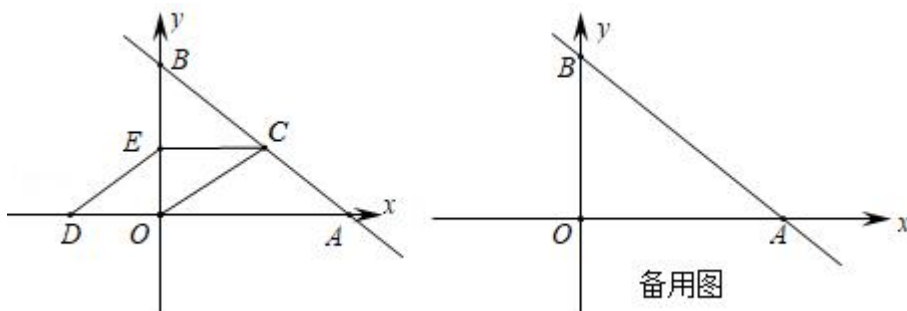
22. (10 分) 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， BC 是 $\odot O$ 的弦，直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 C ，过点 B 作 $BD \perp MN$ 于点 D 。

- (1) 求证： $\angle ABC = \angle CBD$ ；
- (2) 若 $BC = 4\sqrt{5}$ ， $CD = 4$ ，则 $\odot O$ 的半径是_____。



六、(本题 10 分)

23. (10 分) 在平面直角坐标系中，直线 $y = kx + 4$ ($k \neq 0$) 交 x 轴于点 $A(8, 0)$ ，交 y 轴于点 B 。



(1) k 的值是_____;

(2) 点 C 是直线 AB 上的一个动点, 点 D 和点 E 分别在 x 轴和 y 轴上.

①如图, 点 E 为线段 OB 的中点, 且四边形 $OCED$ 是平行四边形时, 求 $\square OCED$ 的周长;

②当 CE 平行于 x 轴, CD 平行于 y 轴时, 连接 DE , 若 $\triangle CDE$ 的面积为 $\frac{33}{4}$, 请直接写出点 C 的坐标.

七、(本题 12 分)

24. (12 分) 思维启迪:

(1) 如图 1, A, B 两点分别位于一个池塘的两端, 小亮想用绳子测量 A, B 间的距离, 但绳子不够长, 聪明的小亮想出一个办法: 先在地上取一个可以直接到达 B 点的点 C , 连接 BC , 取 BC 的中点 P (点 P 可以直接到达 A 点), 利用工具过点 C 作 $CD \parallel AB$ 交 AP 的延长线于点 D , 此时测得 $CD = 200$ 米, 那么 A, B 间的距离是_____米.

思维探索:

(2) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, $AC = BC$, $AE = DE$, 且 $AE < AC$, $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$, 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针方向旋转, 把点 E 在 AC 边上时 $\triangle ADE$ 的位置作为起始位置 (此时点 B 和点 D 位于 AC 的两侧), 设旋转角为 α , 连接 BD , 点 P 是线段 BD 的中点, 连接 PC, PE .

①如图 2, 当 $\triangle ADE$ 在起始位置时, 猜想: PC 与 PE 的数量关系和位置关系分别是_____;

②如图 3, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 点 D 落在 AB 边上, 请判断 PC 与 PE 的数量关系和位置关系, 并证明你的结论;

③当 $\alpha = 150^\circ$ 时, 若 $BC = 3$, $DE = 1$, 请直接写出 PC^2 的值.

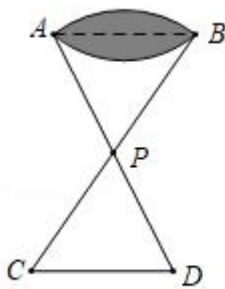


图1

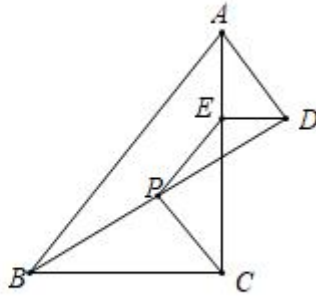


图2

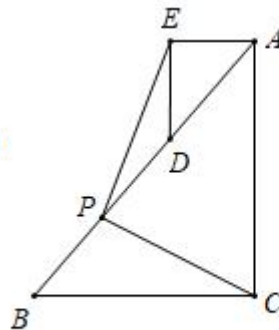
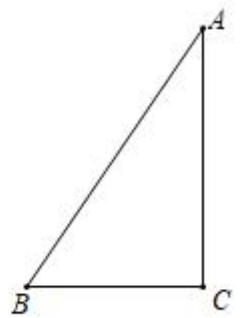


图3

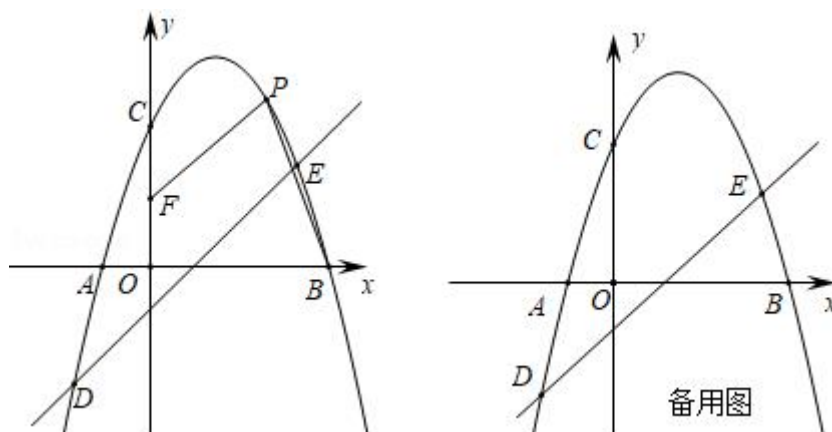


备用图

八、(本题 12 分)

25. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 抛物线经过点 $D(-2, -3)$ 和点 $E(3,$

2), 点 P 是第一象限抛物线上的一个动点.



(1) 求直线 DE 和抛物线的表达式;

(2) 在 y 轴上取点 $F(0, 1)$, 连接 PF, PB , 当四边形 $OBPF$ 的面积是 7 时, 求点 P 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 当点 P 在抛物线对称轴的右侧时, 直线 DE 上存在两点 M, N (点 M 在点 N 的上方), 且 $MN = 2\sqrt{2}$, 动点 Q 从点 P 出发, 沿 $P \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow A$ 的路线运动到终点 A , 当点 Q 的运动路程最短时, 请直接写出此时点 N 的坐标.

2019 年辽宁省沈阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个答案是正确的.每小题 2 分，共 20 分）

1.（2 分）-5 的相反数是（ ）

A. 5

B. -5

C. $\frac{1}{5}$

D. $-\frac{1}{5}$

【解答】解：-5 的相反数是 5，

故选：A.

2.（2 分）2019 年 1 月 1 日起我国开始贯彻《国务院关于印发个人所得税专项附加扣除暂行办法的通知》的要求，此次减税范围广，其中有 6500 万人减税 70%以上，将数据 6500 用科学记数法表示为（ ）

A. 6.5×10^2

B. 6.5×10^3

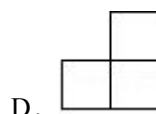
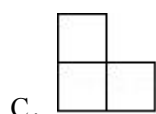
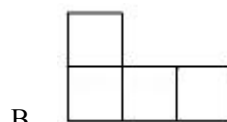
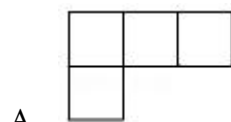
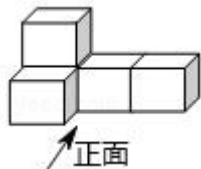
C. 65×10^3

D. 0.65×10^4

【解答】解： $6500 = 6.5 \times 10^3$ ，

故选：B.

3.（2 分）如图是由五个相同的小立方块搭成的几何体，这个几何体的俯视图是（ ）



【解答】解：从上面看易得上面一层有 3 个正方形，下面左边有一个正方形.

故选：A.

4.（2 分）下列说法正确的是（ ）

A. 若甲、乙两组数据的平均数相同， $S_{\text{甲}}^2 = 0.1$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 0.04$ ，则乙组数据较稳定

B. 如果明天降水的概率是 50%，那么明天有半天都在降雨

C. 了解全国中学生的节水意识应选用普查方式

D. 早上的太阳从西方升起是必然事件

【解答】解： A 、 $\because S_{甲}^2 = 0.1$ ， $S_{乙}^2 = 0.04$ ， $\therefore S_{甲}^2 > S_{乙}^2$ ， $\therefore$ 乙组数据较稳定，故本选项正确；

B 、明天降雨的概率是 50%表示降雨的可能性，故此选项错误；

C 、了解全国中学生的节水意识应选用抽样调查方式，故本选项错误；

D 、早上的太阳从西方升起是不可能事件，故本选项错误；

故选： A 。

5. (2 分) 下列运算正确的是 ()

$A. 2m^3 + 3m^2 = 5m^5$

$B. m^3 \div m^2 = m$

$C. m \cdot (m^2)^3 = m^6$

$D. (m - n)(n - m) = n^2 - m^2$

【解答】解： $A. 2m^3 + 3m^2 = 5m^5$ ，不是同类项，不能合并，故错误；

$B. m^3 \div m^2 = m$ ，正确；

$C. m \cdot (m^2)^3 = m^7$ ，故错误；

$D. (m - n)(n - m) = -(m - n)^2 = -n^2 - m^2 + 2mn$ ，故错误。

故选： B 。

6. (2 分) 某青少年篮球队有 12 名队员，队员的年龄情况统计如下：

年龄 (岁)	12	13	14	15	16
人数	3	1	2	5	1

则这 12 名队员年龄的众数和中位数分别是 ()

$A. 15$ 岁和 14 岁

$B. 15$ 岁和 15 岁

$C. 15$ 岁和 14.5 岁

$D. 14$ 岁和 15 岁

【解答】解：在这 12 名队员的年龄数据里，15 岁出现了 5 次，次数最多，因而众数是 145

12 名队员的年龄数据里，第 6 和第 7 个数据的平均数 $\frac{14+15}{2} = 14.5$ ，因而中位数是 14.5。

故选： C 。

7. (2 分) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， AD 和 $A'D'$ 是它们的对应中线，若 $AD = 10$ ， $A'D' = 6$ ，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长比是 ()

$A. 3:5$

$B. 9:25$

$C. 5:3$

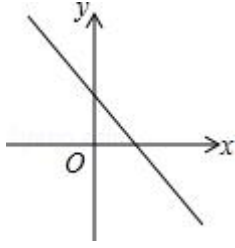
$D. 25:9$

【解答】解： $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， AD 和 $A'D'$ 是它们的对应中线， $AD = 10$ ， $A'D' = 6$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长比 $= AD: A'D' = 10: 6 = 5: 3$ 。

故选：C.

8. (2分) 已知一次函数 $y = (k+1)x + b$ 的图象如图所示，则 k 的取值范围是 ()



- A. $k < 0$ B. $k < -1$ C. $k < 1$ D. $k > -1$

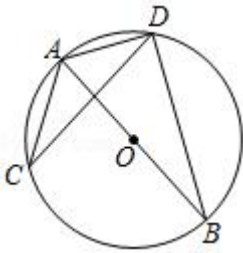
【解答】解：∵ 观察图象知：y 随 x 的增大而减小，

$$\therefore k+1 < 0,$$

解得： $k < -1$,

故选：B.

9. (2分) 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 和点 D 是 $\odot O$ 上位于直径 AB 两侧的点，连接 AC，AD，BD，CD，若 $\odot O$ 的半径是 13， $BD = 24$ ，则 $\sin \angle ACD$ 的值是 ()



- A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{5}{13}$

【解答】解：∵ AB 是直径，

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

∵ $\odot O$ 的半径是 13，

$$\therefore AB = 2 \times 13 = 26,$$

由勾股定理得： $AD = 10$ ，

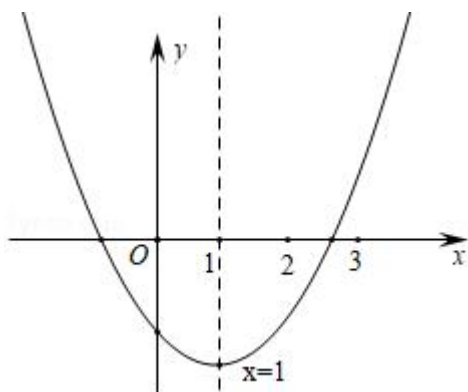
$$\therefore \sin \angle B = \frac{AD}{AB} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13},$$

$$\therefore \angle ACD = \angle B,$$

$$\therefore \sin \angle ACD = \sin \angle B = \frac{5}{13},$$

故选：D.

10. (2分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示，则下列结论正确的是 ()



- A. $abc < 0$ B. $b^2 - 4ac < 0$ C. $a - b + c < 0$ D. $2a + b = 0$

【解答】解：由图可知 $a > 0$ ，与 y 轴的交点 $c < 0$ ，对称轴 $x = 1$ ，

$$\therefore b = -2a < 0;$$

$\therefore abc > 0$ ，A 错误；

由图象可知，函数与 x 轴有两个不同的交点， $\therefore \Delta > 0$ ，B 错误；

当 $x = -1$ 时， $y > 0$ ，

$\therefore a - b + c > 0$ ，C 错误；

$\therefore b = -2a$ ，D 正确；

故选：D.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

11. (3 分) 因式分解： $-x^2 - 4y^2 + 4xy = \underline{- (x - 2y)^2}$.

【解答】解： $-x^2 - 4y^2 + 4xy$,

$$= - (x^2 + 4y^2 - 4xy),$$

$$= - (x - 2y)^2.$$

12. (3 分) 二元一次方程组 $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1.5 \end{cases}$.

【解答】解： $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \text{ ①} \\ x + 2y = 5 \text{ ②} \end{cases}$,

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得: } 4x = 8,$$

解得 $x = 2$,

把 $x = 2$ 代入②中得： $2 + 2y = 5$,

解得 $y = 1.5$,

所以原方程组的解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1.5 \end{cases}$.

故答案为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1.5 \end{cases}$.

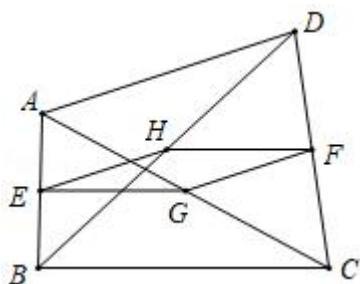
13. (3分) 一个口袋中有红球、白球共 10 个, 这些球除颜色外都相同. 将口袋中的球搅拌均匀, 从中随机摸出一个球, 记下它的颜色后再放回口袋中, 不断重复这一过程, 共摸了 100 次球, 发现有 70 次摸到红球. 请你估计这个口袋中有 3 个白球.

【解答】解: 由题意可得, 红球的概率为 70%. 则白球的概率为 30%,

这个口袋中白球的个数: $10 \times 30\% = 3$ (个),

故答案为 3.

14. (3分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F, G, H 分别是 AB, CD, AC, BD 的中点, 若 $AD = BC = 2\sqrt{5}$, 则四边形 $EGFH$ 的周长是 $4\sqrt{5}$.



【解答】证明: $\because E, G$ 是 AB 和 AC 的中点,

$$\therefore EG = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5},$$

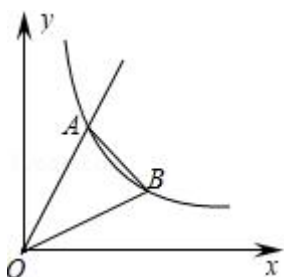
$$\text{同理 } HF = \frac{1}{2}BC = \sqrt{5},$$

$$EH = GF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

$$\therefore \text{四边形 } EGFH \text{ 的周长是: } 4 \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

故答案为: $4\sqrt{5}$.

15. (3分) 如图, 正比例函数 $y_1 = k_1x$ 的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ ($x > 0$) 的图象相交于点 $A(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, 点 B 是反比例函数图象上一点, 它的横坐标是 3, 连接 OB, AB , 则 $\triangle AOB$ 的面积是 $2\sqrt{3}$.



【解答】解：（1） $\because$ 正比例函数 $y_1 = k_1x$ 的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ ($x > 0$) 的图象相

交于点 $A(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$,

$$\therefore 2\sqrt{3} = \sqrt{3}k_1, \quad 2\sqrt{3} = \frac{k_1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore k_1 = 2, \quad k_2 = 6,$$

$$\therefore \text{正比例函数为 } y = 2x, \text{ 反比例函数为: } y = \frac{6}{x},$$

$\because$ 点 B 是反比例函数图象上一点，它的横坐标是 3，

$$\therefore y = \frac{6}{3} = 2,$$

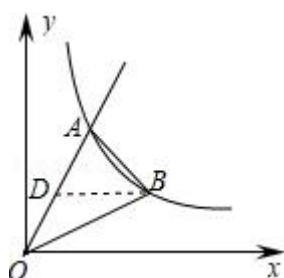
$$\therefore B(3, 2),$$

$$\therefore D(1, 2),$$

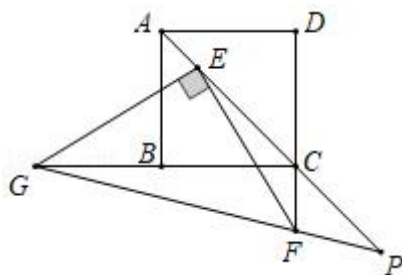
$$\therefore BD = 3 - 1 = 2.$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2} \times 2 \times (2\sqrt{3} - 2) + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2\sqrt{3},$$

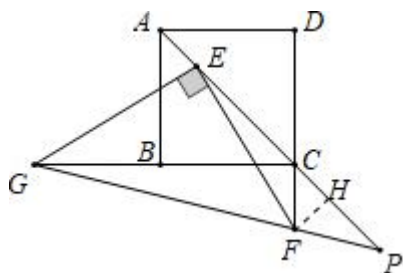
故答案为 $2\sqrt{3}$.



16. (3 分) 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上有一点 E ，且 $CE = 4AE$ ，点 F 在 DC 的延长线上，连接 EF ，过点 E 作 $EG \perp EF$ ，交 CB 的延长线于点 G ，连接 GF 并延长，交 AC 的延长线于点 P ，若 $AB = 5$ ， $CF = 2$ ，则线段 EP 的长是 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$ 。



【解答】解：如图，作 $FH \perp PE$ 于 H 。



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $AB = 5$,

$\therefore AC = 5\sqrt{2}$, $\angle ACD = \angle FCH = 45^\circ$,

$\because \angle FHC = 90^\circ$, $CF = 2$,

$\therefore CH = HF = \sqrt{2}$,

$\because CE = 4AE$,

$\therefore EC = 4\sqrt{2}$, $AE = \sqrt{2}$,

$\therefore EH = 5\sqrt{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle EFH$ 中, $EF^2 = EH^2 + FH^2 = (5\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 52$,

$\because \angle GEF = \angle GCF = 90^\circ$,

$\therefore E, G, F, C$ 四点共圆,

$\therefore \angle EFG = \angle ECG = 45^\circ$,

$\therefore \angle ECF = \angle EFP = 135^\circ$,

$\because \angle CEF = \angle FEP$,

$\therefore \triangle CEF \sim \triangle FEP$,

$\therefore \frac{EF}{EP} = \frac{EC}{EF}$,

$\therefore EF^2 = EC \cdot EP$,

$\therefore EP = \frac{52}{4\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{2}$.

故答案为 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题 (第 17 小题 6 分, 第 18、19 小题各 8 分, 共 22 分)

17. (6 分) 计算: $(-\frac{1}{2})^{-2} + 2\cos 30^\circ - |1 - \sqrt{3}| + (\pi - 2019)^0$.

【解答】 解: 原式 $= 4 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + 1 + 1$

$= 6$.

18. (8 分) 为了丰富校园文化生活, 提高学生的综合素质, 促进中学生全面发展, 学校开

展了多种社团活动. 小明喜欢的社团有: 合唱社团、足球社团、书法社团、科技社团 (分别用字母 A, B, C, D 依次表示这四个社团), 并把这四个字母分别写在四张完全相同的不透明的卡片的正面上, 然后将这四张卡片背面朝上洗匀后放在桌面上.

(1) 小明从中随机抽取一张卡片是足球社团 B 的概率是 $\frac{1}{4}$.

(2) 小明先从中随机抽取一张卡片, 记录下卡片上的字母后不放回, 再从剩余的卡片中随机抽取一张卡片, 记录下卡片上的字母. 请你用列表法或画树状图法求出小明两次抽取的卡片中有一张是科技社团 D 的概率.

【解答】 解: (1) 小明从中随机抽取一张卡片是足球社团 B 的概率 $= \frac{1}{4}$;

(2) 列表如下:

	A	B	C	D
A		(B, A)	(C, A)	(D, A)
B	(A, B)		(C, B)	(D, B)
C	(A, C)	(B, C)		
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	(D, D)

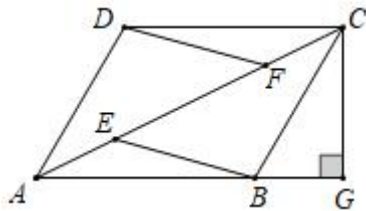
由表可知共有 12 种等可能结果, 小明两次抽取的卡片中有一张是科技社团 D 的结果数为 6 种,

所以小明两次抽取的卡片中有一张是科技社团 D 的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

19. (8 分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E 和点 F 是对角线 AC 上的两点, $AE = CF$, $DF = BE$, 且 $DF \parallel BE$, 过点 C 作 $CG \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 G .

(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

(2) 若 $\tan \angle CAB = \frac{2}{5}$, $\angle CBG = 45^\circ$, $BC = 4\sqrt{2}$, 则 $\square ABCD$ 的面积是 24.



【解答】 (1) 证明: $\because AE = CF$,
 $\therefore AE - EF = CF - EF$,

即 $AF = CE$,

$\because DF \parallel BE$,

$\therefore \angle DFA = \angle BEC$,

$\because DF = BE$,

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$ (SAS),

$\therefore AD = CB$, $\angle DAF = \angle BCE$,

$\therefore AD \parallel CB$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

(2) 解: $\because CG \perp AB$,

$\therefore \angle G = 90^\circ$,

$\because \angle CBG = 45^\circ$,

$\therefore \triangle BCG$ 是等腰直角三角形,

$\because BC = 4\sqrt{2}$,

$\therefore BG = CG = 4$,

$\because \tan \angle CAB = \frac{2}{5}$,

$\therefore AG = 10$,

$\therefore AB = 6$,

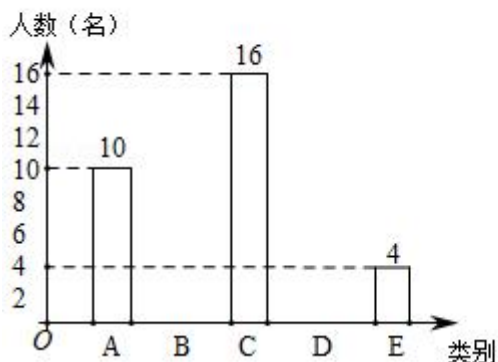
$\therefore \square ABCD$ 的面积 $= 6 \times 4 = 24$,

故答案为: 24.

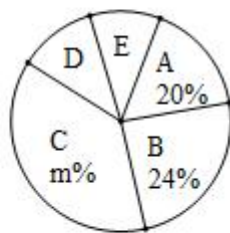
四、(每小题 8 分, 共 16 分)

20. (8 分) “勤劳”是中华民族的传统美德, 学校要求同学们在家里帮助父母做一些力所能及的家务. 在本学期开学初, 小颖同学随机调查了部分同学寒假在家做家务的总时间, 设被调查的每位同学寒假在家做家务的总时间为 x 小时, 将做家务的总时间分为五个类别: A ($0 \leq x < 10$), B ($10 \leq x < 20$), C ($20 \leq x < 30$), D ($30 \leq x < 40$), E ($x \geq 40$). 并将调查结果制成如下两幅不完整的统计图:

学生寒假在家做家务
的总时间条形统计图



学生寒假在家做家务的
总时间扇形统计图



根据统计图提供的信息，解答下列问题：

- (1) 本次共调查了 50 名学生；
- (2) 请根据以上信息直接在答题卡中补全条形统计图；
- (3) 扇形统计图中 m 的值是 32，类别 D 所对应的扇形圆心角的度数是 57.6 度；
- (4) 若该校有 800 名学生，根据抽样调查的结果，请你估计该校有多少名学生寒假在家做家务的总时间不低于 20 小时。

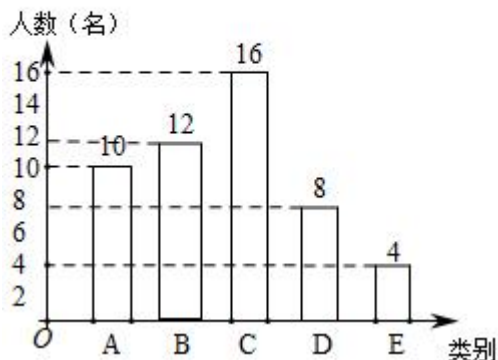
【解答】解：(1) 本次共调查了 $10 \div 20\% = 50$ (人)，

故答案为 50；

(2) B 类人数： $50 \times 24\% = 12$ (人)，

D 类人数： $50 - 10 - 12 - 16 - 4 = 8$ (人)，

学生寒假在家做家务
的总时间条形统计图



(3) $\frac{16}{50} \times 100\% = 32\%$ ，即 $m = 32$ ，

类别 D 所对应的扇形圆心角的度数 $360^\circ \times \frac{8}{50} = 57.6^\circ$ ，

故答案为 32，57.6；

(4) 估计该校寒假在家做家务的总时间不低于 20 小时的学生数.

$$800 \times (1 - 20\% - 24\%) = 448 \text{ (名)},$$

答: 估计该校有 448 名学生寒假在家做家务的总时间不低于 20 小时.

21. (8 分) 2019 年 3 月 12 日是第 41 个植树节, 某单位积极开展植树活动, 决定购买甲、乙两种树苗, 用 800 元购买甲种树苗的棵数与用 680 元购买乙种树苗的棵数相同, 乙种树苗每棵比甲种树苗每棵少 6 元.

(1) 求甲种树苗每棵多少元?

(2) 若准备用 3800 元购买甲、乙两种树苗共 100 棵, 则至少要购买乙种树苗多少棵?

【解答】解: (1) 设甲种树苗每棵 x 元, 根据题意得:

$$\frac{800}{x} = \frac{680}{x-6},$$

解得: $x = 40$,

经检验: $x = 40$ 是原方程的解,

答: 甲种树苗每棵 40 元;

(2) 设购买乙种树苗 y 棵, 根据题意得:

$$40(100 - y) + 36y \leq 3800,$$

$$\text{解得: } y \geq 33\frac{1}{3},$$

$\because y$ 是正整数,

$\therefore y$ 最小取 34,

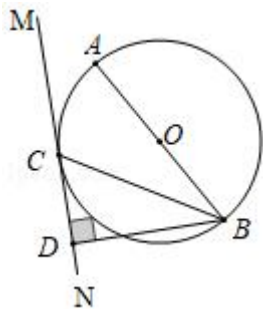
答: 至少要购买乙种树苗 34 棵.

五、(本题 10 分)

22. (10 分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 是 $\odot O$ 的弦, 直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 C , 过点 B 作 $BD \perp MN$ 于点 D .

(1) 求证: $\angle ABC = \angle CBD$;

(2) 若 $BC = 4\sqrt{5}$, $CD = 4$, 则 $\odot O$ 的半径是 5.



【解答】(1) 证明：连接 OC ，

$\because MN$ 为 $\odot O$ 的切线，

$\therefore OC \perp MN$ ，

$\because BD \perp MN$ ，

$\therefore OC \parallel BD$ ，

$\therefore \angle CBD = \angle BCO$ 。

又 $\because OC = OB$ ，

$\therefore \angle BCO = \angle ABC$ ，

$\therefore \angle CBD = \angle ABC$ ；

(2) 解：连接 AC ，

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $BC = 4\sqrt{5}$ ， $CD = 4$ ，

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = 8,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle CDB = 90^\circ$ ，

$\because \angle ABC = \angle CBD$ ，

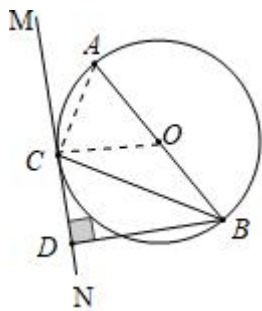
$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CBD$ ，

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{CB}{BD}, \text{ 即 } \frac{AB}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{8},$$

$\therefore AB = 10$ ，

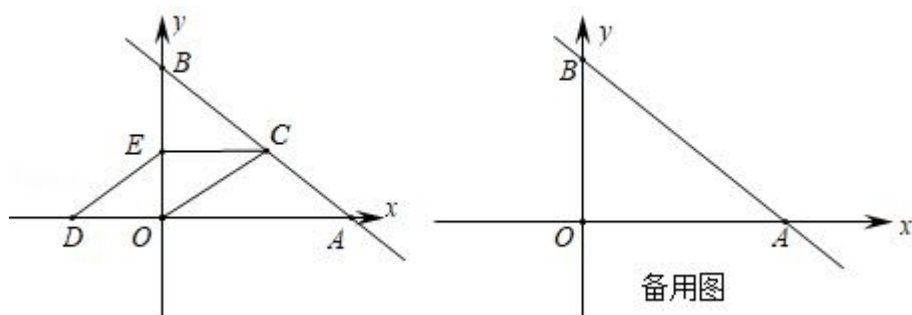
$\therefore \odot O$ 的半径是 5，

故答案为 5。



六、(本题 10 分)

23. (10 分) 在平面直角坐标系中, 直线 $y = kx + 4$ ($k \neq 0$) 交 x 轴于点 $A(8, 0)$, 交 y 轴于点 B .



(1) k 的值是 $-\frac{1}{2}$;

(2) 点 C 是直线 AB 上的一个动点, 点 D 和点 E 分别在 x 轴和 y 轴上.

①如图, 点 E 为线段 OB 的中点, 且四边形 $OCED$ 是平行四边形时, 求 $\square OCED$ 的周长;

②当 CE 平行于 x 轴, CD 平行于 y 轴时, 连接 DE , 若 $\triangle CDE$ 的面积为 $\frac{33}{4}$, 请直接写出点 C 的坐标.

【解答】 解: (1) 将 $A(8, 0)$ 代入 $y = kx + 4$, 得: $0 = 8k + 4$,

解得: $k = -\frac{1}{2}$.

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

(2) ①由 (1) 可知直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

当 $x = 0$ 时, $y = -\frac{1}{2}x + 4 = 4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 4)$,

$\therefore OB = 4$.

$\therefore$ 点 E 为 OB 的中点,

$$\therefore BE = OE = \frac{1}{2}OB = 2.$$

$\because$ 点 A 的坐标为 $(8, 0)$,

$$\therefore OA = 8.$$

$\because$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形,

$$\therefore CE \parallel DA,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BE}{OE} = 1,$$

$$\therefore BC = AC,$$

$\therefore CE$ 是 $\triangle ABO$ 的中位线,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}OA = 4.$$

$\because$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形,

$$\therefore OD = CE = 4, OC = DE.$$

在 $\text{Rt}\triangle DOE$ 中, $\angle DOE = 90^\circ$, $OD = 4$, $OE = 2$,

$$\therefore DE = \sqrt{OD^2 + OE^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore C_{\text{平行四边形 } OCED} = 2(OD + DE) = 2(4 + 2\sqrt{5}) = 8 + 4\sqrt{5}.$$

② 设点 C 的坐标为 $(x, -\frac{1}{2}x + 4)$, 则 $CE = |x|$, $CD = |-\frac{1}{2}x + 4|$,

$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot CE = |-\frac{1}{4}x^2 + 2x| = \frac{33}{4},$$

$$\therefore x^2 + 8x + 33 = 0 \text{ 或 } x^2 + 8x - 33 = 0.$$

方程 $x^2 + 8x + 33 = 0$ 无解;

解方程 $x^2 + 8x - 33 = 0$, 得: $x_1 = -3$, $x_2 = 11$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-3, \frac{11}{2})$ 或 $(11, -\frac{3}{2})$.

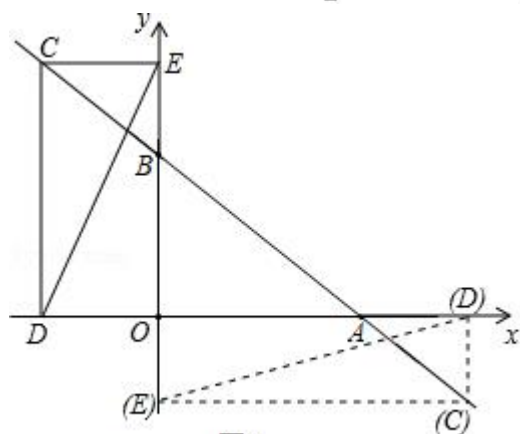
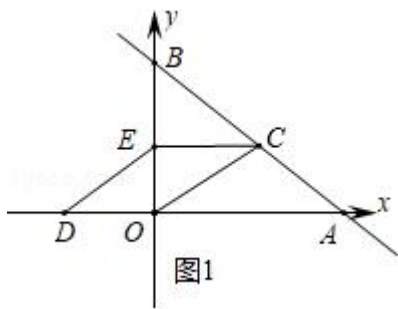


图2



七、(本题 12 分)

24. (12 分) 思维启迪:

(1) 如图 1, A, B 两点分别位于一个池塘的两端, 小亮想用绳子测量 A, B 间的距离, 但绳子不够长, 聪明的小亮想出一个办法: 先在地上取一个可以直接到达 B 点的点 C , 连接 BC , 取 BC 的中点 P (点 P 可以直接到达 A 点), 利用工具过点 C 作 $CD \parallel AB$ 交 AP 的延长线于点 D , 此时测得 $CD = 200$ 米, 那么 A, B 间的距离是 200 米.

思维探索:

(2) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, $AC = BC$, $AE = DE$, 且 $AE < AC$, $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$, 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针方向旋转, 把点 E 在 AC 边上时 $\triangle ADE$ 的位置作为起始位置 (此时点 B 和点 D 位于 AC 的两侧), 设旋转角为 α , 连接 BD , 点 P 是线段 BD 的中点, 连接 PC, PE .

①如图 2, 当 $\triangle ADE$ 在起始位置时, 猜想: PC 与 PE 的数量关系和位置关系分别是 $PC = PE, PC \perp PE$;

②如图 3, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 点 D 落在 AB 边上, 请判断 PC 与 PE 的数量关系和位置关系, 并证明你的结论;

③当 $\alpha = 150^\circ$ 时, 若 $BC = 3$, $DE = 1$, 请直接写出 PC^2 的值.

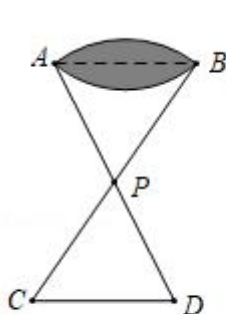


图1

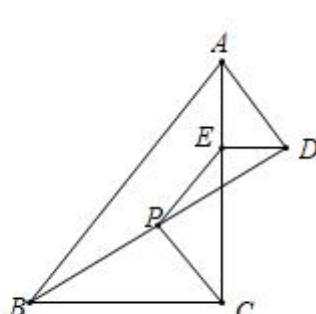


图2

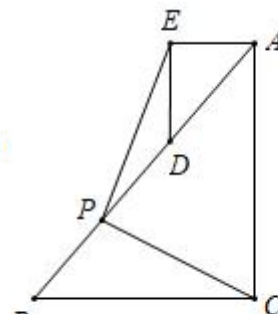
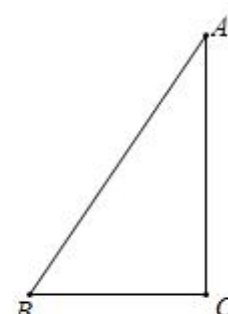


图3



备用图

【解答】 (1) 解: $\because CD \parallel AB$, $\therefore \angle C = \angle B$,

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle DCP$ 中,

$$\begin{cases} BP=CP \\ \angle APB=\angle DPC, \\ \angle B=\angle C \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle DCP$ (SAS),

$\therefore DC = AB$.

$\because AB = 200$ 米.

$\therefore CD = 200$ 米,

故答案为: 200.

(2) ① PC 与 PE 的数量关系和位置关系分别是 $PC = PE$, $PC \perp PE$.

理由如下: 如解图 1, 延长 EP 交 BC 于 F ,

同(1)理, 可知 $\triangle FBP \cong \triangle EDP$ (SAS),

$\therefore PF = PE$, $BF = DE$,

又 $\because AC = BC$, $AE = DE$,

$\therefore FC = EC$,

又 $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle EFC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore EP = FP$,

$\therefore PC = PE$, $PC \perp PE$.

② PC 与 PE 的数量关系和位置关系分别是 $PC = PE$, $PC \perp PE$.

理由如下: 如解图 2, 作 $BF \parallel DE$, 交 EP 延长线于点 F , 连接 CE 、 CF ,

同①理, 可知 $\triangle FBP \cong \triangle EDP$ (SAS),

$\therefore BF = DE$, $PE = PF = \frac{1}{2}EF$,

$\because DE = AE$,

$\therefore BF = AE$,

$\because$ 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, $\angle EAC = 90^\circ$,

$\therefore ED \parallel AC$, $EA \parallel BC$

$\therefore FB \parallel AC$, $\angle FBC = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBF = \angle CAE$,

在 $\triangle FBC$ 和 $\triangle EAC$ 中,

$$\begin{cases} BF=AE \\ \angle CBE=\angle CAE, \\ BC=AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FBC \cong \triangle EAC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CF = CE, \angle FCB = \angle ECA,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FCE \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore EP = FP,$$

$$\therefore CP \perp EP, CP = EP = \frac{1}{2}EF.$$

③如解图 2，作 $BF \parallel DE$ ，交 EP 延长线于点 F ，连接 CE 、 CF ，过 E 点作 $EH \perp AC$ 交 CA 延长线于 H 点，

当 $\alpha = 150^\circ$ 时，由旋转可知， $\angle CAE = 150^\circ$ ， DE 与 BC 所成夹角的锐角为 30° ，

$$\therefore \angle FBC = \angle EAC = \alpha = 150^\circ$$

同②可得 $\triangle FBP \cong \triangle EDP$ (SAS)，

同② $\triangle FCE$ 是等腰直角三角形， $CP \perp EP$ ， $CP = EP = \frac{\sqrt{2}}{2}CE$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AHE$ 中， $\angle EAH = 30^\circ$ ， $AE = DE = 1$ ，

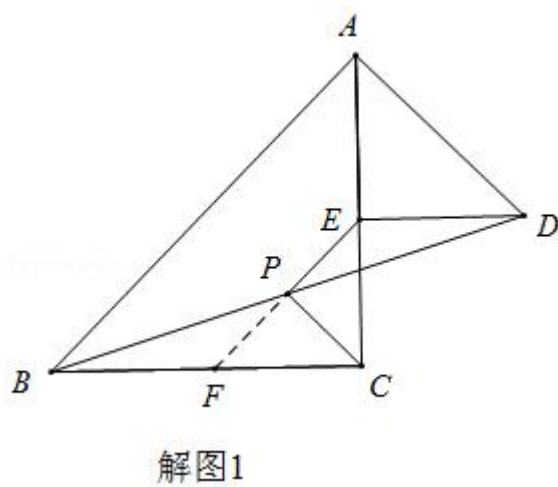
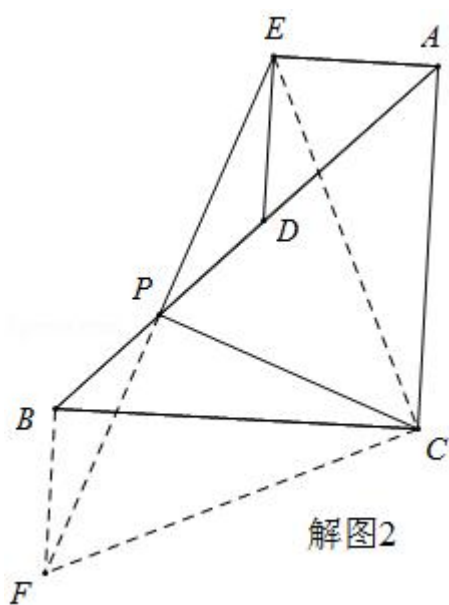
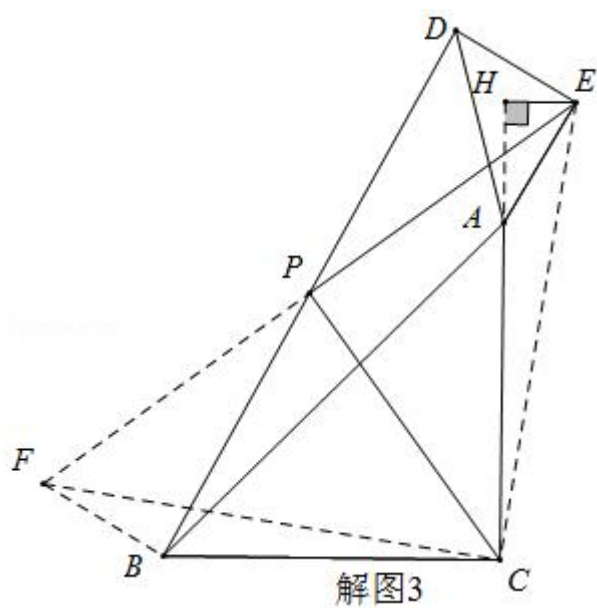
$$\therefore HE = \frac{1}{2}, AH = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又 $\because AC = AB = 3$ ，

$$\therefore AH = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore EC^2 = AH^2 + HE^2 = 10 + 3\sqrt{3}$$

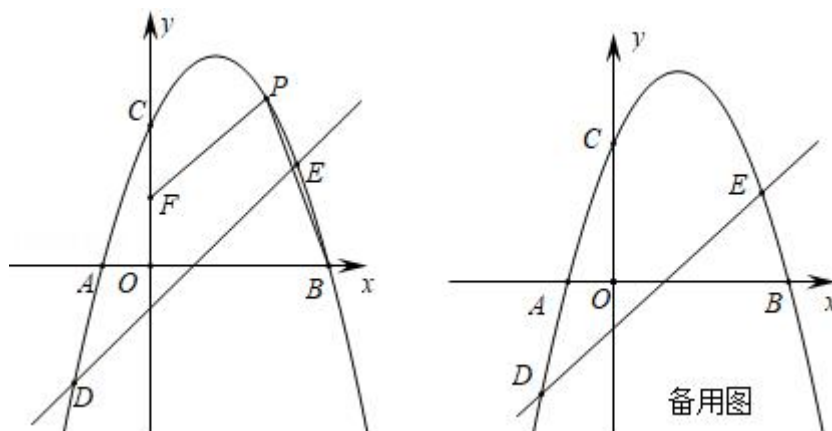
$$\therefore PC^2 = \frac{1}{2}EC^2 = \frac{10 + 3\sqrt{3}}{2}.$$



八、(本题 12 分)

25. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 A, B

两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C ，抛物线经过点 $D(-2, -3)$ 和点 $E(3, 2)$ ，点 P 是第一象限抛物线上的一个动点。



(1) 求直线 DE 和抛物线的表达式；

(2) 在 y 轴上取点 $F(0, 1)$ ，连接 PF ， PB ，当四边形 $OBPF$ 的面积是 7 时，求点 P 的坐标；

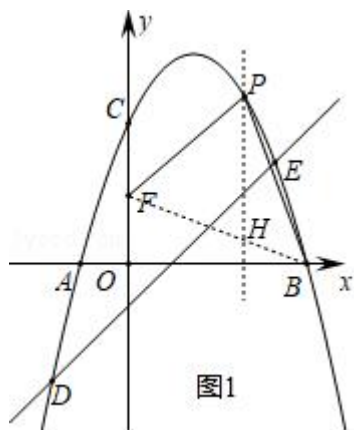
(3) 在 (2) 的条件下，当点 P 在抛物线对称轴的右侧时，直线 DE 上存在两点 M ， N （点 M 在点 N 的上方），且 $MN = 2\sqrt{2}$ ，动点 Q 从点 P 出发，沿 $P \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow A$ 的路线运动到终点 A ，当点 Q 的运动路程最短时，请直接写出此时点 N 的坐标。

【解答】解：(1) 将点 D 、 E 的坐标代入函数表达式得：
$$\begin{cases} -3 = 4a - 2b = 2 \\ 9a + 3b + 2 = 2 \end{cases}$$
，解得：
$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

故抛物线的表达式为： $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ ，

同理可得直线 DE 的表达式为： $y = x - 1 \cdots \textcircled{1}$ ；

(2) 如图 1，连接 BF ，过点 P 作 $PH \parallel y$ 轴交 BF 于点 H ，



将点 F 代入一次函数表达式，

同理可得直线 BF 的表达式为: $y = -\frac{1}{4}x+1$,

设点 $P(x, -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2)$, 则点 $H(x, -\frac{1}{4}x+1)$,

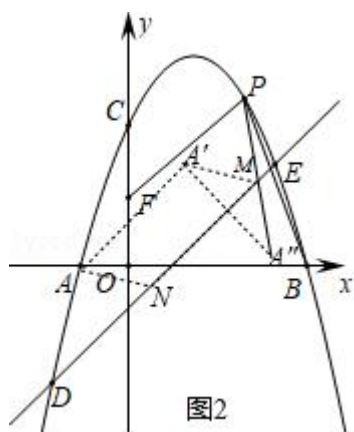
$$S_{\text{四边形 } OBP F} = S_{\triangle OBF} + S_{\triangle PFB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 + \frac{1}{2} \times PH \times BO = 2 + 2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 + \frac{1}{4}x - 1 \right) = 7,$$

解得: $x = 2$ 或 $\frac{3}{2}$,

故点 $P(2, 3)$ 或 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{8})$;

(3) 当点 P 在抛物线对称轴的右侧时, 点 $P(2, 3)$,

过点 M 作 $A'M \parallel AN$, 过作点 A' 直线 DE 的对称点 A'' , 连接 PA'' 交直线 DE 于点 M , 此时, 点 Q 运动的路径最短,



$\because MN = 2\sqrt{2}$, 相当于向上、向右分别平移 2 个单位, 故点 $A'(1, 2)$,

$A'A'' \perp DE$, 则直线 $A'A''$ 过点 A' , 则其表达式为: $y = -x+3 \cdots \textcircled{2}$,

联立①②得 $x = 2$, 则 $A'A''$ 中点坐标为 $(2, 1)$,

由中点坐标公式得: 点 $A''(3, 0)$,

同理可得: 直线 AP'' 的表达式为: $y = -3x+9 \cdots \textcircled{3}$,

联立①③并解得: $x = \frac{5}{2}$, 即点 $M(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$,

点 M 沿 BD 向下平移 $2\sqrt{2}$ 个单位得: $N(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.