

辽宁省抚顺市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题 (本题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. (3.00 分) $-\frac{3}{2}$ 的绝对值是 ()

A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

2. (3.00 分) 下列物体的左视图是圆的是 ()



A.

足球



B.

水杯



C.

圣诞帽



D.

鱼缸

3. (3.00 分) 下列运算正确的是 ()

A. $2x+3y=5xy$ B. $(x+3)^2=x^2+9$ C. $(xy^2)^3=x^3y^6$ D. $x^{10} \div x^5 = x^2$

4. (3.00 分) 二次根式 $\sqrt{1-x}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ()

A. $x \geq 1$ B. $x \leq 1$ C. $x > 1$ D. $x < 1$

5. (3.00 分) 抚顺市中小学机器人科技大赛中, 有 7 名学生参加决赛, 他们决赛的成绩各不相同, 其中一名参赛选手想知道自己能否进入前 4 名, 他除了知道自己成绩外还要知道这 7 名学生成绩的 ()

A. 中位数 B. 众数 C. 平均数 D. 方差

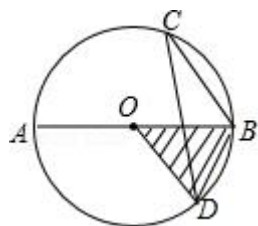
6. (3.00 分) 一次函数 $y = -x - 2$ 的图象经过 ()

- A. 第一、二、三象限 B. 第一、二、四象限
C. 第一、三、四象限 D. 第二、三、四象限

7. (3.00 分) 已知点 A 的坐标为 (1, 3), 点 B 的坐标为 (2, 1). 将线段 AB 沿某一方向平移后, 点 A 的对应点的坐标为 (-2, 1). 则点 B 的对应点的坐标为 ()

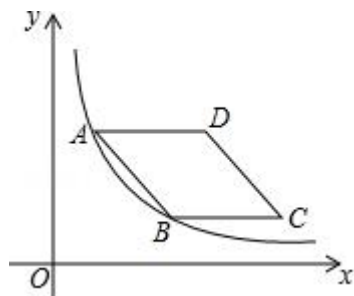
- A. (5, 3) B. (-1, -2) C. (-1, -1) D. (0, -1)

8. (3.00 分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是弦, $\angle BCD = 30^\circ$, $OA = 2$, 则阴影部分的面积是 ()



- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. 2π

9. (3.00 分) 如图, 菱形 ABCD 的边 AD 与 x 轴平行, A、B 两点的横坐标分别为 1 和 3, 反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象经过 A、B 两点, 则菱形 ABCD 的面积是 ()



- A. $4\sqrt{2}$ B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. 2

10. (3.00 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($0 < 2a \leq b$) 与 x 轴最多有一个交点. 以下四个结论:

- ① $abc > 0$;
② 该抛物线的对称轴在 $x = -1$ 的右侧;
③ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + 1 = 0$ 无实数根;
④ $\frac{a+b+c}{b} \geq 2$.

其中, 正确结论的个数为 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

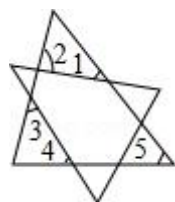
11. (3.00 分) 第十三届全国人民代表大会政府工作报告中说到，五年来我国国内生产总值已增加到 8270000000 万元，将数据 8270000000 用科学计数法表示为_____.

12. (3.00 分) 分解因式: $xy^2 - 4x =$ _____.

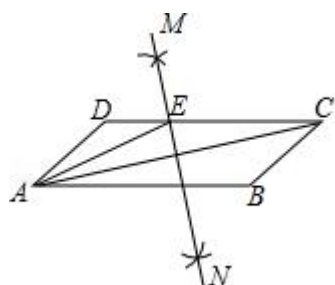
13. (3.00 分) 甲、乙两名跳高运动员近期 20 次的跳高成绩统计分析如下: $\overline{x}_{\text{甲}} = 1.70\text{m}$, $\overline{x}_{\text{乙}} = 1.70\text{m}$, $s_{\text{甲}}^2 = 0.007$, $s_{\text{乙}}^2 = 0.003$, 则两名运动员中, _____的成绩更稳定.

14. (3.00 分) 一个不透明布袋里有 3 个红球, 4 个白球和 m 个黄球, 这些球除颜色外其余都相同, 若从中随机摸出 1 个球是红球的概率为 $\frac{1}{3}$, 则 m 的值为_____.

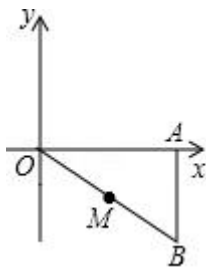
15. (3.00 分) 将两张三角形纸片如图摆放, 量得 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 220^\circ$, 则 $\angle 5 =$ _____.



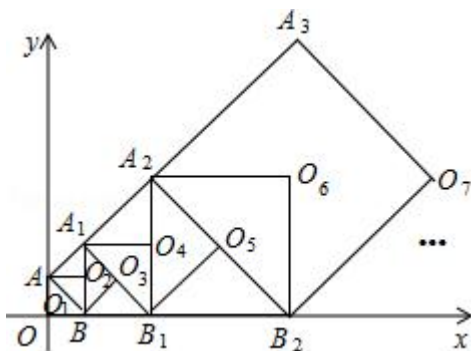
16. (3.00 分) 如图, $\square ABCD$ 中, $AB=7$, $BC=3$, 连接 AC , 分别以点 A 和点 C 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧, 两弧相交于点 M , N , 作直线 MN , 交 CD 于点 E , 连接 AE , 则 $\triangle AED$ 的周长是_____.



17. (3.00 分) 如图, $\triangle AOB$ 三个顶点的坐标分别为 $A(8, 0)$, $O(0, 0)$, $B(8, -6)$, 点 M 为 OB 的中点. 以点 O 为位似中心, 把 $\triangle AOB$ 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到 $\triangle A'O'B'$, 点 M' 为 $O'B'$ 的中点, 则 MM' 的长为_____.



18. (3.00 分) 如图，正方形 $AOBO_2$ 的顶点 A 的坐标为 $A(0, 2)$ ， O_1 为正方形 $AOBO_2$ 的中心；以正方形 $AOBO_2$ 的对角线 AB 为边，在 AB 的右侧作正方形 ABO_3A_1 ， O_2 为正方形 ABO_3A_1 的中心；再以正方形 ABO_3A_1 的对角线 A_1B 为边，在 A_1B 的右侧作正方形 $A_1BB_1O_4$ ， O_3 为正方形 $A_1BB_1O_4$ 的中心；再以正方形 $A_1BB_1O_4$ 的对角线 A_1B_1 为边在 A_1B_1 的右侧作正方形 $A_1B_1O_5A_2$ ， O_4 为正方形 $A_1B_1O_5A_2$ 的中心； $\dots$ ；按照此规律继续下去，则点 O_{2018} 的坐标为_____.

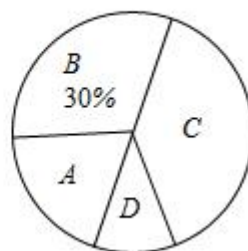
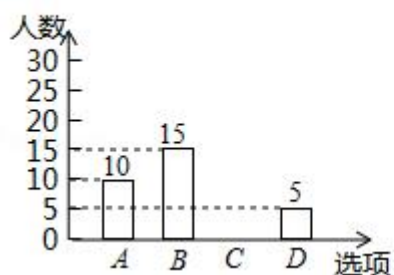


三、解答题 (第 19 题 10 分，第 20 题 12 分，共 22 分)

19. (10.00 分) 先化简，再求值： $(1 - x + \frac{3}{x+1}) \div \frac{x^2+4x+4}{x+1}$ ，其中 $x = \tan 45^\circ + (\frac{1}{2})^{-1}$.

20. (12.00 分) 抚顺市某校想知道学生对“遥远的赫图阿拉”，“旗袍故里”等家乡旅游品牌的了解程度，随机抽取了部分学生进行问卷调查，问卷有四个选项（每位被调查的学生必选且只选一项）A. 十分了解，B. 了解较多，C. 了解较少，D. 不知道. 将调查的结果绘制成如下两幅不完整的统计图，请根据两幅统计图中的信息回答下列问题：

对家乡旅游品牌了解程度条形统计图 对家乡旅游品牌了解程度扇形统计图

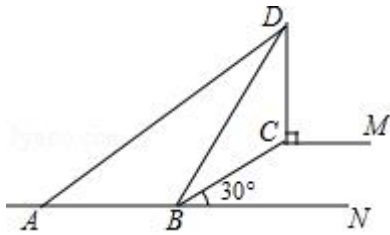


- (1) 本次调查了多少名学生?
- (2) 补全条形统计图;
- (3) 该校共有 500 名学生, 请你估计“十分了解”的学生有多少名?
- (4) 在被调查“十分了解”的学生中有四名学生会干部, 他们中有 3 名男生和 1 名女生, 学校想从这 4 人中任选两人做家乡旅游品牌宣传员, 请用列表或画树状图法求出被选中的两人恰好是一男一女的概率.

四、解答题 (第 21 题 12 分, 第 22 题 12 分, 共 24 分)

21. (12.00 分) 如图, BC 是路边坡角为 30° , 长为 10 米的一道斜坡, 在坡顶灯杆 CD 的顶端 D 处有一探射灯, 射出的边缘光线 DA 和 DB 与水平路面 AB 所成的夹角 $\angle DAN$ 和 $\angle DBN$ 分别是 37° 和 60° (图中的点 A 、 B 、 C 、 D 、 M 、 N 均在同一平面内, $CM \parallel AN$).

- (1) 求灯杆 CD 的高度;
- (2) 求 AB 的长度 (结果精确到 0.1 米). (参考数据: $\sqrt{3}=1.73$, $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)



22. (12.00 分) 为落实“美丽抚顺”的工作部署, 市政府计划对城区道路进行了改造, 现安排甲、乙两个工程队完成. 已知甲队的工作效率是乙队工作效率的 $\frac{3}{2}$ 倍, 甲队改造 360 米的道路比乙队改造同样长的道路少用 3 天.

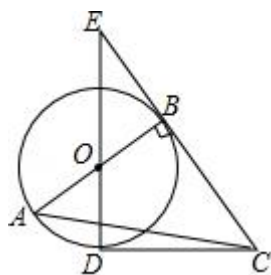
- (1) 甲、乙两工程队每天能改造道路的长度分别是多少米?
- (2) 若甲队工作一天需付费用 7 万元, 乙队工作一天需付费用 5 万元, 如需改造的道路全长 1200 米, 改造总费用不超过 145 万元, 至少安排甲队工作多少天?

五、解答验 (满分 12 分)

23. (12.00 分) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, 以 AB 为直径作 $\odot O$, 点 D 为 $\odot O$ 上一点, 且 $CD=CB$ 、连接 DO 并延长交 CB 的延长线于点 E .

- (1) 判断直线 CD 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

(2) 若 $BE=4$, $DE=8$, 求 AC 的长.



六、解答题 (满分 12 分)

24. (12.00 分) 俄罗斯世界杯足球赛期间, 某商店销售一批足球纪念册, 每本进价 40 元, 规定销售单价不低于 44 元, 且获利不高于 30%. 试销售期间发现, 当销售单价定为 44 元时, 每天可售出 300 本, 销售单价每上涨 1 元, 每天销售量减少 10 本, 现商店决定提价销售. 设每天销售量为 y 本, 销售单价为 x 元.

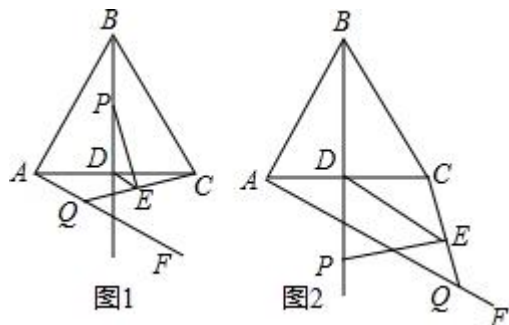
(1) 请直接写出 y 与 x 之间的函数关系式和自变量 x 的取值范围;

(2) 当每本足球纪念册销售单价是多少元时, 商店每天获利 2400 元?

(3) 将足球纪念册销售单价定为多少元时, 商店每天销售纪念册获得的利润 w 元最大? 最大利润是多少元?

七、解答题 (满分 12 分)

25. (12.00 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=BC$, $BD \perp AC$ 于点 D , $\angle FAC = \frac{1}{2} \angle ABC$, 且 $\angle FAC$ 在 AC 下方. 点 P , Q 分别是射线 BD , 射线 AF 上的动点, 且点 P 不与点 B 重合, 点 Q 不与点 A 重合, 连接 CQ , 过点 P 作 $PE \perp CQ$ 于点 E , 连接 DE .



(1) 若 $\angle ABC=60^\circ$, $BP=AQ$.

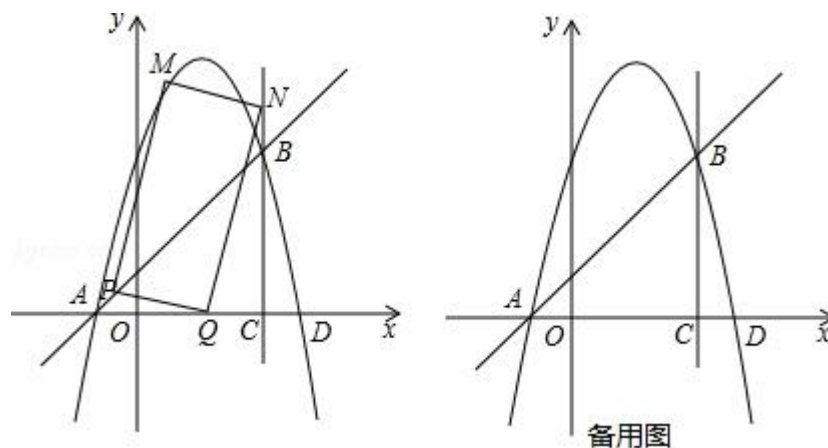
①如图 1, 当点 P 在线段 BD 上运动时, 请直接写出线段 DE 和线段 AQ 的数量关系和位置关系;

②如图 2，当点 P 运动到线段 BD 的延长线上时，试判断①中的结论是否成立，并说明理由；

(2) 若 $\angle ABC = 2\alpha \neq 60^\circ$ ，请直接写出当线段 BP 和线段 AQ 满足什么数量关系时，能使 (1) 中①的结论仍然成立（用含 α 的三角函数表示）.

八、解答题（满分 14 分）

26. (14.00 分) 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 和直线 $y = x + 1$ 交于 A, B 两点，点 A 在 x 轴上，点 B 在直线 $x = 3$ 上，直线 $x = 3$ 与 x 轴交于点 C



(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 P 从点 A 出发，以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度的速度沿线段 AB 向点 B 运动，点 Q 从点 C 出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿线段 CA 向点 A 运动，点 P, Q 同时出发，当其中一点到达终点时，另一个点也随之停止运动，设运动时间为 t 秒 ($t > 0$). 以 PQ 为边作矩形 PQNM，使点 N 在直线 $x = 3$ 上.

①当 t 为何值时，矩形 PQNM 的面积最小？并求出最小面积；

②直接写出当 t 为何值时，恰好有矩形 PQNM 的顶点落在抛物线上.

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (3.00 分) $-\frac{3}{2}$ 的绝对值是 ()

A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

【分析】直接利用绝对值的性质得出答案.

【解答】解: $-\frac{3}{2}$ 的绝对值是: $\frac{3}{2}$.

故选: D.

【点评】此题主要考查了绝对值, 正确把握绝对值的性质是解题关键.

2. (3.00 分) 下列物体的左视图是圆的是 ()



A.

足球



B.

水杯



C.

圣诞帽



D.

鱼缸

【分析】左视图是从物体左面看, 所得到的图形.

【解答】解: A、球的左视图是圆形, 故此选项符合题意;

B、水杯的左视图是等腰梯形, 故此选项不合题意;

C、圆锥的左视图是等腰三角形，故此选项不合题意；

D、长方体的左视图是矩形，故此选项不合题意；

故选：A.

【点评】本题考查了几何体的三种视图，掌握定义是关键. 注意所有的看到的棱都应表现在三视图中.

3. (3.00 分) 下列运算正确的是 ()

A. $2x+3y=5xy$ B. $(x+3)^2=x^2+9$ C. $(xy^2)^3=x^3y^6$ D. $x^{10}\div x^5=x^2$

【分析】根据同底数幂的乘法，完全平方公式，以及合并同类项的法则解答即可.

【解答】解：A、原式不能合并，错误；

B、 $(x+3)^2=x^2+6x+9$ ，错误；

C、 $(xy^2)^3=x^3y^6$ ，正确；

D、 $x^{10}\div x^5=x^5$ ，错误；

故选：C.

【点评】此题考查了同底数幂的乘法，完全平方公式，以及合并同类项，熟练掌握公式及运算法则是解本题的关键.

4. (3.00 分) 二次根式 $\sqrt{1-x}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 ()

A. $x\geq 1$ B. $x\leq 1$ C. $x> 1$ D. $x< 1$

【分析】根据二次根式有意义的条件可得 $1-x\geq 0$ ，再解不等式即可.

【解答】解：由题意得： $1-x\geq 0$ ，

解得： $x\leq 1$ ，

故选：B.

【点评】此题主要考查了二次根式有意义的条件，二次根式中的被开方数是非负数.

5. (3.00 分) 抚顺市中小学机器人科技大赛中，有 7 名学生参加决赛，他们决赛的成绩各不相同，其中一名参赛选手想知道自己能否进入前 4 名，他除了知道自己成绩外还要知道这 7 名同学成绩的 ()

A. 中位数 B. 众数 C. 平均数 D. 方差

【分析】7 人成绩的中位数是第 4 名的成绩. 参赛选手要想知道自己是否能进入前 4 名，只

需要了解自己的成绩以及全部成绩的中位数，比较即可．

【解答】解：由于总共有 7 个人，且他们的分数互不相同，第 4 的成绩是中位数，要判断是否进入前 4 名，故应知道中位数的多少．

故选：A．

【点评】此题主要考查统计的有关知识，主要包括平均数、中位数、众数、方差的意义．

6. (3.00 分) 一次函数 $y = -x - 2$ 的图象经过 ()

- A. 第一、二、三象限 B. 第一、二、四象限
C. 第一、三、四象限 D. 第二、三、四象限

【分析】根据一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中的 k 、 b 判定该函数图象所经过的象限．

【解答】解：∵ $-1 < 0$,

∴ 一次函数 $y = -x - 2$ 的图象一定经过第二、四象限；

又∵ $-2 < 0$,

∴ 一次函数 $y = -x - 2$ 的图象与 y 轴交于负半轴，

∴ 一次函数 $y = -x - 2$ 的图象经过第二、三、四象限；

故选：D．

【点评】本题考查了一次函数的性质．一次函数 $y = kx + b$ 的图象有四种情况：

- ①当 $k > 0$, $b > 0$, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、三象限, y 的值随 x 的值增大而增大;
- ②当 $k > 0$, $b < 0$, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、三、四象限, y 的值随 x 的值增大而增大;
- ③当 $k < 0$, $b > 0$ 时, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限, y 的值随 x 的值增大而减小;
- ④当 $k < 0$, $b < 0$ 时, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第二、三、四象限, y 的值随 x 的值增大而减小.

7. (3.00 分) 已知点 A 的坐标为 (1, 3), 点 B 的坐标为 (2, 1). 将线段 AB 沿某一方向平移后, 点 A 的对应点的坐标为 (-2, 1). 则点 B 的对应点的坐标为 ()

- A. (5, 3) B. (-1, -2) C. (-1, -1) D. (0, -1)

【分析】根据点 A、点 A 的对应点的坐标确定出平移规律, 然后根据规律求解点 B 的对应点的坐标即可.

【解答】解：∵ A (1, 3) 的对应点的坐标为 (-2, 1),

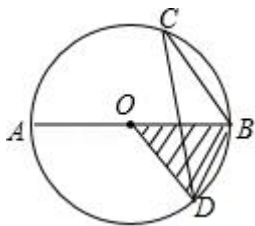
∴ 平移规律为横坐标减 3，纵坐标减 2，

∴ 点 B (2, 1) 的对应点的坐标为 (−1, −1)．

故选：C．

【点评】 本题考查了坐标与图形变化 – 平移，平移中点的变化规律是：横坐标右移加，左移减；纵坐标上移加，下移减，本题根据对应点的坐标确定出平移规律是解题的关键．

8. (3.00 分) 如图，AB 是⊙O 的直径，CD 是弦，∠BCD=30°，OA=2，则阴影部分的面积是 ()



- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. 2π

【分析】 根据圆周角定理可以求得∠BOD 的度数，然后根据扇形面积公式即可解答本题．

【解答】 解：∵ ∠BCD=30°，

∴ ∠BOD=60°，

∵ AB 是⊙O 的直径，CD 是弦，OA=2，

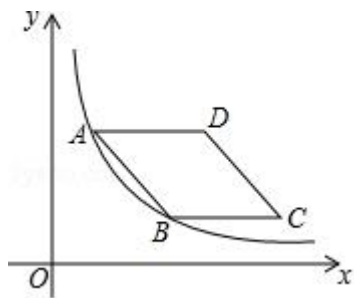
∴ 阴影部分的面积是： $\frac{60 \times \pi \times 2^2}{360} - \frac{2\pi}{3}$ ，

故选：B．

【点评】 本题考查扇形面积的计算、圆周角定理，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想解答．

9. (3.00 分) 如图，菱形 ABCD 的边 AD 与 x 轴平行，A、B 两点的横坐标分别为 1 和 3，

反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象经过 A、B 两点，则菱形 ABCD 的面积是 ()



A. $4\sqrt{2}$ B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. 2

【分析】作 $AH \perp BC$ 交 CB 的延长线于 H ，根据反比例函数解析式求出 A 的坐标、点 B 的坐标，求出 AH 、 BH ，根据勾股定理求出 AB ，根据菱形的面积公式计算即可．

【解答】解：作 $AH \perp BC$ 交 CB 的延长线于 H ，

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象经过 A 、 B 两点， A 、 B 两点的横坐标分别为 1 和 3，

$\therefore A$ 、 B 两点的纵坐标分别为 3 和 1，即点 A 的坐标为 $(1, 3)$ ，点 B 的坐标为 $(3, 1)$ ，

$\therefore AH = 3 - 1 = 2$ ， $BH = 3 - 1 = 2$ ，

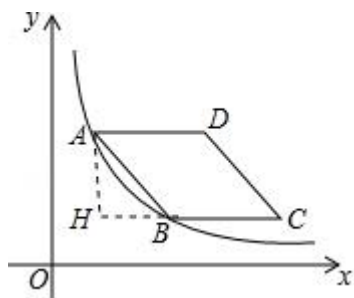
由勾股定理得， $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore BC = AB = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积 $= BC \times AH = 4\sqrt{2}$ ．

故选：A．



【点评】本题考查的是反比例函数的系数 k 的几何意义、菱形的性质，根据反比例函数解析式求出 A 的坐标、点 B 的坐标是解题的关键．

10. (3.00 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($0 < 2a \leq b$) 与 x 轴最多有一个交点．以下四个结论：

① $abc > 0$ ；

② 该抛物线的对称轴在 $x = -1$ 的右侧；

③关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+1=0$ 无实数根;

④ $\frac{a+b+c}{b} \geq 2$.

其中, 正确结论的个数为 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】 根据抛物线的系数与图象的关系即可求出答案.

【解答】 解: ① $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($0 < 2a \leq b$) 与 x 轴最多有一个交点,

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交于正半轴,

$$\therefore c > 0,$$

$$\therefore abc > 0.$$

故正确;

② $\because 0 < 2a \leq b$,

$$\therefore \frac{b}{2a} > 1,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} < -1,$$

$\therefore$ 该抛物线的对称轴在 $x=-1$ 的左侧.

故错误;

③由题意可知: 对于任意的 x , 都有 $y=ax^2+bx+c \geq 0$,

$$\therefore ax^2+bx+c+1 \geq 1 > 0, \text{ 即该方程无解,}$$

故正确;

④ $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($0 < 2a \leq b$) 与 x 轴最多有一个交点,

$$\therefore \text{当 } x=-1 \text{ 时, } y > 0,$$

$$\therefore a-b+c > 0,$$

$$\therefore a+b+c \geq 2b,$$

$$\because b > 0,$$

$$\therefore \frac{a+b+c}{b} \geq 2.$$

故正确.

综上所述，正确的结论有 3 个.

故选：C.

【点评】 本题考查二次函数的图象与性质，解题的关键是熟练运用二次函数的图象与系数的关系，本题属于中等题型.

二、填空题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11. (3.00 分) 第十三届全国人民代表大会政府工作报告中说到，五年来我国国内生产总值已增加到 8270000000 万元，将数据 8270000000 用科学计数法表示为 8.27×10^9 .

【分析】 科学计数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】 解：8270000000 = 8.27×10^9 ,

故答案为： 8.27×10^9 .

【点评】 此题考查科学计数法的表示方法. 科学计数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. (3.00 分) 分解因式： $xy^2 - 4x = x(y+2)(y-2)$.

【分析】 原式提取 x ，再利用平方差公式分解即可.

【解答】 解：原式 = $x(y^2 - 4) = x(y+2)(y-2)$,

故答案为： $x(y+2)(y-2)$

【点评】 此题考查了提公因式法与公式法的综合运用，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

13. (3.00 分) 甲，乙两名跳高运动员近期 20 次的跳高成绩统计分析如下： $\overline{x}_{甲} = 1.70m$, $\overline{x}_{乙} = 1.70m$, $s_{甲}^2 = 0.007$, $s_{乙}^2 = 0.003$, 则两名运动员中， 乙 的成绩更稳定.

【分析】 根据方差的性质，可得答案.

【解答】 解： $\overline{x}_{甲} = 1.70m$, $\overline{x}_{乙} = 1.70m$, $s_{甲}^2 = 0.007$, $s_{乙}^2 = 0.003$,

$\therefore \overline{x}_{甲} = \overline{x}_{乙}$, $s_{甲}^2 > s_{乙}^2$,

则两名运动员中，乙的成绩更稳定，

故答案为：乙.

【点评】本题考查了方差，它反映了一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立.

14. (3.00 分) 一个不透明布袋里有 3 个红球，4 个白球和 m 个黄球，这些球除颜色外其余都相同，若从中随机摸出 1 个球是红球的概率为 $\frac{1}{3}$ ，则 m 的值为 2.

【分析】根据题目中的数据可以计算出总的球的个数，从而可以求得 m 的值.

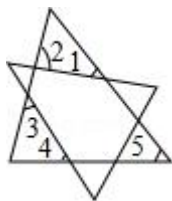
【解答】解：由题意可得，

$$m = 3 \div \frac{1}{3} - 3 - 4 = 9 - 3 - 4 = 2,$$

故答案为：2.

【点评】本题考查概率公式，解答本题的关键是明确题意，求出相应的 m 的值.

15. (3.00 分) 将两张三角形纸片如图摆放，量得 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 220^\circ$ ，则 $\angle 5 = 40^\circ$.



【分析】直接利用三角形内角和定理得出 $\angle 6 + \angle 7$ 的度数，进而得出答案.

【解答】解：如图所示： $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = 180^\circ$ ， $\angle 3 + \angle 4 + \angle 7 = 180^\circ$ ，

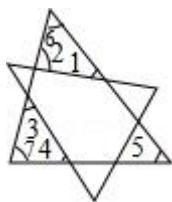
$$\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 220^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 6 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 7 = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle 6 + \angle 7 = 140^\circ,$$

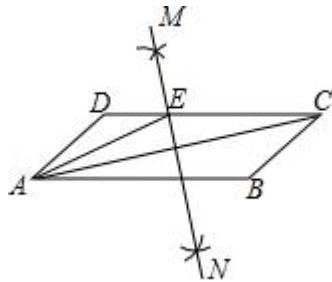
$$\therefore \angle 5 = 180^\circ - (\angle 6 + \angle 7) = 40^\circ.$$

故答案为： 40° .



【点评】此题主要考查了三角形内角和定理，正确应用三角形内角和定理是解题关键.

16. (3.00 分) 如图, $\square ABCD$ 中, $AB=7$, $BC=3$, 连接 AC , 分别以点 A 和点 C 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧, 两弧相交于点 M , N , 作直线 MN , 交 CD 于点 E , 连接 AE , 则 $\triangle AED$ 的周长是 10.



【分析】根据平行四边形的性质可知 $AD=BC=3$, $CD=AB=7$, 再由垂直平分线的性质得出 $AE=CE$, 据此可得出结论

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB=7$, $BC=3$,

$\therefore AD=BC=3$, $CD=AB=7$.

$\because$ 由作图可知, MN 是线段 AC 的垂直平分线,

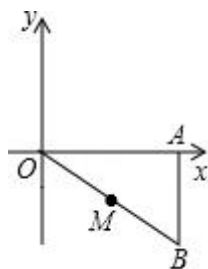
$\therefore AE=CE$,

$\therefore \triangle ADE$ 的周长 $= AD + (DE + AE) = AD + CD = 3 + 7 = 10$.

故答案为: 10.

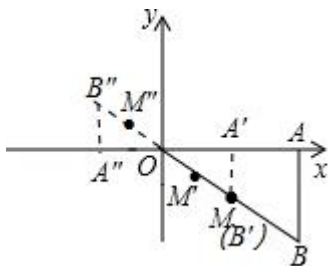
【点评】本题考查的是作图 - 基本作图, 熟知线段垂直平分线的作法是解答此题的关键.

17. (3.00 分) 如图, $\triangle AOB$ 三个顶点的坐标分别为 $A(8, 0)$, $O(0, 0)$, $B(8, -6)$, 点 M 为 OB 的中点. 以点 O 为位似中心, 把 $\triangle AOB$ 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到 $\triangle A'O'B'$, 点 M' 为 $O'B'$ 的中点, 则 MM' 的长为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{15}{2}$.



【分析】分两种情形画出图形, 即可解决问题;

【解答】解：如图，在 $Rt\triangle AOB$ 中， $OB=\sqrt{6^2+8^2}=10$ ，



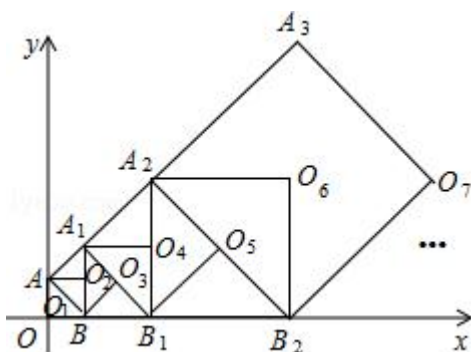
①当 $\triangle A'OB'$ 在第三象限时， $MM' = \frac{5}{2}$ 。

②当 $\triangle A'OB'$ 在第二象限时， $MM' = \frac{15}{2}$ 。

故答案为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{15}{2}$ 。

【点评】本题考查位似变换，坐标与图形的性质等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考常考题型。

18. (3.00 分) 如图，正方形 $AOBO_2$ 的顶点 A 的坐标为 $A(0, 2)$ ， O_1 为正方形 $AOBO_2$ 的中心；以正方形 $AOBO_2$ 的对角线 AB 为边，在 AB 的右侧作正方形 ABO_3A_1 ， O_2 为正方形 ABO_3A_1 的中心；再以正方形 ABO_3A_1 的对角线 A_1B 为边，在 A_1B 的右侧作正方形 $A_1BB_1O_4$ ， O_3 为正方形 $A_1BB_1O_4$ 的中心；再以正方形 $A_1BB_1O_4$ 的对角线 A_1B_1 为边在 A_1B_1 的右侧作正方形 $A_1B_1O_5A_2$ ， O_4 为正方形 $A_1B_1O_5A_2$ 的中心；…；按照此规律继续下去，则点 O_{2018} 的坐标为 $(2^{1010} - 2, 2^{1009})$ 。



【分析】由题意 $O_1(1, 1)$ ， $O_2(2, 2)$ ， $O_3(4, 2)$ ， $O_4(6, 4)$ ， $O_5(10, 4)$ ， $O_6(14,$

8) …观察可知，下标为偶数的点的纵坐标为 $2^{\frac{n}{2}}$ ，下标为偶数的点在直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 上，点

O_{2018} 的纵坐标为 2^{1009} ，可得 $2^{1009}=\frac{1}{2}x+1$ ，同侧 $x=2^{1010}-2$ ，可得点 O_{2018} 的坐标为 $(2^{1010}-2,$

2^{1009}).

【解答】解：由题意 $Q_1 (1, 1)$, $O_2 (2, 2)$, $O_3 (4, 2)$, $O_4 (6, 4)$, $O_5 (10, 4)$, $O_6 (14, 8)$ …

观察可知，下标为偶数的点的纵坐标为 $2^{\frac{n}{2}}$,

下标为偶数的点在直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 上,

$\therefore$ 点 O_{2018} 的纵坐标为 2^{1009} ,

$$\therefore 2^{1009} = \frac{1}{2}x + 1,$$

$$\therefore x = 2^{1010} - 2,$$

$\therefore$ 点 O_{2018} 的坐标为 $(2^{1010} - 2, 2^{1009})$.

故答案为 $(2^{1010} - 2, 2^{1009})$.

【点评】本题考查规律型：点的坐标，一次函数的应用，解题的关键是学会探究规律的方法，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

三、解答题（第 19 题 10 分，第 20 题 12 分，共 22 分）

19. (10.00 分) 先化简，再求值： $(1 - x + \frac{3}{x+1}) \div \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1}$ ，其中 $x = \tan 45^\circ + (\frac{1}{2})^{-1}$.

【分析】先根据分式混合运算顺序和运算法则化简原式，再根据三角函数值、负整数指数幂得出 x 的值，最后代入计算可得.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：原式} &= (\frac{1-x^2}{x+1} + \frac{3}{x+1}) \div \frac{(x+2)^2}{x+1} \\ &= \frac{(2+x)(2-x)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{(2+x)^2} \\ &= \frac{2-x}{2+x}, \end{aligned}$$

当 $x = \tan 45^\circ + (\frac{1}{2})^{-1} = 1 + 2 = 3$ 时,

$$\text{原式} = \frac{2-3}{2+3} = -\frac{1}{5}.$$

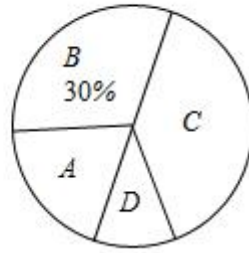
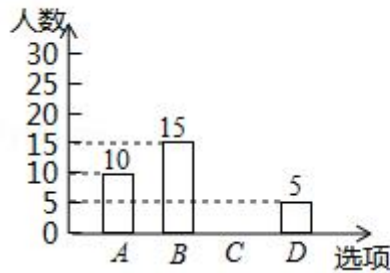
【点评】本题考查分式的化简求值，解答本题的关键是明确分式的化简求值的方法.

20. (12.00 分) 抚顺市某校想知道学生对“遥远的赫图阿拉”，“旗袍故里”等家乡旅游品牌的了解程度，随机抽取了部分学生进行问卷调查，问卷有四个选项（每位被调查的学生必选且只选一项）A. 十分了解，B. 了解较多，C. 了解较少，D. 不知道. 将调查的结果绘

制成如下两幅不完整的统计图，请根据两幅统计图中的信息回答下列问题：

对家乡旅游品牌了解程度条形统计图

对家乡旅游品牌了解程度扇形统计图



- (1) 本次调查了多少名学生？
- (2) 补全条形统计图；
- (3) 该校共有 500 名学生，请你估计“十分了解”的学生有多少名？
- (4) 在被调查“十分了解”的学生中有四名学生干部，他们中有 3 名男生和 1 名女生，学校想从这 4 人中任选两人做家乡旅游品牌宣传员，请用列表或画树状图法求出被选中的两人恰好是一男一女的概率。

【分析】 (1) 根据 B 组人数以及百分比计算即可解决问题；

(2) 求出 C 组人数，画出条形图即可解决问题；

(3) 用 $500 \times$ “十分了解”所占的比例即可；

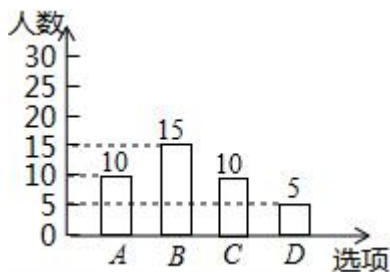
(4) 先画出树状图，继而根据概率公式可求出两位参赛选手恰好是一男一女的概率。

【解答】 解：(1) $15 \div 30\% = 50$ (人)，

答：本次调查了 50 名学生。

(2) $50 - 10 - 15 - 5 = 10$ (人)，

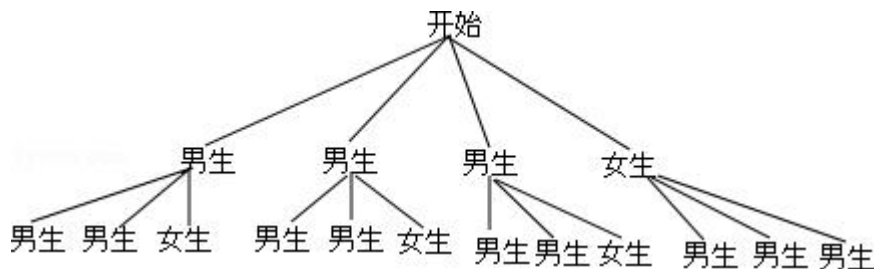
条形图如图所示：



(3) $500 \times \frac{10}{50} = 100$ (人)，

答：该校共有 500 名学生，请你估计“十分了解”的学生有 100 名。

(4) 树状图如下:



共有 12 种等可能情况, 其中所选两位参赛选手恰好是一男一女有 6 种.

所以, 所选两位参赛选手恰好是一男一女的概率 $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

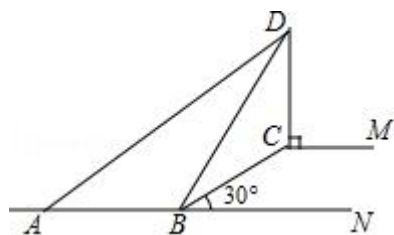
【点评】 本题考查了折线统计图、树状图法求概率的知识, 信息量较大, 注意仔细认真审题, 培养自己的读图能力, 善于寻找解题需要的信息, 属于中考常考题型.

四、解答题 (第 21 题 12 分, 第 22 题 12 分, 共 24 分)

21. (12.00 分) 如图, BC 是路边坡角为 30° , 长为 10 米的一道斜坡, 在坡顶灯杆 CD 的顶端 D 处有一探射灯, 射出的边缘光线 DA 和 DB 与水平路面 AN 所成的夹角 $\angle DAN$ 和 $\angle DBN$ 分别是 37° 和 60° (图中的点 A、B、C、D、M、N 均在同一平面内, $CM \parallel AN$).

(1) 求灯杆 CD 的高度;

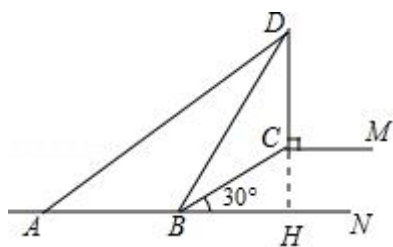
(2) 求 AB 的长度 (结果精确到 0.1 米). (参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)



【分析】 (1) 延长 DC 交 AN 于 H. 只要证明 $BC = CD$ 即可;

(2) 在 $Rt\triangle BCH$ 中, 求出 BH、CH, 在 $Rt\triangle ADH$ 中求出 AH 即可解决问题;

【解答】 解: (1) 延长 DC 交 AN 于 H.



$\because \angle DBH = 60^\circ$, $\angle DHB = 90^\circ$,

$\therefore \angle BDH = 30^\circ$,

$\because \angle CBH = 30^\circ$,

$\therefore \angle CBD = \angle BDC = 30^\circ$,

$\therefore BC = CD = 10$ (米).

(2) 在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中, $CH = \frac{1}{2}BC = 5$, $BH = 5\sqrt{3} \approx 8.65$,

$\therefore DH = 15$,

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中, $AH = \frac{DH}{\tan 37^\circ} = \frac{15}{0.75} = 20$,

$\therefore AB = AH - BH = 20 - 8.65 = 11.4$ (米).

【点评】 本题考查解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造直角三角形解决问题, 属于中考常考题型.

22. (12.00 分) 为落实“美丽抚顺”的工作部署, 市政府计划对城区道路进行了改造, 现安排甲、乙两个工程队完成. 已知甲队的工作效率是乙队工作效率的 $\frac{3}{2}$ 倍, 甲队改造 360 米的道路比乙队改造同样长的道路少用 3 天.

(1) 甲、乙两工程队每天能改造道路的长度分别是多少米?

(2) 若甲队工作一天需付费用 7 万元, 乙队工作一天需付费用 5 万元, 如需改造的道路全长 1200 米, 改造总费用不超过 145 万元, 至少安排甲队工作多少天?

【分析】 (1) 设乙工程队每天能改造道路的长度为 x 米, 则甲工程队每天能改造道路的长度为 $\frac{3}{2}x$ 米, 根据工作时间 = 工作总量 $\div$ 工作效率结合甲队改造 360 米的道路比乙队改造同样长的道路少用 3 天, 即可得出关于 x 的分式方程, 解之经检验后即可得出结论;

(2) 设安排甲队工作 m 天, 则安排乙队工作 $\frac{1200 - 60m}{40}$ 天, 根据总费用 = 甲队每天所需费用 $\times$ 工作时间 + 乙队每天所需费用 $\times$ 工作时间结合总费用不超过 145 万元, 即可得出关于 m 的一元一次不等式, 解之取其中的最大值即可得出结论.

【解答】解：（1）设乙工程队每天能改造道路的长度为 x 米，则甲工程队每天能改造道路的长度为 $\frac{3}{2}x$ 米，

$$\text{根据题意得：} \frac{360}{x} - \frac{360}{\frac{3}{2}x} = 3,$$

解得： $x=40$ ，

经检验， $x=40$ 是原分式方程的解，且符合题意，

$$\therefore \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \times 40 = 60.$$

答：乙工程队每天能改造道路的长度为 40 米，甲工程队每天能改造道路的长度为 60 米.

（2）设安排甲队工作 m 天，则安排乙队工作 $\frac{1200-60m}{40}$ 天，

$$\text{根据题意得：} 7m + 5 \times \frac{1200-60m}{40} \leq 145,$$

解得： $m \geq 10$.

答：至少安排甲队工作 10 天.

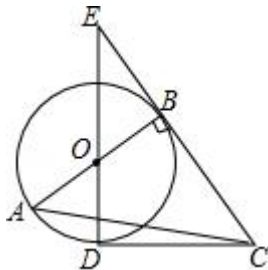
【点评】本题考查了分式方程的应用以及一元一次不等式的应用，解题的关键是：（1）找准等量关系，正确列出分式方程；（2）根据各数量间的关系，正确列出一元一次不等式.

五、解答验（满分 12 分）

23. (12.00 分) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ，以 AB 为直径作 $\odot O$ ，点 D 为 $\odot O$ 上一点，且 $CD=CB$ ，连接 DO 并延长交 CB 的延长线于点 E .

（1）判断直线 CD 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

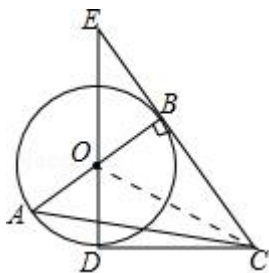
（2）若 $BE=4$ ， $DE=8$ ，求 AC 的长.



【分析】（1）欲证明 CD 是切线，只要证明 $OD \perp CD$ ，利用全等三角形的性质即可证明；

（2）设 $\odot O$ 的半径为 r . 在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中，根据 $OE^2 = EB^2 + OB^2$ ，可得 $(8-r)^2 = r^2 + 4^2$ ，推出 $r=3$ ，由 $\tan \angle E = \frac{OB}{EB} = \frac{CD}{DE}$ ，推出 $\frac{3}{4} = \frac{CD}{8}$ ，可得 $CD=BC=6$ ，再利用勾股定理即可解决问题；

【解答】(1) 证明：连接 OC.



$$\because CB=CD, CO=CO, OB=OD,$$

$$\therefore \triangle OCB \cong \triangle OCD,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \perp DC,$$

$\therefore DC$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 解：设 $\odot O$ 的半径为 r .

$$\text{在 Rt}\triangle OBE \text{ 中, } \therefore OE^2 = EB^2 + OB^2,$$

$$\therefore (8-r)^2 = r^2 + 4^2,$$

$$\therefore r=3,$$

$$\therefore \tan \angle E = \frac{OB}{EB} = \frac{CD}{DE},$$

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{CD}{8},$$

$$\therefore CD=BC=6,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}.$$

【点评】本题考查直线与圆的位置关系、圆周角定理、勾股定理、锐角三角函数等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，属于中考常考题型.

六、解答题 (满分 12 分)

24. (12.00 分) 俄罗斯世界杯足球赛期间，某商店销售一批足球纪念册，每本进价 40 元，规定销售单价不低于 44 元，且获利不高于 30%. 试销售期间发现，当销售单价定为 44 元时，每天可售出 300 本，销售单价每上涨 1 元，每天销售量减少 10 本，现商店决定提价销售. 设每天销售量为 y 本，销售单价为 x 元.

(1) 请直接写出 y 与 x 之间的函数关系式和自变量 x 的取值范围;

(2) 当每本足球纪念册销售单价是多少元时，商店每天获利 2400 元？

(3) 将足球纪念册销售单价定为多少元时，商店每天销售纪念册获得的利润 w 元最大？最大利润是多少元？

【分析】 (1) 售单价每上涨 1 元，每天销售量减少 10 本，则售单价每上涨 $(x - 44)$ 元，每天销售量减少 $10(x - 44)$ 本，所以 $y = 300 - 10(x - 44)$ ，然后利用销售单价不低于 44 元，且获利不高于 30% 确定 x 的范围；

(2) 利用每本的利润乘以销售量得到总利润得到 $(x - 40)(-10x + 740) = 2400$ ，然后解方程后利用 x 的范围确定销售单价；

(3) 利用利用每本的利润乘以销售量得到总利润得到 $w = (x - 40)(-10x + 740)$ ，再把它变形为顶点式，然后利用二次函数的性质得到 $x = 52$ 时 w 最大，从而计算出 $x = 52$ 时对应的 w 的值即可。

【解答】 解：(1) $y = 300 - 10(x - 44)$ ，

即 $y = -10x + 740$ ($44 \leq x \leq 52$)；

(2) 根据题意得 $(x - 40)(-10x + 740) = 2400$ ，

解得 $x_1 = 50$ ， $x_2 = 64$ (舍去)，

答：当每本足球纪念册销售单价是 50 元时，商店每天获利 2400 元；

(3) $w = (x - 40)(-10x + 740)$

$= -10x^2 + 1140x - 29600$

$= -10(x - 57)^2 + 2890$ ，

当 $x < 57$ 时， w 随 x 的增大而增大，

而 $44 \leq x \leq 52$ ，

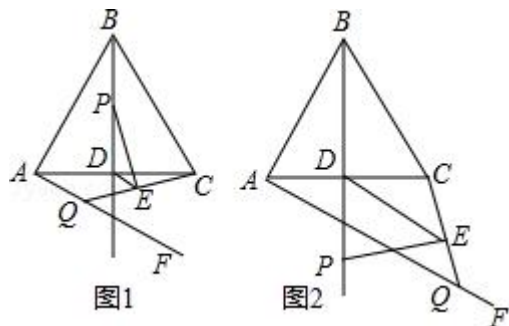
所以当 $x = 52$ 时， w 有最大值，最大值为 $-10(52 - 57)^2 + 2890 = 2640$ ，

答：将足球纪念册销售单价定为 52 元时，商店每天销售纪念册获得的利润 w 元最大，最大利润是 2640 元。

【点评】 本题考查了二次函数的应用：利用二次函数解决利润问题，解此类题的关键是通过题意，确定出二次函数的解析式，然后利用二次函数的性质确定其最大值；在求二次函数的最值时，一定要注意自变量 x 的取值范围。也考查了一元二次方程的应用。

七、解答题 (满分 12 分)

25. (12.00 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=BC$, $BD \perp AC$ 于点 D , $\angle FAC = \frac{1}{2}\angle ABC$, 且 $\angle FAC$ 在 AC 下方. 点 P , Q 分别是射线 BD , 射线 AF 上的动点, 且点 P 不与点 B 重合, 点 Q 不与点 A 重合, 连接 CQ , 过点 P 作 $PE \perp CQ$ 于点 E , 连接 DE .



(1) 若 $\angle ABC = 60^\circ$, $BP=AQ$.

①如图 1, 当点 P 在线段 BD 上运动时, 请直接写出线段 DE 和线段 AQ 的数量关系和位置关系;

②如图 2, 当点 P 运动到线段 BD 的延长线上时, 试判断①中的结论是否成立, 并说明理由;

(2) 若 $\angle ABC = 2\alpha \neq 60^\circ$, 请直接写出当线段 BP 和线段 AQ 满足什么数量关系时, 能使 (1) 中①的结论仍然成立 (用含 α 的三角函数表示).

【分析】 (1) ①先判断出 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 进而判断出 $\angle CBP = \angle CAQ$, 即可判断出 $\triangle BPC \cong \triangle AQC$, 再判断出 $\triangle PCQ$ 是等边三角形, 进而得出 $CE=QE$, 即可得出结论;

②同①的方法即可得出结论;

(2) 先判断出, $\angle PAQ = 90^\circ - \angle ACQ$, $\angle BAP = 90^\circ - \angle ACQ$, 进而得出 $\angle BCP = \angle ACQ$, 即可判断出进而判断出 $\triangle BPC \sim \triangle AQC$, 最后用锐角三角函数即可得出结论.

【解答】 解: (1) ① $DE = \frac{1}{2}AQ$, $DE \parallel AQ$,

理由: 连接 PC , PQ ,

在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ACB = 60^\circ$, $AC=BC$,

$\therefore AB=BC$, $BD \perp AC$,

$\therefore AD=CD$, $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle BAC$,

$\therefore \angle CAF = \frac{1}{2}\angle ABC$,

$\therefore \angle CBP = \angle CAQ$,

在 $\triangle BPC$ 和 $\triangle AQC$ 中,
$$\begin{cases} BC=AC \\ \angle CBP=\angle CAQ \\ BP=AQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle BPC \cong \triangle AQC$ (SAS),

$\therefore PC=QC, \angle BPC=\angle ACQ,$

$\therefore \angle PCQ=\angle PCA+\angle AQC=\angle PCA+\angle BCP=\angle ACB=60^\circ,$

$\therefore \triangle PCQ$ 是等边三角形,

$\therefore PE \perp CQ,$

$\therefore CE=QE,$

$\therefore AD=CD,$

$\therefore DE=\frac{1}{2}AQ, DE \parallel AQ;$

② $DE \parallel AQ, DE=\frac{1}{2}AQ,$

理由: 如图 2, 连接 $PQ, PC,$

同①的方法得出 $DE \parallel AQ, DE=\frac{1}{2}AQ;$

(2) $AQ=2BP \cdot \sin \alpha$

理由: 连接 $PQ, PC,$

要使 $DE=\frac{1}{2}AQ, DE \parallel AQ,$

$\therefore AD=CD,$

$\therefore CE=QE,$

$\therefore PE \perp CQ,$

$\therefore PQ=PC,$

易知, $PA=PC,$

$\therefore PA=PE=PC$

$\therefore$ 以点 P 为圆心, PA 为半径的圆必过 $A, Q, C,$

$\therefore \angle APQ=2\angle ACQ,$

$\therefore PA=PQ,$

$\therefore \angle PAQ=\angle PQA=\frac{1}{2}(180^\circ - \angle APQ) = 90^\circ - \angle ACQ,$

$$\because \angle CAF = \angle ABD, \quad \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP = 90^\circ - \angle PAQ = 90^\circ - \angle ACQ,$$

易知, $\angle BCP = \angle BAP$,

$$\therefore \angle BCP = \angle ACQ,$$

$$\because \angle CBP = \angle CAQ,$$

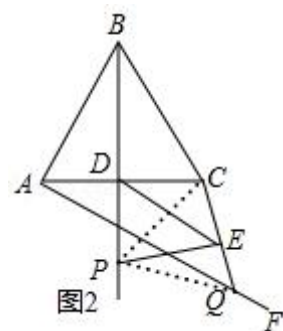
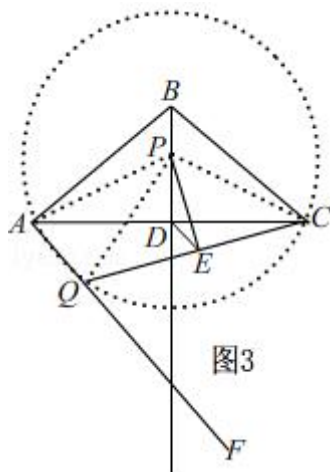
$$\therefore \triangle BPC \sim \triangle AQC,$$

$$\therefore \frac{BP}{AQ} = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{2CD},$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\sin \alpha = \frac{CD}{BC}$,

$$\therefore \frac{AQ}{BP} = 2 \times \frac{CD}{BC} = 2 \sin \alpha,$$

$$\therefore AQ = 2BP \cdot \sin \alpha.$$



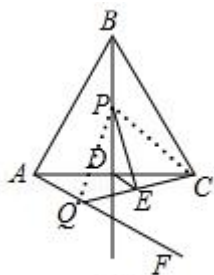
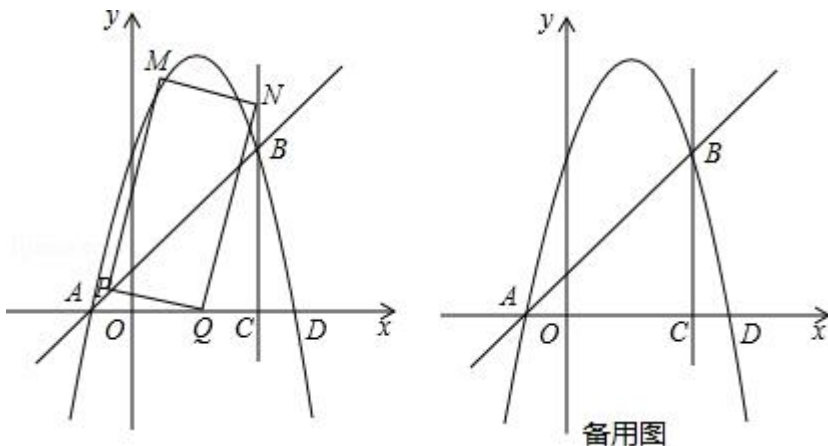


图1

【点评】此题是三角形综合题，主要考查了等边三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数，判断出 $\angle BCP = \angle ACQ$ 是解本题的关键.

八、解答题（满分 14 分）

26. (14.00 分) 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 和直线 $y = x + 1$ 交于 A, B 两点，点 A 在 x 轴上，点 B 在直线 $x = 3$ 上，直线 $x = 3$ 与 x 轴交于点 C



(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 P 从点 A 出发，以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度的速度沿线段 AB 向点 B 运动，点 Q 从点 C 出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿线段 CA 向点 A 运动，点 P, Q 同时出发，当其中一点到达终点时，另一个点也随之停止运动，设运动时间为 t 秒 ($t > 0$). 以 PQ 为边作矩形 PQNM，使点 N 在直线 $x = 3$ 上.

①当 t 为何值时，矩形 PQNM 的面积最小？并求出最小面积；

②直接写出当 t 为何值时，恰好有矩形 PQNM 的顶点落在抛物线上.

【分析】 (1) 利用待定系数法即可；

(2) ①分别用 t 表示 PE、PQ、EQ，用 $\triangle PQE \sim \triangle QNC$ 表示 NC 及 QN，列出矩形 PQNM 面积与 t 的函数关系式问题可解；

②由①利用线段中点坐标分别等于两个端点横纵坐标平均分的数量关系，表示点 M 坐标，分别讨论 M、N、Q 在抛物线上时的情况，并分别求出 t 值.

【解答】解：(1) 由已知，B 点横坐标为 3

$\because A、B$ 在 $y=x+1$ 上

$\therefore A(-1, 0), B(3, 4)$

把 $A(-1, 0), B(3, 4)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$ 得

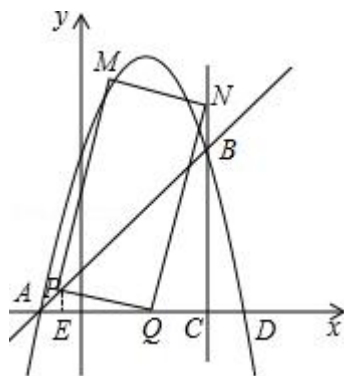
$$\begin{cases} -1-b+c=0 \\ -9+3b+c=4 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b=3 \\ c=4 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-x^2+3x+4$

(2) ①过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E



$\because$ 直线 $y=x+1$ 与 x 轴夹角为 45° ，P 点速度为每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度

$\therefore t$ 秒时点 E 坐标为 $(-1+t, 0)$ ，Q 点坐标为 $(3-2t, 0)$

$\therefore EQ=4-3t, PE=t$

$\because \angle PQE + \angle NQC = 90^\circ$

$\angle PQE + \angle EPQ = 90^\circ$

$\therefore \angle EPQ = \angle NQC$

$\therefore \triangle PQE \sim \triangle QNC$

$$\therefore \frac{PQ}{NQ} = \frac{PE}{QC} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 矩形 PQNM 的面积 $S=PQ \cdot NQ=2PQ^2$

$\because PQ^2=PE^2+EQ^2$

$$\therefore S=2(\sqrt{t^2+(4-3t)^2})^2=20t^2-36t+18$$

当 $t = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{5}$ 时,

$$S_{\text{最小}} = 20 \times \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 36 \times \frac{6}{5} + 18 = \frac{16}{5}$$

②由①点 C 坐标为 $(3 - 2t, 0)$ P $(-1 + t, t)$

$\therefore \triangle PQE \sim \triangle QNC$, 可得 $NC = 2QO = 8 - 6t$

$\therefore$ N 点坐标为 $(3, 8 - 6t)$

由矩形对角线互相平分

$\therefore$ 点 M 坐标为 $(3t - 1, 8 - 5t)$

当 M 在抛物线上时

$$8 - 5t = -(3t - 1)^2 + 3(3t - 1) + 4$$

$$\text{解得 } t = \frac{10 \pm \sqrt{27}}{9}$$

当点 Q 到 A 时, Q 在抛物线上, 此时 $t = 2$

当 N 在抛物线上时, $8 - 6t = 4$

$$\therefore t = \frac{2}{3}$$

综上所述当 $t = \frac{2}{3}$ 、 $\frac{10 \pm \sqrt{27}}{9}$ 或 2 时, 矩形 PQNM 的顶点落在抛物线上.

【点评】 本题是代数几何综合题, 考查了二次函数、一次函数、三角形相似和矩形的有关性质, 解答时应注意数形结合和分类讨论的数学思想.